Universidad Nacional de San Juan
Facultad de Ingeniería
Instituto de Automática

CONTROL PREDICTIVO DE CUADRICÓPTEROS EN ENTORNOS PARCIALMENTE ESTRUCTURADOS

Tesis Doctoral de
Bryan Stefano GUEVARA BERMEO

Temas de Automática
112

CONTROL PREDICTIVO DE CUADRICÓPTEROS EN ENTORNOS PARCIALMENTE ESTRUCTURADOS

Tesis de Doctorado de

Bryan Stefano Guevara Bermeo

Aprobada por la
Facultad de Ingeniería de la
Universidad Nacional de San Juan
para el otorgamiento del grado académico de

DOCTOR EN INGENIERÍA DE SISTEMAS DE CONTROL

Dirección de Tesis: Dr. Ing. Marcos Toibero
Instituto de Automática
Universidad Nacional de San Juan, Argentina

Dr. Ing. Daniel Gandolfo
Instituto de Automática
Universidad Nacional de San Juan, Argentina

Jurado de Tesis: Prof. Dr. Alexandre Santos Brandão
Departamento de Engenharia Elétrica
Universidade Federal de Viçosa, Brasil

Dr. Ing. Fernando A. Chicaiza
Centro de investigación en Mecatrónica
y Sistemas Interactivos
Universidad Indoamérica, Ecuador

Noviembre 2025

Bryan Stefano Guevara Bermeo

Control predictivo de cuadricópteros en entornos parcialmente estructurados

Tesis de Doctorado
Temas de Automática
Primera edición: 2025

La reproducción total o parcial de de este libro en forma idéntica o modificada, escrita a maquina o por el sistema "multigraph", mimeógrafico, impreso, etc., no autorizada por los editores, viola los derechos reservados.
Cualquier utilización debe ser previamente solicitada.

©2025 Bryan Stefano Guevara Bermeo
Hecho el deposito que marca la ley
ISBN: 978-631-90962-3-1
CDD: 629.893

Con amor para mi esposa y mis padres, un logro que lo dedico a ellos.

—Bryan

Agradecimientos

Quiero expresar mi más profundo agradecimiento a todas las personas que han contribuido significativamente en la realización de esta tesis, sin cuyo apoyo y guía este logro no habría sido posible.

En primer lugar, agradezco a mis directores, Juan Marcos Toibero y Daniel Gandolfo, por su invaluable orientación, sabiduría y apoyo a lo largo de todo el proceso de investigación. Su experiencia y dedicación han sido fundamentales para llevar a cabo este trabajo con éxito.

No puedo dejar de mencionar a mi esposa, cuyo inquebrantable apoyo y paciencia han sido un pilar fundamental en este camino. Su comprensión y aliento constante han sido un motor que me ha impulsado a superar los desafíos que se presentaron durante la realización de esta tesis.

Asimismo, deseo reconocer la invaluable ayuda, apoyo y amistad de mis compañeros de estudio, quien con su conocimiento ha sido un pilar clave para superar los obstáculos durante la realización de esta tesis. En especial, quiero agradecer a mis buenos amigos Luis F. Recalde y Patricio Velasco, quienes me brindaron su apoyo constante y compartieron valiosas ideas en cada paso del camino. De las misma forma, quiero reconocer al Instituto de Automática (INAUT) de la Universidad Nacional de San Juan (UNSJ) por brindarme la oportunidad de formar parte de su prestigioso programa de maestría en Ingeniería de Sistemas de Control.

También agradezco a mis padres, cuyo esfuerzo por brindarme una educación de calidad se refleja en mi formación académica. Su amor, sacrificio y confianza en mí fueron el combustible para lograr este objetivo.

Por último, agradezco a mis amigos y compañeros de estudio que compartieron este camino conmigo. Su apoyo, intercambio de ideas y motivación fueron clave en mi desarrollo como investigador.

¡Gracias!

Índice general

Resumen extendido I
Justificación . . . II
Contribuciones . . . III
Contenido . . . IV
Artículos publicados . . . VI
Artículos co-publicados . . . VII

1 Introducción 1
1.1 Motivación y justificación . . . 3
1.2 Descripción de los objetivos . . . 5
1.2.1 Objetivo General . . . 5
1.2.2 Objetivos Específicos . . . 6
1.3 Antecedentes . . . 7
1.3.1 UAV Cuadricóptero . . . 7
1.3.2 Control de bajo nivel . . . 10
1.4 Consideraciones computacionales y de hardware . . . 11
1.5 Estado del arte . . . 12

2 Preliminares matemáticos 19
2.1 Introducción . . . 19
2.2 Marco de Coordenadas . . . 20
2.2.1 Marco de referencia inercial . . . 21
2.2.2 Marco de referencia del cuerpo . . . 21
2.3 Ángulos de Euler . . . 22
2.4 Matriz de rotación . . . 26
2.5 Cuaterniones . . . 28
2.5.1 Rotación usando cuaterniones . . . 29
2.5.2 Relación con el álgebra de Lie . . . 29
2.6 Consideraciones finales . . . 31

3 Modelado matemático **35**
3.1 Introducción . . . 35
3.2 Modelado de cuadricópteros . . . 37
3.3 Modelo cinemático simplificado . . . 39
3.4 Modelo dinámico simplificado . . . 41
3.4.1 Modelo dinámico simplificado basado en velocidades de maniobra . . . 44
3.5 Modelo cinemático completo . . . 46
3.6 Modelo dinámico completo . . . 47
3.6.1 Ecuaciones de Newton-Euler . . . 48
3.6.2 Ecuaciones de Euler-Lagrange . . . 49
3.7 Identificación dinámica . . . 55
3.7.1 Modelo dinámico simplificado . . . 57
3.7.2 Modelo dinámico completo . . . 60
3.8 Modelado dinámico paramétrico . . . 62
3.8.1 Descomposición de Modo Dinámico con Control (DMDc) . . . 63
3.8.2 DMDc Ventaneado (Windowed DMDc) . . . 67
3.8.3 SINDy . . . 70

4 Control Predictivo Basado en Modelo **79**
4.1 Introducción . . . 79
4.2 MPC como problema de control óptimo . . . 81
4.3 Programación No Lineal en el MPC . . . 84
4.4 MPC nominal para cuadricópteros . . . 87
4.4.1 MPC para modelo simplificado . . . 88
4.4.2 MPC para modelo completo . . . 95
4.5 Consideraciones finales . . . 99

5 MPC Robusto y Adaptativo (RA-MPC) **103**
5.1 Introducción . . . 103
5.2 Modelo dinámico con perturbación . . . 104
5.3 Controlador NMPC Adaptativo . . . 105
5.4 MPC con Observador de Momento Dinámico (MPC-MOD) 109
5.5 NMPC Adaptativo con esquema MOD . . . 111
5.6 Resultados . . . 112
5.6.1 Experimento NMPC nominal . . . 114
5.6.2 Experimento NMPC adaptativo . . . 115

5.6.3 Experimento MOD-NMPC . . . 116
5.6.4 Experimentos NMPC adaptativo con MOD . . . 118
5.6.5 Discusión . . . 119
5.7 Conclusión . . . 120

6 MPC de Contorno (MPCC) 123
6.1 Introducción . . . 123
6.2 Kinodinámica del UAV . . . 125
6.3 Función de Control de Lyapunov . . . 127
6.4 Funciones de Barrera de Control . . . 128
6.5 MPC de Contorno . . . 130
6.5.1 Problema de optimización para NMPCC . . . 133
6.5.2 Parametrización de la longitud de arco mediante el método de bisección . . . 135
6.5.3 Configuración experimental . . . 136
6.5.4 Experimentación y resultados . . . 137
6.6 Conclusión . . . 141

7 MPC de manipulador aéreo 145
7.1 Introducción . . . 145
7.2 Modelado del manipulador aéreo robótico . . . 146
7.2.1 Modelado cinemático diferencial . . . 149
7.2.2 Modelo dinámico generalizado . . . 151
7.2.3 Modelo dinámico simplificado . . . 153
7.2.4 Identificación y validación del modelo dinámico . . . 158
7.2.5 DMDc para el manipulador robótico aéreo . . . 162
7.3 MPC para el seguimiento de trayectorias . . . 164
7.4 Resultados y discusión . . . 166
7.5 Conclusión . . . 170

8 Conclusiones 171

Bibliografía 177

Resumen extendido

El control predictivo, comúnmente conocido como Control Predictivo basado en Modelo (MPC), se ha consolidado como una de las técnicas más robustas y flexibles para el control de sistemas dinámicos no lineales, como es el caso de los cuadricópteros. En entornos parcialmente estructurados, donde la presencia de obstáculos y perturbaciones externas es común, su extensión Control Predictivo No Lineal Basado en Modelo (NMPC) ofrece una solución efectiva para garantizar el seguimiento de trayectorias de manera precisa y eficiente. Esta tesis propone la implementación de NMPC para cuadricópteros, destacando la importancia de desarrollar modelos matemáticos precisos y la integración de técnicas avanzadas para la estabilidad y evasión de obstáculos.

Un modelo matemático preciso es esencial para el éxito del NMPC en sistemas como los cuadricópteros. Se emplean formalismos clásicos como las ecuaciones de Euler-Lagrange y Newton-Euler, que describen detalladamente las dinámicas traslacionales y rotacionales del vehículo. Estos modelos proporcionan las bases para el diseño de controladores, permitiendo capturar con precisión las fuerzas y torques que actúan sobre el cuadricóptero.

Dado que los modelos basados solo en primeros principios pueden ser insuficientes cuando se trata de sistemas altamente no lineales o con incertidumbres, en este trabajo también se exploran enfoques basados en datos (*data-driven*) como *Dynamic Mode Decomposition with Control* (DMDc) y *Sparse Identification of Nonlinear Dynamics* (SINDy). Estas metodologías permiten ajustar dinámicas complejas a partir de datos experimentales, facilitando una identificación precisa de los parámetros dinámicos. Para complementar, se emplean controladores proporcionales-derivativos (PD) que transforman estos modelos en variables de control más manejables, como las velocidades y los ángulos de orientación, alabeo (*roll*), cabeceo (*pitch*) y guiñada (*yaw*).

La implementación de NMPC en tiempo real sigue siendo un reto importante debido a las limitaciones computacionales. A pesar de la consolidación de la teoría del NMPC, la resolución en tiempo real de los problemas de optimización no lineal es compleja y exige herramientas computacionales eficientes. Afortunadamente, con tecnologías como Acados y CasADi, es posible implementar NMPC en sistemas embebidos críticos, optimizando las trayectorias del cuadricóptero en presencia de

restricciones dinámicas.

Además del NMPC, un enfoque avanzado propuesto es el Control Predictivo de Contorno (MPCC), el cual se enfoca en optimizar el seguimiento de trayectorias en escenarios donde la velocidad es un factor crucial. El MPCC minimiza los errores de contorno y arrastre mientras maximiza el progreso a lo largo del camino deseado, siendo una solución ideal para misiones de entrega rápida o de vigilancia. Este enfoque no solo busca la precisión en el seguimiento, sino también optimizar la velocidad sin comprometer la estabilidad del cuadricóptero. La integración de Funciones de Barrera de Control (CBF) y Funciones de Lyapunov de Control (CLF) asegura que las restricciones de seguridad y estabilidad se mantengan incluso en trayectorias complejas o ante obstáculos dinámicos.

La evasión de obstáculos es una necesidad crucial en entornos parcialmente estructurados, por lo que las CBF se incorporan para garantizar una navegación segura. Estas funciones añaden restricciones al problema de optimización del NMPC, asegurando que el cuadricóptero mantenga una distancia segura con respecto a los obstáculos. Por otro lado, las CLF aseguran la estabilidad del sistema, aun cuando se enfrenta a perturbaciones o cambios en el entorno.

Las perturbaciones no modeladas, como las fuerzas externas debidas al viento o turbulencias, representan un reto adicional. Para abordar estas incertidumbres, se combina el NMPC con técnicas de control adaptativo y observadores de momento dinámico, permitiendo ajustar los parámetros del sistema en tiempo real. Esta combinación mejora la robustez del control del cuadricóptero, asegurando un seguimiento preciso de trayectorias incluso en presencia de perturbaciones externas significativas.

Breve Justificación

Sin duda, el uso de cuadricópteros y vehículos aéreos no tripulados (UAV) ha crecido notablemente en aplicaciones civiles, profesionales y militares. A medida que estos sistemas operan en entornos complejos y dinámicos, es esencial diseñar controladores que permitan un seguimiento preciso de trayectorias y que sean confiables y robustos ante perturbaciones y variaciones en las condiciones ambientales. Esto plantea la necesidad de controladores predictivos avanzados, capaces de integrar modelos dinámicos precisos y de adaptarse a entornos parcialmente estructurados, maximizando así la eficiencia del UAV en escenarios reales.

El NMPC ha demostrado ser una técnica prometedora para estos desafíos, gracias a su capacidad para predecir el comportamiento del sistema y optimizar las acciones de control en un horizonte temporal. Sin embargo, su implementación en tiempo real para UAV enfrenta limitaciones debido a la complejidad computacional y la necesidad de resolver problemas de optimización no lineales bajo estrictas restricciones operativas.

Este trabajo responde a la necesidad de un marco que permita la implementación eficiente de NMPC en cuadricópteros, garantizando estabilidad y seguridad en entornos dinámicos. Los avances en procesamiento y la disponibilidad de algoritmos de resolución numérica eficientes permiten superar estos desafíos, habilitando el uso del NMPC en UAV para aplicaciones críticas.

Contribuciones principales

A continuación, se detallan las contribuciones de esta investigación, que ha generado un aporte significativo en el desarrollo de controladores predictivos y su aplicación en entornos parcialmente estructurados:

- **Desarrollo de modelos híbridos para el control predictivo no lineal de cuadricópteros:** Se implementa un marco integral que combina modelos basados en primeros principios (Euler-Lagrange y Newton-Euler) con técnicas *data-driven* para la identificación precisa de parámetros dinámicos. Estos modelos híbridos integran datos experimentales y principios teóricos mediante regresión avanzada y optimización, logrando una representación dinámica precisa del sistema.

- **Implementación en tiempo real de NMPC con herramientas avanzadas:** Uso de Acados y CasADi para resolver problemas de control óptimo, facilitando la implementación de controladores predictivos en sistemas embebidos con restricciones computacionales, tanto en modelos lineales como no lineales del cuadricóptero.

- **Desarrollo de un MPC robusto y adaptativo:** Implementación de un controlador predictivo robusto adaptativo que estima y compensa dinámicas no modeladas y perturbaciones externas, mejorando la robustez y estabilidad del UAV frente a condiciones ambientales

cambiantes, como viento y turbulencias en entornos no estructurados a lo largo del horizonte de predicción.

- **Desarrollo e implementación de un MPCC:** Diseñado para permitir el seguimiento de trayectorias complejas a altas velocidades. Este controlador minimiza los errores de contorno y arrastre, maximizando el avance del cuadricóptero a lo largo del camino deseado. Además, incorpora CBF y CLF, garantizando así la seguridad y estabilidad en entornos dinámicos.

- **Control predictivo en manipulador aéreo con objetivos secundarios:** Extensión del enfoque de control predictivo al manipulador aéreo, compuesto por un cuadricóptero y un brazo manipulador con tres grados de libertad. Se formula el NMPC considerando objetivos secundarios, aprovechando la redundancia del sistema. Esto permite que el manipulador aéreo cumpla no solo con los objetivos primarios, sino también con metas secundarias de configuración interna, logrando un control preciso y flexible en tareas de manipulación complejas.

Contenido

La presente tesis se compone de diversos capítulos que exploran en profundidad el estudio del comportamiento dinámico y control predictivo no lineal aplicado al cuadricóptero. A continuación, se describen brevemente los principales capítulos de este trabajo:

Capítulo I: Introducción

Este capítulo presenta la motivación y los objetivos de la investigación, así como un contexto general sobre los cuadricópteros y los sistemas de control de bajo nivel.

Capítulo II: Preliminares Matemáticos

Se introducen los fundamentos matemáticos necesarios, como marcos de referencia, ángulos de Euler, cuaterniones y álgebra de Lie, que son esenciales para la formulación del control predictivo.

Capítulo III: Modelado Matemático

Este capítulo desarrolla modelos simplificados y completos del cuadricóptero, abordando las ecuaciones de Newton-Euler y Euler-Lagrange, así como técnicas de identificación dinámica basada en datos.

Capítulo IV: Control Predictivo Basado en Modelo

Se expone la teoría del MPC, aplicándola tanto a modelos simplificados como completos del cuadricóptero, y se discuten las configuraciones para el seguimiento de trayectorias en entornos estructurados.

Capítulo V: MPC Robusto y Adaptativo (RA-MPC)

Este capítulo explora el uso de estrategias adaptativas y robustas para el control del cuadricóptero en presencia de perturbaciones y cambios en el entorno, incrementando su estabilidad y robustez.

Capítulo VI: MPC de Contorno

Se introduce el control predictivo de contorno para el seguimiento de trayectorias complejas, minimizando errores de contorno y arrastre, e integrando funciones de Lyapunov y barrera de control para la estabilidad en entornos dinámicos.

Capítulo VII: MPC en un Manipulador Aéreo

En este capítulo, se extiende el enfoque de control predictivo a un sistema compuesto por un cuadricóptero equipado con un manipulador de tres grados de libertad. Se detalla el modelado dinámico del sistema conjunto, abordando las interacciones entre el cuadricóptero y el manipulador.

Capítulo VIII: Conclusiones

Este capítulo final resume los principales logros de la tesis y las contribuciones al campo del control de cuadricópteros. Se discuten las limitaciones del trabajo y se proponen direcciones futuras para investigaciones adicionales.

Artículos publicados

Artículos de revista

[1] **B. S. Guevara**, J. Varela-Aldás, Viviana Moya, Manuel Cardona, D. C. Gandolfo, and J. M. Toibero, "*Model Predictive Contouring Control with Barrier and Lyapunov Functions for Stable Path-Following in UAV systems*,"*IEEE Access*, vol. 7, no. 2, art. 144, 2025.

[2] **B. S. Guevara**, J. Varela-Aldás, Viviana Moya, Manuel Cardona, D. C. Gandolfo, and J. M. Toibero, "*Data-Driven Model Predictive Control for Trajectory Tracking in UAV-Manipulator Systems*,"*IEEE Access*, vol. 7, no. 2, art. 144, 2025.

[3] **B. S. Guevara**, J. Varela-Aldás, D. C. Gandolfo, and J. M. Toibero, "*SINDy and PD-Based UAV Dynamic Identification for MPC*,"*Drones* 2025, vol. 7, no. 71.

[4] **B. S. Guevara**, L. F. Recalde, V. Moya, J. Varela-Aldás, D. C. Gandolfo and J. M. Toibero, "*Estimation of Unmodeled Dynamics: Nonlinear MPC and Adaptive Control Law With Momentum Observer Dynamic*," in *IEEE Access*, vol. 12, pp. 77121-77132, 2024.

[5] **B. S. Guevara**, L. F. Recalde, J. Varela-Aldás, V. H. Andaluz, D. C. Gandolfo, and J. M. Toibero, "*A comparative study between nmpc and baseline feedback controllers for UAV trajectory tracking*,"*Drones*, vol. 7, no. 2, art. 144, 2023.

Artículos de congresos

[6] **B. S. Guevara**, Recalde, L. F., Varela-Aldás, J., Gandolfo, D. C., and Toibero, J. M. (2023). "*Quadcopters control using online dynamic mode decomposition.*," in *IFAC-PapersOnLine,*, 56(3), 589-594

[7] **B. S. Guevara**, J. Varela-Aldás, V. Moya, , D. C. Gandolfo and J. M. Toibero, "*Bridging Simulation and Reality: A Digital Twin Approach for UAVs*," in *Proceedings of 10th International Congress on Information and Communication Technology. ICICT 2025*. Lecture Notes in Networks and Systems, vol 1011. Springer, Singapore.

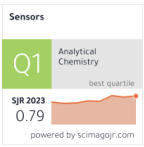
Artículos co-publicados

Artículos de revista

[8] J. Varela-Aldás, L. F. Recalde, **B. S. Guevara**, and V. H. Andaluz, "*Open-Access Platform for the Simulation of Aerial Robotic Manipulators*," *IEEE Access*, vol. 12, pp. 49735–49751, 2024.

[9] E. Velasco-Sánchez, L. F. Recalde, **B. S. Guevara**, J. Varela-Aldás, F. A. Candelas, and S. T. Puente, "*Visual Servoing NMPC Applied to UAVs for Photovoltaic Array Inspection*," *IEEE Robotics and Automation Letters*, vol. 9, no. 3, pp. 2766–2773, 2024.

[10] L. F. Recalde, **B. S. Guevara**, C. P. Carvajal, V. H. Andaluz, J. Varela-Aldás, and D. C. Gandolfo, "*System Identification and Nonlinear Model Predictive Control with Collision Avoidance Applied in Hexacopters UAVs*," *Sensors*, vol. 22, no. 13, art. 4712, 2022.



Artículos de congreso

[11] F. Rivera, W. Orozco, E. Pinos, M. Toibero, J. Montesdeoca, and **B. S. Guevara**, "*Social Robot Motion for Low-Velocity Indoor Navigation: Simulation Results*," *2024 IEEE ANDESCON*, pp. 1–5, 2024.

[12] X. Armijos, W. Orozco, E. Pinos, M. Toibero, J. Montesdeoca, and **B. S. Guevara**, "*Trajectory Tracking Control of a Car-Like Robot: Simulation Results*," *2024 IEEE ANDESCON*, pp. 1–5, 2024.

[13] J. Montesdeoca, W. Orozco, E. Pinos, M. Toibero, F. Roberti, and **B. S. Guevara**, "*Person-Following Robots With Social Robot Motion From Control Design: Simulation Results*," *2024 IEEE ANDESCON*, pp. 1–5, 2024.

[14] L. F. Recalde, E. Velasco-Sánchez, **B. S. Guevara**, D. Gandolfo, and F. A. Candelas, "*Quadratic Programming Optimization Applied to Robotic Systems*," *2023 IEEE Seventh Ecuador Technical Chapters Meeting (ECTM)*, pp. 1–6, 2023.

[15] E. Velasco-Sánchez, A. Olivas, L. F. Recalde, **B. S. Guevara**, and F. A. Candelas, "*Obstacle Detection With Differences of Normals in Unorganized Point Clouds for Mobile Robotics*," *2023 IEEE Seventh Ecuador Technical Chapters Meeting (ECTM)*, pp. 1–5, 2023.

[16] L. F. Recalde, J. Varela, **B. S. Guevara**, V. Andaluz, and D. Gandolfo, "*Adaptive NMPC-RBF With Application to Manipulator Robots*," *2023 9th International Conference on Control, Decision and Information Technologies (CoDIT)*, pp. 2475–2482, 2023.

[17] J. Varela-Aldás, L. F. Recalde, **B. S. Guevara**, J. M. Toibero, and D. Gandolfo, "*NMPC of Unmanned Aerial Manipulators Considering Obstacle Avoidance and Manipulability*," *IFAC-PapersOnLine*, vol. 56, no. 3, pp. 487–492, 2023.

[18] L. F. Recalde, **B. S. Guevara**, V. Andaluz, J. Varela, J. Gimenez, and D. Gandolfo, "*Nonlinear MPC for Multiple Quadrotors in Dynamic Environments*," *2022 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS)*, pp. 1201–1209, 2022.

[19] L. F. Recalde, J. Varela, **B. S. Guevara**, V. Andaluz, J. Gimenez, and D. Gandolfo, "*Constrained Visual Servoing of Quadrotors Based on Model Predictive Control*," *IFAC-PapersOnLine*, vol. 55, no. 37, pp. 353–360, 2022.

1 Introducción

Introducción

Introducción general del capítulo

En este capítulo se presenta el marco conceptual que motiva y fundamenta esta tesis, estableciendo los elementos esenciales necesarios para comprender el problema de control en cuadricópteros y su relevancia en aplicaciones reales. Se introducen la motivación, los objetivos generales y específicos del trabajo, los antecedentes técnicos del UAV utilizado, y un análisis del estado del arte que justifica la elección de estrategias de control predictivo basadas en modelo. Además, se describe el funcionamiento del control de bajo nivel y se establece una distinción clara entre las formulaciones teóricas basadas en fuerzas y torques y las implementaciones prácticas basadas en velocidades, preparando el camino para los capítulos posteriores donde se desarrollará la formulación matemática rigurosa.

1.1. Motivación y justificación

La creciente integración de vehículos aéreos no tripulados en diversas actividades industriales, comerciales y científicas ha generado un interés sin precedentes en mejorar su capacidad para operar de manera autónoma, segura y eficiente. Entre estas plataformas, los cuadricópteros destacan por su maniobrabilidad, simplicidad mecánica y capacidad de despegar y aterrizar verticalmente. Sin embargo, enfrentan desafíos significativos cuando deben desenvolverse en entornos parcialmente estructurados, donde existen obstáculos móviles, incertidumbres ambientales, restricciones físicas y cambios abruptos en la dinámica del sistema. Estas condiciones dificultan la planificación y ejecución de trayectorias y exigen estrategias de control avanzadas.

El problema de control en UAV consiste en diseñar algoritmos capaces de guiar al vehículo de manera precisa y estable en presencia de perturbaciones externas, limitaciones cinemáticas y dinámicas, variaciones rápidas

en la posición y velocidad, y restricciones operativas vinculadas a la misión. La extrema agilidad de los cuadricópteros —característica que los hace ideales para tareas exigentes como inspección, búsqueda y rescate, seguimiento de objetivos o vuelo autónomo de alta velocidad— introduce una complejidad adicional al requerir decisiones de control en tiempo real que garanticen estabilidad dinámica, seguridad operacional y eficiencia energética.

En este contexto, el **Control Predictivo Basado en Modelo** surge como un enfoque idóneo para gestionar entornos dinámicos y parcialmente estructurados. A diferencia de los controladores convencionales basados en retroalimentación lineal o no lineal clásica, el MPC aprovecha un modelo dinámico del sistema para predecir su evolución futura y optimizar las acciones de control dentro de un horizonte temporal, considerando simultáneamente restricciones físicas, operativas y de seguridad. Entre sus ventajas destacan:

- Anticipación del comportamiento futuro del UAV.
- Incorporación explícita de restricciones de estado y entrada.
- Optimización del desempeño mediante criterios de costo definidos.
- Integración natural con restricciones de CBF y CLF para mejorar la seguridad y robustez.

A medida que aumentan las exigencias del entorno y la maniobrabilidad requerida, las formulaciones predictivas evolucionan hacia su versión no lineal: el **Control Predictivo No Lineal**. Esta variante permite representar con mayor fidelidad la dinámica del cuadricóptero, pero introduce desafíos principales:

- Necesidad de modelos dinámicos precisos y representativos.
- Resolución de problemas de optimización computacionalmente intensivos.
- Implementación eficiente en tiempo real en hardware limitado.
- Traducción del modelo formal en fuerzas y torques hacia variables practicables para el dron, como velocidades lineales, velocidades angulares y actitudes deseadas.

En paralelo a los modelos formales, esta tesis incorpora técnicas de identificación basadas en datos con el fin de construir modelos híbridos capaces de capturar dinámicas no modeladas. En particular, se emplean dos enfoques:

- **DMDc**: técnica de identificación lineal discreta que extrae las dinámicas dominantes del sistema e incluye explícitamente las entradas de control, permitiendo obtener modelos de baja dimensión adecuados para formulaciones predictivas.
- **SINDy**: método de identificación no lineal que busca ecuaciones dinámicas parsimoniosas mediante regresión dispersa sobre una biblioteca de funciones candidatas, lo que permite incorporar términos no lineales relevantes al modelo nominal.

Estos modelos híbridos —descritos de forma detallada en el Capítulo 3— se integran posteriormente en las formulaciones de control predictivo lineal y no lineal desarrolladas en esta tesis.

Las bases de esta investigación se apoyan en la experiencia previa desarrollada en la tesis de maestría del autor, titulada *"Una Metodología para el Control y Simulación de Cuadricópteros"*. En el presente trabajo, se retoman y extienden los desafíos identificados, abordando experimentalmente nuevas líneas de investigación y utilizando los cuadricópteros disponibles en el Instituto de Automática (INAUT) de la Universidad Nacional de San Juan.

En síntesis, el propósito de esta tesis es avanzar hacia estrategias de control predictivo capaces de operar eficazmente en escenarios con incertidumbre, restricciones y condiciones cambiantes. Su aporte radica en el diseño, implementación y validación experimental de controladores avanzados que permitan mejorar la precisión, estabilidad y robustez de los UAV, contribuyendo así al desarrollo del campo de la robótica aérea moderna.

1.2. Descripción de los objetivos

1.2.1. Objetivo General

- Desarrollar estrategias de control predictivo basado en modelo para cuadricópteros mediante la integración de modelos híbridos, con

el fin de mejorar la precisión del seguimiento de trayectorias y garantizar robustez y estabilidad ante variaciones en la dinámica del sistema y del entorno.

1.2.2. Objetivos Específicos

- Realizar una revisión exhaustiva del estado del arte en modelado, identificación y control de cuadricópteros, consolidando los fundamentos teóricos y prácticos necesarios para sustentar el desarrollo de estrategias de control predictivo avanzadas.

- Desarrollar un modelo híbrido del sistema aéreo que combine formulaciones teóricas (lineales y no lineales) con técnicas de identificación basadas en datos, permitiendo capturar tanto la dinámica nominal como efectos no modelados.

- Implementar en tiempo real un esquema NMPC para seguimiento de trayectorias, incorporando restricciones físicas, operativas y de seguridad, y evaluando su desempeño experimental en escenarios dinámicos reales.

- Diseñar un controlador predictivo robusto y adaptativo capaz de compensar perturbaciones externas y dinámicas no modeladas mediante observadores y mecanismos de actualización en línea, mejorando la robustez del UAV en entornos no estructurados.

- Desarrollar e implementar un esquema MPCC para tareas de seguimiento de trayectorias curvas o parametrizadas, minimizando errores de contorno y arrastre e integrando funciones de barrera y funciones de Lyapunov para mejorar la seguridad y estabilidad en entornos dinámicos.

- Extender la estrategia predictiva a un manipulador aéreo compuesto por un cuadricóptero y un brazo manipulador, formulando un problema de control óptimo que incorpore objetivos simultáneos de seguimiento de trayectorias y control de configuración interna.

1.3. Antecedentes

En la literatura especializada se encuentran numerosas perspectivas relacionadas con el control y la navegación de los UAV [1, 2]. Entre ellos, los cuadricópteros han sido ampliamente adoptados en aplicaciones de robótica aérea debido a su maniobrabilidad, simplicidad estructural y capacidad de despegue y aterrizaje vertical. Además, su versatilidad ha permitido su utilización en sectores civiles como entretenimiento, industria, agricultura, inspección y transporte [3, 4, 5, 6, 7, 8].

En los años recientes, diversos trabajos han demostrado el éxito de estas plataformas en tareas avanzadas como detección e interacción con el entorno [9, 10, 11, 12], entrega autónoma [13, 14] y exploración en entornos desconocidos [15, 16, 17, 18]. En este marco, un objetivo central ha sido lograr un **seguimiento preciso de trayectorias**, tarea esencial en aplicaciones autónomas [19, 20].

La trayectoria de referencia suele ser generada por un planificador que define posiciones, velocidades y orientaciones deseadas. Las estrategias de control tradicionales del tipo lineal y no lineal buscan estabilizar el error de posición mediante análisis instantáneos. Sin embargo, estos enfoques son frecuentemente insuficientes en escenarios con fuertes no linealidades, restricciones de estado, perturbaciones externas o maniobras agresivas.

El cuadricóptero ha logrado convertirse en una plataforma ideal para investigación gracias a su alta agilidad, simplicidad mecánica y capacidad para ejecutar maniobras rápidas. Para misiones como rescate, búsqueda o transporte cercano a obstáculos, se requiere un control extremadamente preciso y robusto. En estos casos, pequeñas desviaciones pueden generar fallas críticas, razón por la cual se han propuesto diferentes estructuras de control. No obstante, como se discute más adelante, solo algunos enfoques logran manejar simultáneamente la dinámica no lineal, las incertidumbres y las restricciones de control presentes en entornos no estructurados.

1.3.1. UAV Cuadricóptero

La configuración del hardware de un cuadricóptero típico incluye los elementos esenciales para operar en entornos reales. El UAV utilizado en esta tesis es un DJI Matrice 100 (M100), ampliamente empleado en investigación debido a su modularidad y a la accesibilidad de sus señales internas.

Un cuadricóptero estándar está compuesto por motores *brushless* de corriente continua y hélices montadas en los extremos de sus brazos de fibra de carbono. El controlador de vuelo procesa información proveniente de una conjunto de sensores (giroscopios, magnetómetro, barómetro y GPS) y genera señales hacia los controladores electrónicos de velocidad, los cuales ajustan las revoluciones por minuto de cada motor para producir el movimiento deseado. La Figura 1.1 muestra el UAV empleado.

Figura 1.1: UAV Matrice 100 utilizado en esta tesis.

El movimiento vertical se logra modulando la fuerza total generada por las hélices. Como se ilustra en la Figura 1.2:

- **Hover**: fuerza total igual al peso.
- **Ascenso**: fuerza total mayor que el peso.
- **Descenso**: fuerza total menor que el peso.

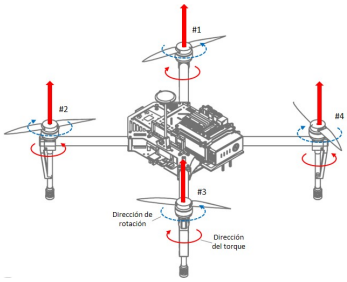
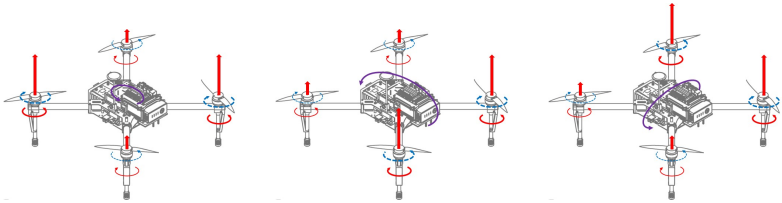


Figura 1.2: Dinámica básica del movimiento vertical del UAV.

Para el movimiento horizontal y la orientación, el cuadricóptero ajusta diferentes combinaciones de velocidades de sus motores, generando los momentos de actitud necesarios. Estos movimientos se ilustran en la Figura 1.3:

- **Guiñada (yaw)**: diferencia entre pares de motores que giran en sentidos opuestos.
- **Cabeceo (pitch)**: mayor empuje en la parte trasera o delantera.
- **Alabeo (roll)**: mayor empuje en lado derecho o izquierdo.



(a) Guiñada (b) Cabeceo (c) Alabeo

Figura 1.3: Movimientos fundamentales de actitud del UAV.

El M100 funciona con baterías LiPo 6S (TB47D/TB48D), ofreciendo puertos de energía adicionales para módulos experimentales. Esta capacidad es crucial para la integración de sensores externos utilizados en los experimentos de la presente tesis.

1.3.2. Control de bajo nivel

El cuadricóptero utilizado en esta tesis cuenta con un subsistema de control de vuelo interno encargado de estabilizar la actitud y regular la fuerza total aplicada por los motores. Aunque este trabajo no modifica dicho subsistema, resulta útil mostrar su estructura para comprender cómo interactúan las referencias generadas por el controlador de alto nivel con los lazos internos del UAV.

La Figura 1.4 ilustra el flujo general de señales en el control de bajo nivel. Las variables mostradas corresponden a la arquitectura interna del controlador de vuelo, y se interpretan de forma general del siguiente modo:

- $\mathbf{p}_d$: posición deseada.
- ψ_d: guiñada deseada.
- f_d: fuerza total requerida para cumplir la referencia.
- ϕ_d, θ_d: ángulos de actitud deseados (roll y pitch).
- $\boldsymbol{\tau}_d$: momentos requeridos para seguir la actitud deseada.
- $\bar{\omega}_{d,k}$: velocidades angulares deseadas para cada motor.
- $\sigma_{d,k}$: señales de comando enviadas a los controladores electrónicos de velocidad.

Estas variables se muestran únicamente para contextualizar el funcionamiento del controlador interno del UAV. No forman parte de la formulación matemática desarrollada en esta tesis y, cuando sea pertinente, las variables empleadas en los capítulos posteriores se definirán nuevamente de forma coherente con los modelos y controladores propuestos.

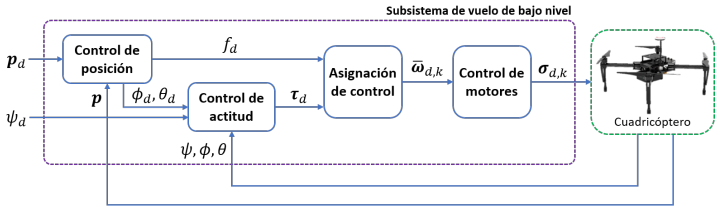


Figura 1.4: Lazo de control de bajo nivel del UAV utilizado.

1.4. Consideraciones computacionales y de hardware

El desempeño de un controlador predictivo depende no solo de la precisión del modelo dinámico y del diseño matemático del esquema de optimización, sino también de la capacidad computacional del *hardware* donde se ejecuta. En esta tesis, todo el proceso de control avanzado se implementa *onboard*, utilizando una *NVIDIA Jetson Orin NX* (16 GB), equipada con CPU ARM de alto rendimiento y una GPU basada en arquitectura Ampere, lo cual permite ejecutar algoritmos de optimización en tiempo real de forma fiable.

La elección de este *hardware* está motivada por tres factores principales:

1. **Ejecución en tiempo real del NMPC**: Debido a la naturaleza no lineal del modelo del UAV y a la inclusión de restricciones físicas y operativas, la resolución del problema de optimización requiere capacidades de cómputo elevadas. La Jetson Orin NX permite mantener horizontes de predicción suficientemente largos y discretizaciones finas sin comprometer el tiempo de muestreo.

2. **Compatibilidad con solvers modernos**: El controlador desarrollado en esta tesis se implementa utilizando **CasADi** y el solver de optimización **ACADOS**, herramientas diseñadas para generar código altamente eficiente y ejecutable en arquitecturas embarcadas. La Orin NX admite compilación acelerada y ejecución de estos módulos, asegurando una operación estable durante los experimentos.

3. **Integración directa con sensores y módulos externos**: La plataforma permite el procesamiento simultáneo de datos provenientes de sensores del UAV, módulos de comunicación y telemetría, garantizando la coherencia temporal entre mediciones, predicciones y ejecución del control.

La naturaleza embarcada del sistema impone también consideraciones importantes en el diseño del controlador predictivo, entre ellas:

- **Limitaciones del tiempo de muestreo**: el controlador debe garantizar que la solución del problema de optimización en cada instante se obtenga dentro del intervalo disponible para garantizar la estabilidad.

Esto influye directamente en la elección del horizonte de predicción, el paso de integración y la complejidad del modelo utilizado.

- **Balance entre fidelidad del modelo y costo computacional**: aunque los modelos no lineales completos representan mejor la dinámica real del UAV, su resolución puede ser costosa. Por esta razón, en esta tesis se consideran tanto formulaciones lineales y no lineales como modelos híbridos (analíticos + basados en datos) que permiten reducir el esfuerzo computacional manteniendo estabilidad y precisión.

- **Robustez frente a fallos computacionales**: la implementación considera mecanismos básicos de monitoreo del tiempo de cómputo y de saturación de recursos, permitiendo detectar si una iteración del controlador excede el tiempo límite y evitando la aplicación de comandos potencialmente inestables.

Estas consideraciones establecen el marco técnico necesario para la implementación experimental que se desarrolla en capítulos posteriores, y responden directamente a la necesidad de justificar la **factibilidad computacional** del controlador, aspecto señalado en evaluaciones previas del manuscrito original.

1.5. Estado del arte

El problema del control de cuadricópteros en entornos no estructurados se puede dividir en dos categorías:

1. **Controladores de Retroalimentación no predictivos**: Utilizan formulaciones de control lineal y no lineal explotando la estructura del modelo del sistema para diseñar leyes de control que garanticen la estabilidad del sistema y la ejecución de las tareas deseadas. Sin embargo, estas técnicas no manejan las restricciones del sistema, como las limitaciones en las acciones de control, ignoran las decisiones futuras y las formulaciones no son triviales para sistemas complejos. Además, estas formulaciones no han logrado un control eficiente en trayectorias ágiles como el NMPC [21, 22].

2. **Controladores Predictivos**: Consideran múltiples referencias futuras en el esquema de control en el momento en que se ejecuta el algoritmo. Utilizan el modelo del sistema para generar una política de control óptima que garantiza la ejecución de la tarea deseada minimizando un índice de rendimiento y considerando las restricciones del sistema de manera predictiva.

Los enfoques de control óptimo han logrado avances significativos, permitiendo aprovechar completamente las capacidades del cuadricóptero y la potencia computacional disponible. En particular, el control predictivo de modelos no lineales ha recibido una atención destacada en aplicaciones de cuadricópteros, impulsado por recientes avances en *hardware* y algoritmos. Estos desarrollos han facilitado la ejecución de tales formulaciones con alta eficiencia computacional [23, 24, 21, 25].

Debido a los avances en la capacidad computacional de los ordenadores, se ha observado un crecimiento significativo en la aplicación del control óptimo en sistemas que requieren respuestas rápidas y ágiles. Este enfoque permite obtener soluciones más eficientes y precisas para el control de sistemas críticos y de carácter agresivo, como lo expone [26], donde aborda el desafío de planificar trayectorias óptimas en tiempo para cuadricópteros mediante el uso de MPC al mismo tiempo que propone una solución que optimiza tanto la asignación de tiempo como la trayectoria misma, permitiendo un mejor aprovechamiento del potencial del actuador del cuadricóptero.

Los controladores de seguimiento de trayectoria han sido desarrollados durante la última década por un gran número de institutos de investigación alrededor del mundo. La literatura de control clásico generalmente considera desviaciones de ángulo ligeras, que garantizan el vuelo estacionario o casi estacionario a lo largo de la ejecución de la trayectoria. Sin embargo, las suposiciones habituales de vuelo estacionario no son suficientes para entornos de condiciones críticas, donde las no linealidades aparecen como uno de los primeros problemas a tratar. Las formulaciones de control no lineal permiten el diseño de algoritmos capaces de mitigar problemas asociados con entornos congestionados, como no linealidades y robustez. Por esta razón, algunos trabajos utilizan control de retroalimentación no lineal [27], linealización de retroalimentación [28, 29], y control no lineal robusto [30, 31, 32]. Además, se utilizan cuaterniones para evitar singularidades presentadas en el modelo matemático utilizando la formulación de ángulos

de Euler de vehículos aéreos [33]. Generalmente, estas formulaciones no pueden manejar restricciones de estados o entradas de control, como limitaciones en la velocidad, aceleración, posición o esfuerzo, lo cual puede limitar su capacidad para garantizar un desempeño óptimo en situaciones donde tales restricciones son fundamentales para la seguridad o eficacia del sistema.

El MPC ha presentado propiedades de precisión y robustez sobresalientes entre los múltiples enfoques aplicados en el seguimiento de trayectoria de cuadricópteros, por lo que esta formulación se ha considerado en numerosos artículos para demostrar algunas propiedades importantes en el control avanzado de UAV. Debido a la naturaleza predictiva de su formulación, es posible generar la política de control optimizando los estados de referencia y las restricciones al mismo tiempo, lo que es beneficioso porque la mayoría de los sistemas presentan limitaciones en sus estados y acciones de control. De la misma manera, los comandos de control podrían generarse minimizando el error de seguimiento en el horizonte de tiempo predicho mediante la resolución de problemas de optimización restringidos, con resultados exitosos en aplicaciones [23, 24, 34].

Sin embargo, las formulaciones de MPC pueden ser computacionalmente demandantes al punto de cuestionar su aplicación en comparación con los controladores de retroalimentación de referencia, como la cinemática diferencial inversa y la compensación dinámica inversa, donde estas formulaciones han presentado desarrollos exitosos en el campo de la robótica [35, 36]. Por esta razón, el control predictivo de modelos lineales se adopta generalmente en muchos trabajos, donde las no linealidades se simplifican utilizando aproximaciones lineales bajo suposiciones de pequeñas variaciones de ángulo [28]. Gracias a los avances recientes en tecnología y los nuevos solucionadores de optimización [37], muchos trabajos comenzaron a utilizar dinámicas no lineales, explotando las capacidades de los cuadricópteros [23, 24]. Aunque las formulaciones NMPC [38] son realizables en computadoras modernas, los autores aún requieren significativamente más recursos computacionales que los esquemas no predictivos como la cinemática diferencial inversa y la compensación dinámica inversa. Por lo tanto, NMPC puede experimentar problemas de convergencia numérica asociados con las capacidades computacionales.

La literatura evidencia el desarrollo de UAV autónomos con la integración del MPC para mejorar el rendimiento de seguimiento de trayectorias, en particular empleando su variante NMPC [39]. La navegación basada

en MPC [40] y los enfoques explícitos de MPC [41] validan aún más la adaptabilidad y efectividad del modelo en aplicaciones del mundo real, como entornos restringidos, subrayando su potencial para mejorar las capacidades operativas de los UAV en diversas condiciones y tareas. Los NMPC también ofrecen una solución a la preocupación por la eficiencia energética, con un consumo reducido en sistemas de cuadricópteros [42] y destacando la importancia de la eficiencia de implementación en tiempo real [43]. La carga computacional sigue siendo un factor importante para mantener un control efectivo de experimentos con NMPC [39].

CAPÍTULO 2

Preliminares matemáticos

2 Preliminares matemáticos

2.1. Introducción

Con el fin de describir la actitud y posición de un multicóptero, es necesario establecer marcos de coordenadas apropiados. Los marcos de coordenadas son útiles para establecer la relación entre variables dinámicas, facilitando así los cálculos. En este capítulo, se considera al multicóptero como un cuerpo rígido cuya actitud en el espacio describe principalmente la rotación entre el marco de referencia del cuerpo $\langle \mathbb{B} \rangle$ y el marco de referencia inercial $\langle \mathbb{I} \rangle$. Existen muchos métodos para representar la actitud, y cada método tiene sus ventajas y desventajas. Este capítulo presentará los ángulos de Euler, la matriz de rotación y los cuaterniones, así como la relación entre la tasa de actitud correspondiente y la velocidad angular del cuerpo. Diferentes métodos de representación de la actitud corresponden a diferentes métodos de modelado, que están estrechamente relacionados con los métodos control de vuelo. Comprender profundamente los marcos de coordenadas y la representación de la actitud es útil para comprender los movimientos de un cuadricóptero y, posteriormente, para diseñar controladores avanzados. El objetivo de este capítulo es explorar los tres métodos de representación de la actitud y comprender la relación entre sus derivadas y la velocidad angular del cuerpo de la aeronave.

Convenciones y notación

Antes de presentar las diferentes representaciones de orientación y los operadores matemáticos empleados en este capítulo, se introduce la Tabla 2.1, la cual reúne las convenciones y símbolos utilizados a lo largo del desarrollo teórico. Su inclusión permite mantener claridad y consistencia en la interpretación de las variables fundamentales empleadas en el modelado cinemático y dinámico del UAV, evitando ambigüedades y facilitando la lectura del capítulo.

Tabla 2.1: Convenciones y notación empleadas en el modelo matemático

Símbolo	Descripción
$\langle \mathbb{I} \rangle$	Marco de referencia inercial (Earth frame).
$\langle \mathbb{B} \rangle$	Marco de referencia del cuerpo del UAV (Body frame).
$\mathbf{e}_i$	Vectores unitarios del marco inercial.
${}^{e}\mathbf{b}_i$	Vectores del cuerpo expresados en el marco inercial.
${}^{b}\mathbf{b}_i$	Vectores del cuerpo expresados en el marco del cuerpo.
$\mathbf{R}_b^e$	Matriz de rotación del cuerpo al marco inercial.
$\mathbf{R}_x(\phi)$	Rotación elemental alrededor del eje x.
$\mathbf{R}_y(\theta)$	Rotación elemental alrededor del eje y.
$\mathbf{R}_z(\psi)$	Rotación elemental alrededor del eje z.
ϕ	Ángulo de alabeo (*roll*).
θ	Ángulo de cabeceo (*pitch*).
ψ	Ángulo de guiñada (*yaw*).
$\boldsymbol{\Theta}$	Vector de ángulos de Euler.
$\dot{\boldsymbol{\Theta}}$	Velocidad de actitud.
${}^{b}\boldsymbol{\omega}$	Velocidad angular en el marco del cuerpo.
$\mathbf{W}_\Theta$	Matriz que relaciona $\dot{\boldsymbol{\Theta}}$ con ${}^{b}\boldsymbol{\omega}$.
$(\cdot)_\times$	Operador antisimétrico asociado a $\mathfrak{so}(3)$.
$\dot{\mathbf{R}}$	Derivada temporal de la matriz de rotación.
$\mathbf{q}$	Cuaternión unitario (representación de actitud).
$\mathbf{q}^*$	Cuaternión conjugado.
$\exp(\cdot)$	Mapeo exponencial en $SO(3)$ o en cuaterniones.
$\log(\cdot)$	Mapeo logarítmico asociado al espacio tangente.

2.2. Marco de Coordenadas

Todos los marcos de coordenadas utilizados en esta tesis, así como la dirección positiva de los ángulos definidos posteriormente, siguen la regla de la mano derecha. Esta regla establece que el dedo índice señala la

dirección positiva del eje x, el dedo medio la dirección positiva del eje y, y el pulgar la dirección positiva del eje z. Como se muestra en la Fig. 2.1, para determinar la dirección positiva de una rotación, el pulgar señala la dirección positiva del eje de rotación y la curvatura de los dedos indica la dirección positiva de la rotación.

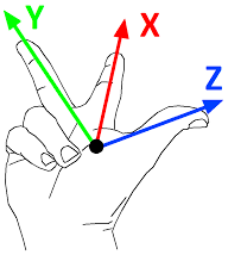


Figura 2.1: Ley de la mano derecha

Para establecer la orientación de los marcos de referencia, se definen los siguientes vectores unitarios inerciales:

$$\mathbf{e}_1 \triangleq \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 \triangleq \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 \triangleq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

2.2.1. Marco de referencia inercial

El marco de referencia inercial $o_e x_e y_e z_e$ se utiliza para describir los estados dinámicos del multicóptero respecto a la superficie de la Tierra y determinar su posición tridimensional (3D). El eje $o_e x_e$ apunta hacia adelante en el plano horizontal, el eje $o_e y_e$ apunta hacia la izquierda siguiendo la regla de la mano derecha y el eje $o_e z_e$ apunta hacia arriba, perpendicular al plano de vuelo.

En el marco inercial $\langle \mathbb{I} \rangle$, los vectores unitarios asociados a los ejes $o_e x_e$, $o_e y_e$ y $o_e z_e$ se expresan como $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ y $\mathbf{e}_3$, respectivamente.

2.2.2. Marco de referencia del cuerpo

El marco de referencia del cuerpo $o_b x_b y_b z_b$ está fijo al cuadricóptero. El centro de gravedad (CoG) del vehículo se toma como origen o_b. El eje $o_b x_b$

apunta hacia la parte frontal del dron, el eje $o_b y_b$ apunta hacia la izquierda del dron, y el eje $o_b z_b$ apunta hacia arriba, todos siguiendo la regla de la mano derecha.

En el marco del cuerpo $\langle \mathbb{B} \rangle$, los vectores unitarios se expresan como:

$$^b\mathbf{b}_1 = \mathbf{e}_1, \qquad ^b\mathbf{b}_2 = \mathbf{e}_2, \qquad ^b\mathbf{b}_3 = \mathbf{e}_3.$$

En el marco inercial $\langle \mathbb{I} \rangle$, los mismos vectores —pero expresados ahora en el sistema inercial— se denotan como $^e\mathbf{b}_1$, $^e\mathbf{b}_2$ y $^e\mathbf{b}_3$, respectivamente.

2.3. Ángulos de Euler

Los ángulos de Euler constituyen una representación intuitiva y ampliamente utilizada para describir la actitud de un UAV. En este trabajo se adopta la convención estándar en robótica, donde las rotaciones se interpretan como **rotaciones activas aplicadas a vectores expresados en un marco fijo**. Bajo esta convención, la rotación positiva alrededor de cada eje sigue la regla de la mano derecha y las transformaciones se implementan mediante matrices que actúan directamente sobre los vectores.

Según el teorema de Euler, la orientación del cuerpo rígido puede representarse como la composición de tres rotaciones finitas. En esta tesis se emplea la secuencia Z–Y–X, correspondiente a las rotaciones de *guiñada* ψ, *cabeceo* θ y *alabeo* ϕ. La Fig. 2.2 muestra estos ángulos en el UAV.

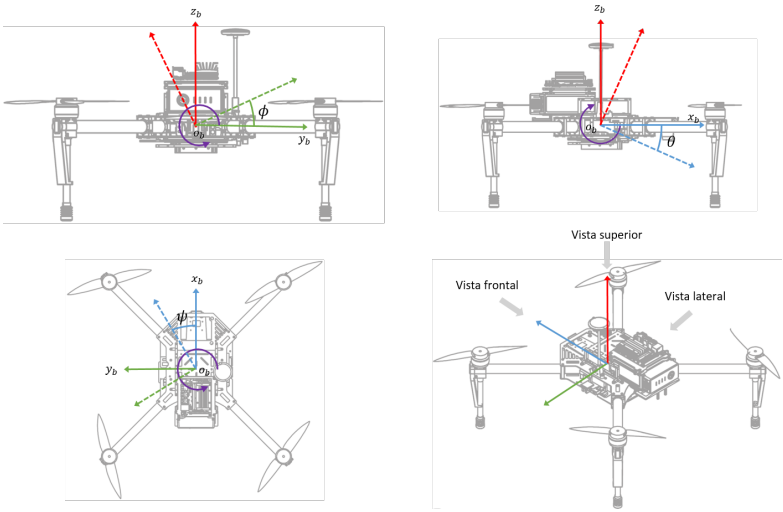


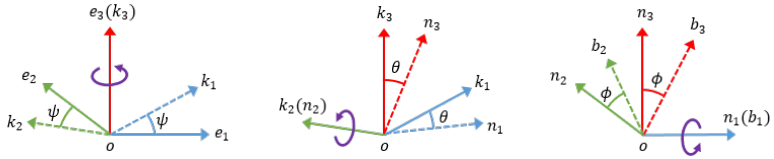
Figura 2.2: Ángulos de Euler en el cuadricóptero

La rotación desde el marco inercial $\langle \mathbb{I} \rangle$ al marco del cuerpo $\langle \mathbb{B} \rangle$ se obtiene aplicando las siguientes transformaciones elementales:

1. **Guiñada** (ψ): rotación activa alrededor del eje z inercial. Es positiva cuando el dron gira en sentido antihorario visto desde arriba.

2. **Cabeceo** (θ): rotación activa alrededor del eje y del marco intermedio. Es positiva cuando el morro del dron asciende.

3. **Alabeo** (ϕ): rotación activa alrededor del eje x del marco final. Es positiva cuando el vehículo se inclina hacia la derecha.



(a) Ángulo de guiñada (b) Ángulo de cabeceo (c) Ángulo de alabeo

Figura 2.3: Movimiento de actitud del UAV

Matrices de rotación elementales

Con la convención descrita, las matrices de rotación activas empleadas son:

$$\mathbf{R}_z(\psi) = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R}_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R}_x(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}.$$

Bajo la convención de rotaciones activas —que rotan vectores del marco del cuerpo hacia el marco inercial—, la matriz de actitud está dada por:

$$\mathbf{R}_b^e = \mathbf{R}_z(\psi)\,\mathbf{R}_y(\theta)\,\mathbf{R}_x(\phi).$$

Esta matriz transforma vectores según:

$${}^e\mathbf{v} = \mathbf{R}_b^e\,{}^b\mathbf{v}.$$

Relación entre velocidades de actitud y velocidad angular

La velocidad angular del cuerpo es:

$$ {}^{b}\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}. $$

A partir de la composición Z–Y–X, la relación entre $\dot{\boldsymbol{\Theta}} = [\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}]^\top$ y ${}^{b}\boldsymbol{\omega}$ se obtiene como:

$$ {}^{b}\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin\theta \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi\cos\theta \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi\cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}. $$

En forma compacta:

$$ {}^{b}\boldsymbol{\omega} = \mathbf{W}_\Theta \, \dot{\boldsymbol{\Theta}}, $$

donde:

$$ \mathbf{W}_\Theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin\theta \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi\cos\theta \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi\cos\theta \end{bmatrix}. $$

La inversión de esta relación es:

$$ \dot{\boldsymbol{\Theta}} = \mathbf{W}_\Theta^{-1} \, {}^{b}\boldsymbol{\omega}, $$

$$ \mathbf{W}_\Theta^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \sin\phi\tan\theta & \cos\phi\tan\theta \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi/\cos\theta & \cos\phi/\cos\theta \end{bmatrix}. $$

Como en cualquier representación basada en ángulos de Euler, aparece la singularidad cuando $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$ (*gimbal lock*), lo que motiva el uso de representaciones alternativas como cuaterniones.

2.4. Matriz de rotación

De acuerdo con la definición de ángulos de Euler presentada en la sección anterior, la rotación desde el $\langle \mathbb{I} \rangle$ al $\langle \mathbb{B} \rangle$ se obtiene mediante la composición de tres rotaciones elementales aplicadas de forma secuencial alrededor de los ejes del marco rotante. Este proceso puede describirse como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathbf{R}_z(\psi)} \begin{bmatrix} \mathbf{k}_1 \\ \mathbf{k}_2 \\ \mathbf{k}_3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathbf{R}_y(\theta)} \begin{bmatrix} \mathbf{n}_1 \\ \mathbf{n}_2 \\ \mathbf{n}_3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathbf{R}_x(\phi)} \begin{bmatrix} {}^e\mathbf{b}_1 \\ {}^e\mathbf{b}_2 \\ {}^e\mathbf{b}_3 \end{bmatrix},$$

La matriz de rotación satisface las relaciones:

$${}^e\mathbf{b}_1 = \mathbf{R}_b^e\, \mathbf{e}_1, \qquad {}^e\mathbf{b}_2 = \mathbf{R}_b^e\, \mathbf{e}_2, \qquad {}^e\mathbf{b}_3 = \mathbf{R}_b^e\, \mathbf{e}_3.$$

Por lo tanto, la matriz de rotación se define como:

$$\mathbf{R}_b^e \triangleq \begin{bmatrix} {}^e\mathbf{b}_1 & {}^e\mathbf{b}_2 & {}^e\mathbf{b}_3 \end{bmatrix}, \tag{2.1}$$

donde $\mathbf{R}_b^e \in SO(3) \triangleq \{\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \mid \mathbf{R}^\top \mathbf{R} = \mathbf{I}_3,\ \det(\mathbf{R}) = 1\}$.

La matriz de rotación desde el marco del cuerpo al marco inercial está dada por:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_b^e =& (\mathbf{R}_e^b)^{-1} \\ =& \mathbf{R}_x^\top(\phi)\, \mathbf{R}_y^\top(\theta)\, \mathbf{R}_z^\top(\psi) \\ =& \begin{bmatrix} C_\psi C_\theta & -S_\psi C_\phi + C_\psi S_\theta S_\phi & S_\psi S_\phi + C_\psi C_\phi S_\theta \\ S_\psi C_\theta & C_\psi C_\phi + S_\psi S_\theta S_\phi & -C_\psi S_\phi + S_\psi C_\phi S_\theta \\ -S_\theta & C_\theta S_\phi & C_\theta C_\phi \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

A partir de la matriz de rotación, los ángulos (ϕ, θ, ψ) pueden recuperarse como:

$$\psi = \operatorname{atan2}(R_{21},\, R_{11}), \tag{2.2}$$

$$\theta = -\arcsin(R_{31}), \tag{2.3}$$

$$\phi = \operatorname{atan2}(R_{32},\, R_{33})\,. \tag{2.4}$$

Los rangos naturales de $\arctan(\cdot)$ y $\arcsin(\cdot)$ son $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Sin embargo, durante maniobras agresivas los ángulos pueden pertenecer a rangos extendidos, por lo que estas expresiones deben interpretarse considerando las simetrías trigonométricas.

La representación mediante ángulos de Euler presenta una singularidad cuando $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$, donde $\cos\theta = 0$. En este caso, los ángulos de roll y yaw se vuelven indistinguibles entre sí, produciendo la conocida singularidad *gimbal lock*.

Relación entre $\dot{\mathbf{R}}$ y ${}^{b}\boldsymbol{\omega}$

Sea ${}^{e}\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ un vector fijo en el cuerpo rígido. Su derivada temporal en el marco inercial satisface:

$$\frac{d^{e}\mathbf{r}}{dt} = {}^{e}\boldsymbol{\omega} \times {}^{e}\mathbf{r}, \tag{2.5}$$

donde $\times$ denota el producto cruz. Aplicando esta relación a las columnas de la matriz de rotación se obtiene:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} {}^{e}\mathbf{b}_1 & {}^{e}\mathbf{b}_2 & {}^{e}\mathbf{b}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{e}\boldsymbol{\omega} \times {}^{e}\mathbf{b}_1 & {}^{e}\boldsymbol{\omega} \times {}^{e}\mathbf{b}_2 & {}^{e}\boldsymbol{\omega} \times {}^{e}\mathbf{b}_3 \end{bmatrix}. \tag{2.6}$$

Utilizando que ${}^{e}\boldsymbol{\omega} = \mathbf{R}_b^e\, {}^{b}\boldsymbol{\omega}$, la ecuación anterior se reescribe como:

$$\frac{d\mathbf{R}_b^e}{dt} = \mathbf{R}_b^e \left[{}^{b}\boldsymbol{\omega}\right]_\times, \tag{2.7}$$

donde la matriz antisimétrica asociada a ${}^{b}\boldsymbol{\omega}$ está dada por:

$$\left[{}^{b}\boldsymbol{\omega}\right]_\times = \begin{bmatrix} 0 & -{}^{b}\omega_z & {}^{b}\omega_y \\ {}^{b}\omega_z & 0 & -{}^{b}\omega_x \\ -{}^{b}\omega_y & {}^{b}\omega_x & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.8}$$

2.5. Cuaterniones

En la teoría de control y la robótica, la representación de la orientación o actitud de un cuerpo rígido en tres dimensiones es fundamental. Si bien las representaciones clásicas mediante ángulos de Euler son intuitivas, presentan problemas de singularidad —como el *gimbal lock*, que ocurre para valores de *pitch* cercanos a $\pm\pi/2$—. Los cuaterniones ofrecen una alternativa robusta y eficiente para representar rotaciones tridimensionales, evitando estas singularidades y proporcionando una estructura algebraica adecuada para control y estimación.

Un cuaternión $\mathbf{q}$ es un elemento del álgebra no conmutativa de cuaterniones, denotada por $\mathbb{H}$. Puede expresarse como

$$\mathbf{q} = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}, \qquad q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R},$$

donde q_0 es la parte escalar y $q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}$ es la parte vectorial. Las unidades $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ satisfacen

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -1,$$

$$\mathbf{ij} = \mathbf{k}, \qquad \mathbf{jk} = \mathbf{i}, \qquad \mathbf{ki} = \mathbf{j}.$$

Estas relaciones muestran que la multiplicación de cuaterniones es no conmutativa.

La norma de un cuaternión es

$$\|\mathbf{q}\| = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}.$$

Un cuaternión es *unitario* si $\|\mathbf{q}\| = 1$, condición necesaria para que represente una rotación.

El cuaternión conjugado se define como

$$\mathbf{q}^* = q_0 - q_1\mathbf{i} - q_2\mathbf{j} - q_3\mathbf{k},$$

y satisface

$$\mathbf{q}\mathbf{q}^* = \|\mathbf{q}\|^2.$$

El cuaternión identidad es $\mathbf{q} = 1 + 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$ y representa la rotación nula.

Una propiedad fundamental es la *doble cobertura*: los cuaterniones $\mathbf{q}$ y $-\mathbf{q}$ representan la misma rotación, pues

$$\mathbf{q}\,\mathbf{v}\,\mathbf{q}^* = (-\mathbf{q})\,\mathbf{v}\,(-\mathbf{q})^*.$$

Esta propiedad debe considerarse especialmente en estimación e interpolación.

2.5.1. Rotación usando cuaterniones

Sea un eje de rotación unitario

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix}, \qquad \|\mathbf{u}\| = 1,$$

y un ángulo θ. El cuaternión unitario que representa esta rotación es

$$\mathbf{q} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \mathbf{u}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

Para un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ representado como cuaternión puro

$$\mathbf{v} = 0 + v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k},$$

la rotación resultante está dada por

$$\mathbf{v}' = \mathbf{q}\,\mathbf{v}\,\mathbf{q}^*.$$

El cuaternión unitario $\mathbf{q} = (q_0, q_1, q_2, q_3)$ se puede convertir en una matriz de rotación $\mathbf{R}(\mathbf{q}) \in SO(3)$ mediante

$$\mathbf{R}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 1-2(q_2^2+q_3^2) & 2(q_1q_2-q_0q_3) & 2(q_1q_3+q_0q_2) \\ 2(q_1q_2+q_0q_3) & 1-2(q_1^2+q_3^2) & 2(q_2q_3-q_0q_1) \\ 2(q_1q_3-q_0q_2) & 2(q_2q_3+q_0q_1) & 1-2(q_1^2+q_2^2) \end{bmatrix}.$$

2.5.2. Relación con el álgebra de Lie

El grupo de rotaciones tridimensionales $SO(3)$ está formado por matrices ortogonales de 3×3 con determinante uno. Su álgebra de Lie asociada,

$\mathfrak{so}(3)$, consiste en matrices antisimétricas y describe rotaciones infinitesimales.

El operador antisimétrico definido en (2.8), que asigna a un vector $\boldsymbol{\omega}$ la matriz $\boldsymbol{\omega}_\times \in \mathfrak{so}(3)$, permite relacionar las ecuaciones diferenciales de la cinemática rotacional con parametrizaciones finitas.

Los cuaterniones unitarios constituyen una parametrización alternativa de $SO(3)$, libre de singularidades. Su relación con $\mathfrak{so}(3)$ se establece mediante los mapeos exponencial y logarítmico.

Exponencial y logaritmo matricial en $SO(3)$

El mapeo exponencial $\exp : \mathfrak{so}(3) \to SO(3)$ está dado por

$$\mathbf{R} = \exp(\boldsymbol{\omega}_\times) = \mathbf{I} + \boldsymbol{\omega}_\times + \frac{(\boldsymbol{\omega}_\times)^2}{2!} + \frac{(\boldsymbol{\omega}_\times)^3}{3!} + \cdots .$$

El logaritmo inverso se expresa como

$$\log(\mathbf{R}) = \frac{\theta}{2\sin\theta}\left(\mathbf{R} - \mathbf{R}^\top\right),$$

donde

$$\theta = \arccos\left(\frac{\mathrm{tr}(\mathbf{R}) - 1}{2}\right).$$

Logaritmo y exponencial de cuaterniones

Para un vector angular $\boldsymbol{\omega}$ con norma $\theta = \|\boldsymbol{\omega}\|$, el cuaternión de rotación es

$$\mathbf{q} = \left[\cos\left(\tfrac{\theta}{2}\right),\ \mathbf{u}\sin\left(\tfrac{\theta}{2}\right)\right], \qquad \mathbf{u} = \boldsymbol{\omega}/\theta.$$

El logaritmo de un cuaternión unitario $\mathbf{q} = (q_0, \mathbf{q}_v)$ es

$$\log(\mathbf{q}) = \frac{\theta}{\|\mathbf{q}_v\|}\mathbf{q}_v, \qquad \theta = 2\arccos(q_0).$$

La velocidad angular equivalente se expresa como

$$\boldsymbol{\omega}_\times = 2\,\frac{\mathbf{q}_v}{\|\mathbf{q}_v\|}\arccos(q_0).$$

Estas herramientas permiten una descripción consistente de la actitud en $SO(3)$ y en espacio de cuaterniones, fundamentales en control, estimación y optimización de los UAV.

2.6. Consideraciones finales

Los métodos de representación de la actitud de un UAV en tres dimensiones, como los ángulos de Euler, las matrices de rotación y los cuaterniones, aportan distintas ventajas y limitaciones que los convierten en herramientas complementarias. En este capítulo, se han explorado estos tres métodos en el contexto de la navegación y control de UAV.

La Fig. 2.4 muestra la relación entre los tres enfoques de representación, destacando la flexibilidad de los cuaterniones en aplicaciones de control y navegación de los UAV. Su eficiencia, estructura algebraica y capacidad para evitar problemas de singularidad los convierten en la opción preferida para representar la actitud en aplicaciones de robótica aérea.

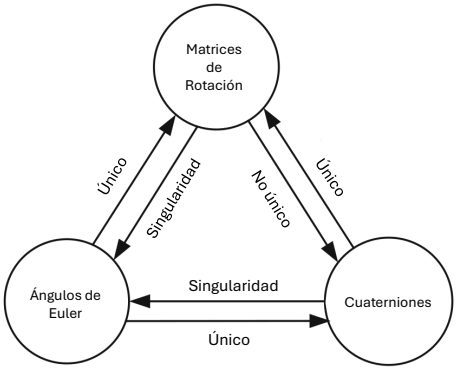


Figura 2.4: Relación entre ángulos de Euler, matriz de rotación y cuaterniones en la representación de la orientación de UAV

Los ángulos de Euler son útiles por su simplicidad y permiten una interpretación intuitiva de las rotaciones. Sin embargo, presentan problemas de singularidad (*gimbal lock*) en ciertas configuraciones, lo cual limita su aplicabilidad en maniobras complejas.

Las matrices de rotación, por otro lado, proporcionan una representación libre de singularidades y directa en términos de transformaciones lineales, aunque a costa de un mayor coste computacional debido a su tamaño y redundancia de parámetros.

Los cuaterniones, en cambio, ofrecen una solución eficiente y robusta,

evitando singularidades y facilitando interpolaciones suaves de la orientación. Además, su relación con el álgebra de Lie permite una transición fluida entre representaciones no lineales y lineales, lo que resulta esencial para el diseño de controladores avanzados que requieren precisión y estabilidad.

CAPÍTULO 3

Modelado matemático

3 Modelado matemático

3.1. Introducción

El presente capítulo introduce los conceptos fundamentales relacionados con la cinemática y dinámica de vehículos aéreos no tripulados, con un enfoque particular en los cuadricópteros.

Se establece un modelo matemático que permite describir el comportamiento dinámico de los cuadricópteros y comprender las fuerzas que afectan su movimiento. Este modelo es esencial para analizar su estabilidad y respuesta ante diferentes condiciones de operación.

Una característica distintiva de los cuadricópteros es la existencia de cuatro entradas de control independientes: empuje, momento de cabeceo, momento de balanceo y momento de guiñada. Estas entradas determinan su capacidad de maniobra, pero también requieren un tratamiento preciso para garantizar un control efectivo. Sin embargo, también pueden ser controlados a través de velocidades de maniobrabilidad, donde en lugar de definir directamente los momentos y el empuje, se especifican velocidades angulares y lineales deseadas, facilitando estrategias de control en ciertos escenarios.

El contenido de este capítulo proporciona la base necesaria para comprender los principios que rigen el vuelo y control de los cuadricópteros, sentando el fundamento para desarrollos posteriores en esta investigación.

Antes de avanzar con el desarrollo matemático, se presenta un resumen de las principales variables empleadas a lo largo de este capítulo. Si bien varias de ellas coinciden con notaciones definidas en secciones previas, se incluyen nuevamente con el fin de mantener claridad y consistencia. La Tabla 3.1 actúa así como una referencia rápida para evitar ambigüedades durante la transición entre los distintos modelos cinemáticos, dinámicos e identificados del UAV.

Tabla 3.1: Resumen de variables utilizadas en el capítulo

Símbolo	Descripción
$\boldsymbol{\eta}$	Pose del UAV en el marco inercial
$\boldsymbol{\nu}$	Velocidades de maniobrabilidad del UAV en el marco cuerpo
$\boldsymbol{\mu}$	Velocidades de referencia enviadas al controlador interno del UAV
ϕ	Ángulo de roll (alabeo)
θ	Ángulo de pitch (cabeceo)
ψ	Ángulo de yaw (guiñada)
$\boldsymbol{\Theta}$	Vector de ángulos de Euler (ϕ, θ, ψ)
$\boldsymbol{\omega}$	Velocidades angulares del UAV en el marco cuerpo
$\mathbf{R}$	Matriz de orientación del UAV (cuerpo a inercial)
$\mathbf{q}$	Cuaternión unitario que representa la orientación
q_w	Parte escalar del cuaternión
$\mathbf{q}_v$	Parte vectorial del cuaternión
$\otimes$	Operador de multiplicación de cuaterniones
f	Empuje total generado por las hélices
f_i	Empuje generado por el rotor i
${}^b\mathbf{T}$	Vector de empuje en el marco cuerpo
${}^e\mathbf{F}$	Fuerza total expresada en el marco inercial
g	Aceleración gravitatoria
m	Masa del UAV
$\boldsymbol{\tau}$	Vector de torques en el marco cuerpo
$\mathbf{I}_\omega$	Matriz de inercia del UAV
$\boldsymbol{\varrho}$	Coordenadas generalizadas $(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\Theta})$
$\boldsymbol{\mathcal{T}}$	Fuerzas y torques generalizados aplicados
$\boldsymbol{\mathcal{T}}_{PD}$	Fuerzas y torques generados por el controlador PD
$\mathbf{u}$	Vector de entradas (velocidad vertical, actitudes deseadas)
k_{p_z}, k_{d_z}	Ganancias PD del eje vertical
k_{p_ϕ}, k_{d_ϕ}	Ganancias PD de roll
$k_{p_\theta}, k_{d_\theta}$	Ganancias PD de pitch
k_{p_ψ}, k_{d_ψ}	Ganancias PD de yaw
$\bar{\mathbf{R}}$	Matriz de rotación expandida
$\bar{\mathbf{S}}_{(.)}$	Matrices diagonales del modelo completo identificado
ξ_i	Parámetros identificados del modelo completo
π_i	Parámetros identificados del modelo simplificado

3.2. Modelado de cuadricópteros

El modelado preciso de un cuadricóptero es fundamental para el desarrollo de algoritmos de control efectivos. Al diseñar un modelo, es crucial encontrar un equilibrio: un modelo excesivamente complejo puede dificultar la implementación de estrategias de control, mientras que uno demasiado simplificado podría no capturar con precisión la dinámica real del sistema, afectando su rendimiento.

Este trabajo se enfoca en un modelado de alto nivel, mientras que las tareas de control de bajo nivel son gestionadas por controladores de vuelo robustos, los cuales se encargan de aspectos como la asignación de control y el comportamiento de los propulsores. La Fig. 3.1 ilustra la estructura del modelo empleado.

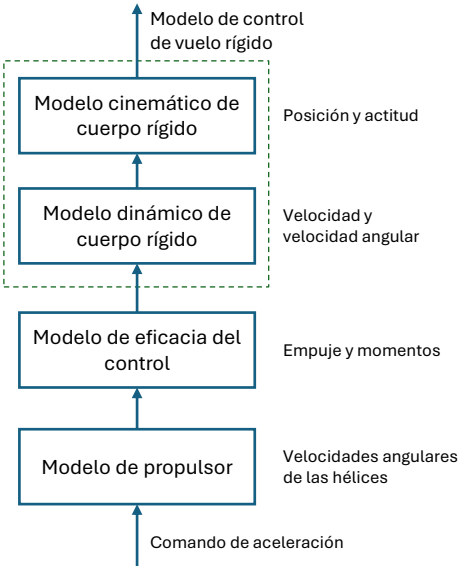


Figura 3.1: Esquema general de modelado de UAVs

- **Modelo cinemático de cuerpo rígido (alto nivel).** Este modelo describe el movimiento del vehículo en términos de posición, velocidad, actitud y velocidad angular sin considerar las fuerzas involucradas.

En el caso de los multicópteros, las entradas son la velocidad y la velocidad angular, mientras que las salidas son la posición y la actitud. Este modelo es crucial para planificar y controlar el movimiento del vehículo en un contexto de alto nivel, donde las decisiones estratégicas de navegación y seguimiento de trayectorias tienen lugar.

- **Modelo dinámico de cuerpo rígido (alto nivel).** Este modelo incluye tanto el movimiento como las fuerzas que lo generan, considerando la masa y los momentos de inercia del vehículo. Utiliza leyes como la segunda ley de Newton para estudiar cómo la fuerza de empuje y los momentos de control (cabeceo, alabeo y guiñada) afectan al sistema. Las salidas son la aceleración y la velocidad angular. Este modelo dinámico, junto con el cinemático, se emplea para los algoritmos de control de alto nivel, como los predictivos, permitiendo decisiones sobre la trayectoria y comportamiento deseado.

- **Modelo de eficacia del control (bajo nivel).** Este modelo es responsable de traducir las velocidades angulares de las hélices en fuerzas de empuje y momentos de control. Es parte del control de bajo nivel, donde se determinan las fuerzas físicas necesarias para ejecutar las decisiones tomadas en el control de alto nivel. Una vez que el controlador de alto nivel determina las fuerzas y momentos, este modelo calcula las velocidades angulares requeridas de las hélices para ejecutarlas.

- **Modelo de propulsor (bajo nivel).** Este modelo describe el sistema de propulsión, incluyendo los motores, el controlador de velocidad electrónica (ESC) y las hélices. La entrada es una señal de aceleración, mientras que las salidas son las velocidades angulares de las hélices. Este modelo opera en el nivel más bajo del sistema de control, convirtiendo las señales de control en comandos físicos que impulsan al vehículo. Este proceso es gestionado por el controlador de vuelo, que se encarga de ejecutar las decisiones tomadas en el control de alto nivel.

Suposiciones

Por conveniencia, al modelar el UAV, se introducen las siguientes suposiciones.

- El cuadricóptero es un cuerpo rígido.
- La masa y los momentos de inercia son constantes.
- El centro geométrico y el *CoG* del cuadricóptero son el mismo.
- El cuadricóptero solo está bajo la influencia de la gravedad y la fuerza de empuje de las hélices. Además, la gravedad apunta en la dirección negativa del eje $o_e z_e$, y la fuerza de empuje de las hélices apunta en la dirección positiva del eje $o_b z_b$.
- Las hélices con índices impares giran en sentido antihorario, y las hélices con índices pares giran en sentido horario.

3.3. Modelo cinemático simplificado

Este trabajo formula la representación matemática del cuadricóptero como una combinación del marco de referencia inercial $< \mathbb{I} >$ y el marco de coordenadas del cuerpo $< \mathbb{B} >$. Estas notaciones se muestran en la Fig. 3.2.

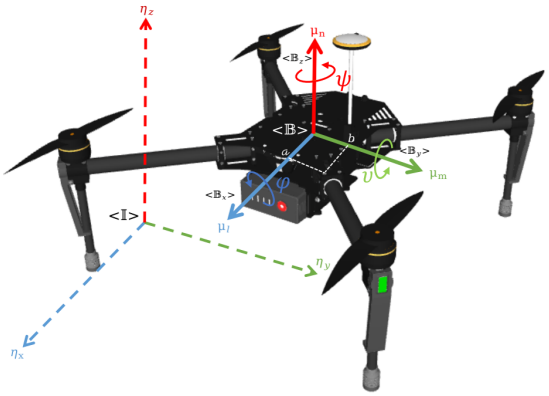


Figura 3.2: Representación de la plataforma UAV DJI Matrice 100

Debido a que los controladores de bajo nivel basados en formulaciones PID garantizan la posición de equilibrio, en primera instancia para el modelo matemático simplificado este trabajo asume rotaciones solo a través del eje vertical $\mathbf{B}_z$ y ligeras desviaciones angulares a lo largo de los ángulos ($\phi \approx 0, \theta \approx 0$), que corresponden al alabeo y cabeceo, respectivamente. Por estas consideraciones, este enfoque se denominará **Modelo Simplificado**, ya que no contempla los grados de libertad completos asociados a la actitud.

Por lo tanto, la representación mínima de la posición y orientación se define como $\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix}\eta_x & \eta_y & \eta_z & \eta_\psi\end{bmatrix}^\intercal$, expresada con más detalle mediante la siguiente ecuación:

$$\begin{cases} \eta_x = \eta_{x_0} + d_x\cos(\psi) - d_y\sin(\psi) \\ \eta_y = \eta_{y_0} + d_x\sin(\psi) + d_y\cos(\psi) \\ \eta_z = \eta_{z_0} + d_z \\ \eta_\psi = \psi \end{cases}, \tag{3.1}$$

donde $\begin{bmatrix}\eta_{x_0} & \eta_{y_0} & \eta_{z_0}\end{bmatrix}^\intercal$ representa la posición del centro de masas (CoM), y el punto de interés se puede definir mediante un desplazamiento relativo desde el CoM, expresado mediante (d_x, d_y, d_z).

Para formular los esquemas de control, es necesario conocer la evolución del sistema a lo largo del tiempo; entonces, el modelo cinemático del cuadricóptero se define mediante el vector $\dot{\boldsymbol{\eta}} = \begin{bmatrix}\dot{\eta}_x & \dot{\eta}_y & \dot{\eta}_z & \dot{\eta}_\psi\end{bmatrix}^\intercal$ con la siguiente representación en forma matricial:

$$\begin{bmatrix}\dot{\eta}_x \\ \dot{\eta}_y \\ \dot{\eta}_z \\ \dot{\eta}_\psi\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 & -(d_x\sin(\psi) + d_y\cos(\psi)) \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 & d_x\cos(\psi) - d_y\sin(\psi) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\nu_l \\ \nu_m \\ \nu_n \\ \nu_\omega\end{bmatrix}, \tag{3.2}$$

donde $\boldsymbol{\nu} = \begin{bmatrix}\nu_l & \nu_m & \nu_n & \nu_\omega\end{bmatrix}^\intercal$ representa las velocidades lineales y angulares para la maniobra del sistema en el marco de referencia del cuerpo del dron. Una formulación compacta se puede definir mediante la siguiente ecuación:

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{J}_k(\psi)\boldsymbol{\nu}, \tag{3.3}$$

donde la relación lineal entre la evolución del punto de interés $\dot{\boldsymbol{\eta}}$ y las velocidades de maniobrabilidad de control cinemático $\boldsymbol{\nu}$ se puede definir mediante la matriz Jacobiana analítica $\mathbf{J}_k(\psi)$.

Para la sección de dinámica simplificada basada en velocidades de maniobrabilidad [44], es necesario definir la derivada temporal de (3.3) considerando que $\ddot{\boldsymbol{\eta}}(t) = \frac{d}{dt}\dot{\boldsymbol{\eta}}$, se desarrolló la siguiente relación:

$$\begin{bmatrix} \ddot{\eta}_x \\ \ddot{\eta}_y \\ \ddot{\eta}_z \\ \ddot{\eta}_\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 & -(d_x \sin(\psi) + d_y \cos(\psi)) \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 & (d_x \cos(\psi) - d_y \sin(\psi)) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mu}_l \\ \dot{\mu}_m \\ \dot{\mu}_n \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} + \dots$$
$$\begin{bmatrix} -\omega \sin(\psi) & -\omega \cos(\psi) & 0 & -\omega(d_x \cos(\psi) - d_y \sin(\psi)) \\ \omega \cos(\psi) & -\omega \sin(\psi) & 0 & \omega(d_x \sin(\psi) + d_y \cos(\psi)) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_l \\ \mu_m \\ \mu_n \\ \omega \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

La misma que puede ser expresada en su forma compacta como:

$$\ddot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{J}_k(\psi)\dot{\boldsymbol{\nu}} + \dot{\mathbf{J}}_k(\psi, \omega)\boldsymbol{\nu}, \tag{3.5}$$

donde $\dot{\boldsymbol{\nu}} = \begin{bmatrix} \dot{\nu}_l & \dot{\nu}_m & \dot{\nu}_n & \dot{\nu}_\omega \end{bmatrix}^\intercal$ es el vector de aceleración del cuadricóptero y $\dot{\mathbf{J}}(\psi, \omega)$ es la derivada temporal del Jacobiano analítico definido como:

$$\dot{\mathbf{J}}(\psi, \omega) = \begin{bmatrix} -\omega \sin(\psi) & -\omega \cos(\psi) & 0 & -\omega(d_x \cos(\psi) - d_y \sin(\psi)) \\ \omega \cos(\psi) & -\omega \sin(\psi) & 0 & \omega(d_x \sin(\psi) + d_y \cos(\psi)) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3.4. Modelo dinámico simplificado

La formulación de un modelo matemático que define el comportamiento preciso del vuelo del cuadricóptero se obtiene a través de las ecuaciones de Euler-Lagrange, que describen la evolución de un sistema mecánico sujeto a restricciones holonómicas. Con estas consideraciones, las ecuaciones de Euler-Lagrange [45, 46] se expresan de la siguiente manera :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\boldsymbol{\eta}}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\eta}} = \boldsymbol{\tau}_s, \tag{3.6}$$

donde $\mathcal{L} = \mathcal{K} - \mathcal{U}$ representa el *Lagrangiano* como la diferencia entre la energía cinética y la energía potencial, y $\boldsymbol{\tau}_s = \begin{bmatrix} f_{x_I} & f_{y_I} & f_{z_I} & \tau_{\psi_I} \end{bmatrix}^\intercal$ representa las fuerzas y los momentos aplicados en cada grado de libertad. La energía cinética total del sistema $\mathcal{K} = \mathcal{K}_v + \mathcal{K}_\omega$ se define como la suma de las energías asociadas a las velocidades de traslación y rotación.

El término de traslación contribuye a la energía cinética de traslación del sistema, definida como:

$$\mathcal{K}_v = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\eta}}^T \mathbf{H}\, \dot{\boldsymbol{\eta}}, \tag{3.7}$$

donde $\mathbf{H} = \text{diag}(m, m, m, I)$ es una matriz diagonal que consta de la masa del cuadricóptero m y el momento de inercia I alrededor del eje vertical $\mathbf{B}_z$.

La energía cinética rotacional se expresa en la siguiente forma:

$$\mathcal{K}_\omega = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\omega}}_z^\intercal \mathbf{I}_\omega \dot{\boldsymbol{\omega}}_z, \tag{3.8}$$

donde $\boldsymbol{\omega}_z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \nu_\omega \end{bmatrix}^\intercal$ es vector de la velocidad angular y $\mathbf{I}_\omega$ es la matriz de inercia expresada en un sistema de coordenadas del cuerpo $< \mathbb{B} >$.

La energía potencial del cuadricóptero surge únicamente debido a la gravedad, definida por:

$$\mathcal{U} = m\mathbf{g}^\intercal \boldsymbol{\eta}, \tag{3.9}$$

donde $\mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & g & 0 \end{bmatrix}^\intercal$ es el vector de aceleraciones debidas a la gravedad en el sistema de coordenadas absoluto $< \mathbb{I} >$. Así, el Lagrangiano para el cuadricóptero se puede expresar como:

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\eta}, \dot{\boldsymbol{\eta}}) = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\eta}}^\intercal \mathbf{H} \dot{\boldsymbol{\eta}} - m\mathbf{g}^\intercal \boldsymbol{\eta}. \tag{3.10}$$

Luego, aplicando la formulación de Euler-Lagrange (3.6), el modelo

dinámico del cuadricóptero es obtenido por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} m\ddot{\eta}_x - d_y m\ddot{\eta}_\psi \cos(\psi) - d_x m\ddot{\eta}_\psi \sin(\psi) \\ -d_x m\ddot{\eta}_\psi^2 \cos(\psi) + d_y m\ddot{\eta}_\psi^2 \sin(psi) = f_{x_I} \\ \\ m\ddot{\eta}_y + d_x m\ddot{\eta}_\psi \cos(\psi) - d_y m\ddot{\eta}_\psi \sin(\psi) \\ -d_y m\ddot{\eta}_\psi^2 \cos(\psi) - d_x m\ddot{\eta}_\psi^2 sin(\psi) = f_{y_I} \\ \\ m\ddot{\eta}_z + mg = f_{z_I} \\ \\ I\ddot{\eta}_\psi + d_x^2 m\ddot{\eta}_\psi + d_y^2 m\ddot{\eta}_\psi + d_x m\ddot{\eta}_y \cos(\psi) \\ -d_y m\ddot{\eta}_x \cos(\psi) - d_x m\ddot{\eta}_x sin(\psi) - d_y m\ddot{\eta}_y sin(\psi) = \tau_{\psi_I} \end{cases} \tag{3.11}$$

Reordenando la expresión anterior, el modelo dinámico del cuadricóptero se puede expresar en forma matricial de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} f_{x_I} \\ f_{y_I} \\ f_{z_I} \\ \tau_{\psi_I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & \sigma_1 \\ 0 & m & 0 & \sigma_2 \\ 0 & 0 & m & 0 \\ \sigma_1 & \sigma_2 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\eta}_x \\ \ddot{\eta}_y \\ \ddot{\eta}_z \\ \ddot{\eta}_\psi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \sigma_4 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\eta}_x \\ \dot{\eta}_y \\ \dot{\eta}_z \\ \dot{\eta}_\psi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ gm \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{3.12}$$

donde

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= -m(d_y \cos(\psi) + d_x \sin(\psi)) \\ \sigma_2 &= m(d_x \cos(\psi) - d_y \sin(\psi)) \\ \sigma_3 &= {d_x}^2 + m{d_y}^2 + I \\ \sigma_4 &= -m\dot{\eta}_\psi(d_x \cos(\psi) - d_y \sin(\psi)) \\ \sigma_5 &= -m\dot{\eta}_\psi(d_y \cos(\psi) + d_x \sin(\psi)) \end{aligned}$$

Por lo tanto, el modelo dinámico del cuadricóptero se puede expresar de forma compacta:

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{\eta})\ddot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{C}(\boldsymbol{\eta}, \dot{\boldsymbol{\eta}})\dot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{g}(\boldsymbol{\eta}) = \boldsymbol{\tau}_s, \tag{3.13}$$

donde, los efectos de Coriolis $\mathbf{C}(\boldsymbol{\eta}, \dot{\boldsymbol{\eta}})$ y las fuerzas gravitatorias $\mathbf{g}(\boldsymbol{\eta})$ pueden representarse mediante las siguientes matrices:

$$\mathbf{C}(\boldsymbol{\eta}, \dot{\boldsymbol{\eta}}) = \dot{\mathbf{M}} - \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\eta}}^\intercal \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \boldsymbol{\eta}}$$

y

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\eta}) = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \boldsymbol{\eta}}$$

3.4.1. Modelo dinámico simplificado basado en velocidades de maniobra

Esta sección presenta la siguiente premisa, el cuadricóptero permanece en una posición de vuelo estacionario realizada por un controlador dinámico Proporcional - Derivativo (PD) para el plano horizontal y con compensación de gravedad para el plano vertical, por tanto, el movimiento de actitud del cuadricóptero es controlado mediante las fuerzas $\mathbf{f}_{t_B} = \begin{bmatrix} f_{x_B} & f_{y_B} & \tau_{\psi_B} \end{bmatrix}$, estas fuerzas también pueden aproximarse mediante un controlador PD:

$$\mathbf{f}_{t_B} = \mathbf{K}_{pt}(\boldsymbol{\mu}_t - \boldsymbol{\nu}_t) + \mathbf{K}_{dt}(\dot{\boldsymbol{\mu}}_t - \dot{\boldsymbol{\nu}}_t), \tag{3.14}$$

donde $\boldsymbol{\nu}_t = \begin{bmatrix} \nu_l & \nu_m & \nu_\omega \end{bmatrix}^\intercal$ y $\boldsymbol{\mu}_t = \begin{bmatrix} \mu_l & \mu_m & \mu_\omega \end{bmatrix}^\intercal$ es el vector de velocidades aplicadas y de referencia que define la actitud del cuadricóptero en el plano horizontal, respectivamente; $(\dot{\boldsymbol{\nu}}_t, \dot{\boldsymbol{\mu}}_t)$ son las derivadas temporales de $\boldsymbol{\nu}_t$ y $\boldsymbol{\mu}_t$, respectivamente; y $\mathbf{K}_{pt}$, $\mathbf{K}_{dt}$ son matrices de ganancia diagonal definidas positivas. Además, se hace la siguiente suposición:

$$\dot{\boldsymbol{\mu}}_t = 0 \implies \lim_{t\to\infty} \|\mathbf{f}_{t_B}\| = 0 \quad \wedge \quad \lim_{t\to\infty} \|\boldsymbol{\mu}_t - \boldsymbol{\nu}_t\| = 0,$$

Ahora, considerando la fuerza de empuje vertical f_{z_B} se opone a la fuerza de gravedad, el controlador PD de altitud se define como:

$$f_{z_B} = k_{pl}(\mu_n - \nu_n) + k_{dl}(\dot{\mu}_n - \dot{\nu}_n) + mg, \tag{3.15}$$

bajo la suposición de que cumple que:

$$\dot{\mu}_n = 0 \implies \lim_{t\to\infty} \|f_{z_I}\| = mg \quad \wedge \quad \lim_{t\to\infty} \|\mu_n - \nu_n\| = 0,$$

donde μ_n es la velocidad vertical de referencia; $\dot{\nu}_n$ y $\dot{\mu}_n$ son las derivadas temporales de ν_n y μ_n, respectivamente; y k_{pl}, k_{dl} son escalares de ganancia positiva que definen las ganancias proporcionales y derivativas del controlador PD.

Por lo expuesto, la estructura general del controlador vuelo estacionario basado en control de altitud y actitud se expresa como:

$$\begin{bmatrix} f_{x_B} \\ f_{y_B} \\ f_{z_B} \\ \tau_{\psi_B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{pl} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{pl} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{pn} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{p\omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_l \\ \mu_m \\ \mu_n \\ \mu_\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{pl} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{pl} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{pn} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{p\omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_l \\ \nu_m \\ \nu_n \\ \nu_\omega \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_{dl} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{dl} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{dn} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{d\omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\nu}_l \\ \dot{\nu}_m \\ \dot{\nu}_n \\ \dot{\nu}_\omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.16}$$

Y su forma compacta como:

$$\mathbf{f}_B = \mathbf{K_p}\boldsymbol{\mu} - \mathbf{K_p}\boldsymbol{\nu} - \mathbf{K_d}\dot{\boldsymbol{\nu}} + \mathbf{g}, \tag{3.17}$$

donde $\mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & mg & 0 \end{bmatrix}$; $\mathbf{K_p} \in \mathbb{R}^{4\times4}$ es una matriz diagonal de ganancias proporcionales y $\mathbf{K_d} \in \mathbb{R}^{4\times4}$ es una matriz diagonal de ganancias derivativas.

Finalmente, se sustituye las ecuaciones (3.3) y (3.5) en la expresión resultante de igualar los modelos dinámicos (3.13) y (3.17), luego se obtiene el nuevo modelo dinámico simplificado del cuadricóptero, que considera las velocidades de maniobrabilidad como entrada del sistema:

$$\begin{bmatrix} \mu_l \\ \mu_m \\ \mu_n \\ \mu_\omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi_1 & 0 & 0 & b\pi_2 \\ 0 & \pi_3 & 0 & a\pi_4 \\ 0 & 0 & \pi_5 & 0 \\ b\pi_6 & a\pi_7 & 0 & \pi_8(a^2+b^2)+\pi_9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\nu}_l \\ \dot{\nu}_m \\ \dot{\nu}_n \\ \dot{\nu}_\omega \end{bmatrix} + \dots \quad \dots \begin{bmatrix} \pi_{10} & \omega\pi_{11} & 0 & a\omega\pi_{12} \\ \omega\pi_{13} & \pi_{14} & 0 & b\omega\pi_{15} \\ 0 & 0 & \pi_{16} & 0 \\ a\omega\pi_{17} & b\omega\pi_{18} & 0 & \pi_{19} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_l \\ \nu_m \\ \nu_n \\ \nu_\omega \end{bmatrix} \tag{3.18}$$

Este nuevo modelo dinámico simplificado se puede aplicar a cualquier cuadricóptero UAV comercial con velocidades de maniobrabilidad definidas como entradas del sistema. La siguiente ecuación expresa el modelo dinámico simplificado en una forma compacta:

$$\boldsymbol{\mu} = \bar{\mathbf{M}}(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\pi})\dot{\boldsymbol{\nu}} + \bar{\mathbf{C}}(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\pi})\boldsymbol{\nu}. \tag{3.19}$$

Con la siguiente relación:

$$\bar{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\pi}) = (\boldsymbol{RK_p})^{-1}(\boldsymbol{MJ} + \boldsymbol{RK_d}),$$

$$\bar{\boldsymbol{C}}(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\pi}) = (\boldsymbol{RK_p})^{-1}(\boldsymbol{M\dot{J}} + \boldsymbol{RK_p} + \boldsymbol{CJ}),$$

donde $\bar{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\pi})$ es la nueva matriz de masa e inercia; $\bar{\boldsymbol{C}}(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\pi})$ es la nueva matriz de fuerzas centrífugas y de Coriolis; $\mathbf{R}$ representa la matriz de rotación en torno al eje z desde el marco $< \mathbb{B} >$ al marco $< \mathbb{I} >$; $\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix}\mu_l & \mu_m & \mu_n & \mu_\omega\end{bmatrix}^\intercal$ son las velocidades aplicadas al UAV y finalmente, $\boldsymbol{\pi} = \begin{bmatrix}\pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_{19}\end{bmatrix}$ es el vector de parámetros dinámicos que incluye todos los fenómenos físicos que afectan la dinámica del cuadricóptero, los cuales se presentan a detalle a continuación:

$$\pi_1 = \frac{K_{dl}+m}{K_{pl}}, \quad \pi_2 = -\frac{2bm}{K_{pl}}, \quad \pi_3 = \frac{K_{dm}+m}{K_{pm}}, \quad \pi_4 = \frac{2am}{K_{pm}},$$
$$\pi_5 = \frac{K_{dn}+m}{K_{pn}}, \quad \pi_6 = -\frac{bm}{K_{pw}}, \quad \pi_7 = \frac{am}{K_{pw}}, \quad \pi_8 = \frac{2m(a+b)}{K_{pw}},$$
$$\pi_9 = \frac{I+K_{dw}}{K_{pw}}, \quad \pi_{10} = 1, \quad \pi_{11} = -\frac{m\omega}{K_{pl}}, \quad \pi_{12} = -\frac{2am\omega}{K_{pl}},$$
$$\pi_{13} = \frac{m\omega}{K_{pm}}, \quad \pi_{14} = 1, \quad \pi_{15} = -\frac{2bm}{K_{pm}}, \quad \pi_{16} = 1,$$
$$\pi_{17} = \frac{am\omega}{K_{pw}}, \quad \pi_{18} = \frac{bm\omega}{K_{pw}}$$

3.5. Modelo cinemático completo

A partir de aquí, se denominará **Modelo Completo** al que considera todos los grados de libertad de actitud y traslación.

El modelo cinemático completo de la actitud se puede representar de tres formas: mediante ángulos de Euler, matriz de rotación y cuaterniones. A continuación, se presentan estos tres enfoques para describir el modelo cinemático de un cuerpo rígido.

Modelo de ángulos de Euler

$$\begin{aligned} {}^{e}\dot{\mathbf{p}} &= \mathbf{v} \\ \dot{\boldsymbol{\Theta}} &= \mathbf{W}_{\Theta}^{-1}\, {}^{b}\boldsymbol{\omega} \end{aligned} \tag{3.20}$$

Modelo de matriz de rotación

$$\begin{aligned} {}^{e}\dot{\mathbf{p}} &= \mathbf{v} \\ \dot{\mathbf{R}} &= \mathbf{R}\left[{}^{b}\boldsymbol{\omega}\right]_{x} \end{aligned} \tag{3.21}$$

donde $\mathbf{R} \triangleq \mathbf{R}_{b}^{e}$ con propósito simplificar las descripciones.

Modelo de cuaterniones

$$\begin{aligned} {}^{e}\dot{\mathbf{p}} &= \mathbf{v} \\ {}^{b}\dot{\mathbf{q}} &= -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ {}^{b}\boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} \otimes {}^{b}\mathbf{q}, \end{aligned} \tag{3.22}$$

donde $\mathbf{p} = [p_x, p_y, p_z]^{\intercal}$ representa la posición del UAV en el marco global, y $\mathbf{v} = [\mathrm{v}_x, \mathrm{v}_y, \mathrm{v}_z]^{\intercal}$ es el vector de velocidad, también en el marco global. La orientación del UAV está representada por el cuaternión $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_w & \mathbf{q}_v^{\intercal} \end{bmatrix}^{\intercal}$, que define la actitud del UAV; $\otimes$ denota el operador de multiplicación de cuaterniones. Finalmente, el vector de velocidad angular en el marco del cuerpo se denota como $\boldsymbol{\omega} = [\omega_x, \omega_y, \omega_z]^{\intercal}$.

3.6. Modelo dinámico completo

Existen diversas técnicas para derivar las ecuaciones de movimiento de un cuerpo rígido con 6 grados de libertad. En este trabajo, se utiliza la formulación de Newton-Euler y Euler-Lagrange.

3.6.1. Ecuaciones de Newton-Euler

El modelo dinámico del UAV está representado por el siguiente vector de estado:

$$\mathbf{x}_N = \begin{bmatrix} \mathbf{p} \ \mathbf{v} \ \mathbf{q} \ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix}^\intercal .$$

El modelo dinámico de cuerpo rígido se descompone en dos categorías: el modelo dinámico de posición y el modelo dinámico de actitud. A continuación, se describen ambos modelos dinámicos:

Modelo dinámico de posición

Para describir la dinámica de un cuerpo rígido se utilizan las ecuaciones de Newton-Euler para describir su dinámica considerando la suposición 1 y la 4 el cual implica que solo considera el cuadricóptero de hélice nivelados, es decir, que no tiene los motores inclinados en su configuración.

En el marco inercial, la fuerza centrífuga se anula. Por lo tanto, solo la fuerza gravitatoria y la magnitud y dirección del empuje contribuyen a la aceleración del cuadricóptero.

$$\dot{\mathbf{v}} = g\mathbf{e}_3 + \frac{f}{m}{}^e\mathbf{b}_3 = g\mathbf{e}_3 + \frac{f}{m}\mathbf{R}\mathbf{e}_3, \tag{3.23}$$

donde m es la masa del cuadricóptero y $f_z \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ representa la magnitud del empuje total de las hélices de forma unidireccional hacia el eje positivo $o_b z_b$,

$$f = \sum_{i=1}^{4} f_i. \tag{3.24}$$

Además, $g \triangleq 9{,}8\,[m/s^2] \in \mathbb{R}^+$ representa la aceleración debida a la gravedad. Además, se tiene que el empuje total a lo largo del eje z del cuerpo generado por los motores puede representarse por ${}^b\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & f_z \end{bmatrix}^\intercal$, por tanto:

$$\dot{\mathbf{v}} = g\mathbf{e}_3 + \frac{1}{m}\mathbf{R} \cdot {}^b\mathbf{T}. \tag{3.25}$$

Debido a que,

$$\mathbf{v} = \mathbf{R}\,\boldsymbol{\nu}, \tag{3.26}$$

donde, $\boldsymbol{\nu}$ representa la velocidad en el marco del cuerpo $< \mathbb{B} >$. En el marco del cuerpo, la fuerza requerida para la aceleración de la masa $m\dot{\boldsymbol{\nu}}$ y

la fuerza centrífuga $\boldsymbol{\omega} \times (m\boldsymbol{\nu})$ son iguales a la gravedad $\mathbf{G} = mg\mathbf{e}_3$ en el frame del cuerpo y el empuje total de los rotores ${}^b\mathbf{T}$, esto es:

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = -\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\nu} + g\mathbf{R}^\intercal \mathbf{e}_3 + \frac{1}{m}{}^b\mathbf{T} \tag{3.27}$$

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = -\left[\boldsymbol{\omega}\right]_x \boldsymbol{\nu} + g\mathbf{R}^\intercal \mathbf{e}_3 + \frac{1}{m}{}^b\mathbf{T} \tag{3.28}$$

Modelo dinámico de actitud

En el marco del cuerpo, la aceleración angular de la inercia $\mathbf{I}_m\dot{\boldsymbol{\omega}}$ y las fuerzas centrífugas $\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{I}_m \cdot \boldsymbol{\omega})$ son iguales al torque aplicado $\boldsymbol{\tau}$, esto es

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{I}_\omega^{-1} \left(\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{I}_\omega \cdot \boldsymbol{\omega})\right), \tag{3.29}$$

donde $\boldsymbol{\tau} = [\tau_x\, \tau_y\, \tau_z]^\intercal \in \mathbb{R}^3$ representa los momentos generados por las hélices en los ejes del cuerpo y $\mathbf{I}_\omega \in \mathbb{R}^{3\times3}$ representa el momento de inercia del cuadricóptero, establecida como:

$$\mathbf{I}_\omega = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix}. \tag{3.30}$$

Finalmente, basado en ecuaciones de Newton-Euler la dinámica de un cuerpo rígido con 6 grados de libertad puede escribirse de forma compacta de la forma:

$$\begin{bmatrix} {}^b\mathbf{T} \\ {}^b\boldsymbol{\tau} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m\mathbf{I}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} \\ \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{I}_\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\nu}} \\ \dot{\boldsymbol{\omega}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega} \times (m\boldsymbol{\nu}) \\ \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{I}_\omega \cdot \boldsymbol{\omega}) \end{bmatrix} \tag{3.31}$$

donde, la notación $\mathbf{I}_{3\times3}$ se refiere a una matriz identidad en $\mathbb{R}^{3\times3}$ y $\mathbf{0}_{3\times3}$ se refiere a una matriz nula en el espacio de $\mathbb{R}^{3\times3}$.

3.6.2. Ecuaciones de Euler-Lagrange

El modelo dinámico del UAV puede derivarse utilizando el formalismo de Euler-Lagrange, lo que nos permite describir las ecuaciones de movimiento basadas en la energía cinética, la energía potencial y las fuerzas generalizadas que actúan sobre el sistema. Específicamente, en este el estado del sistema se representa por $\mathbf{x}_E = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varrho} & \dot{\boldsymbol{\varrho}} \end{bmatrix}^\intercal \in \mathbb{R}^{12}$, con

$\boldsymbol{\varrho} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{\eta} & \boldsymbol{\Theta}\end{bmatrix}^\intercal \in \mathbb{R}^6$ y $\dot{\boldsymbol{\varrho}} = \begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{\eta}} & \dot{\boldsymbol{\Theta}}\end{bmatrix}^\intercal \in \mathbb{R}^6$, donde $\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix}\eta_x & \eta_y & \eta_z\end{bmatrix}^\intercal$ denota las coordenadas de posición, $\dot{\boldsymbol{\eta}} = \begin{bmatrix}\dot{\eta}_x & \dot{\eta}_y & \dot{\eta}_z\end{bmatrix}$ son las velocidades lineales en el marco inercial, $\boldsymbol{\Theta} = \begin{bmatrix}\phi & \theta & \psi\end{bmatrix}^\intercal$ representa los ángulos de Euler (alabeo, cabeceo, guiñada), y $\dot{\boldsymbol{\Theta}} = \begin{bmatrix}\dot{\phi} & \dot{\theta} & \dot{\psi}\end{bmatrix}^\intercal$ son las correspondientes velocidades angulares en el marco del cuerpo.

La función Lagrangiana $\mathcal{L}$ es la diferencia de las energías cinemática y potencial del sistema, dado por:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\boldsymbol{\upsilon}, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{p}) &= K - U \\ &= K_{trans} + K_{rot} - U \\ &= \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{p}}^\intercal \dot{\mathbf{p}} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^\intercal \mathbf{I}_\omega \boldsymbol{\omega} - mg\eta_z\end{aligned} \tag{3.32}$$

La función Lagrangiana asociada al sistema debe satisfacer la restricción de Euler-Lagrange a fin de obtener el modelo dinámico, lo que implica que:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{x}}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix}{}^e\mathbf{F} \\ {}^b\boldsymbol{\tau}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{R}\,{}^b\mathbf{T} \\ {}^b\boldsymbol{\tau}\end{bmatrix} \tag{3.33}$$

Las fuerzas generalizadas aplicadas en el marco de referencia inercial están dadas por ${}^e\mathbf{F} = \mathbf{R}\,{}^b\mathbf{T} = \begin{bmatrix}{}^e f_x & {}^e f_y & {}^e f_z\end{bmatrix}^\intercal$, mientras que los torques que actúan sobre el sistema en el marco de referencia del cuerpo se representan como $\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix}{}^b\tau_\phi & {}^b\tau_\theta & {}^b\tau_\psi\end{bmatrix}^\intercal$.

Lagrangiano translacional

Sea el Lagrangiano traslacional expresado por:

$$\mathcal{L}_{trans} = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{p}}^\intercal \dot{\mathbf{p}} - mg\eta_z, \tag{3.34}$$

entonces,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}_{trans}}{\partial \dot{\mathbf{p}}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}_{trans}}{\partial \mathbf{p}} = {}^e\mathbf{F} \tag{3.35}$$

$$m\ddot{\mathbf{p}} + mg\mathbf{e}_3 = {}^e\mathbf{F} \tag{3.36}$$

$$\ddot{\mathbf{p}} = -g\mathbf{e}_3 + \frac{1}{m}{}^e\mathbf{F} \tag{3.37}$$

Se nota que la ecuación (3.37) es equivalente a la ecuación (3.25) obtenida por las ecuaciones Newton-Euler.

Lagrangiano rotacional

Sea el Lagrangiano rotacional expresado por:

$$\mathcal{L}_{rot} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^{\intercal}\mathbf{I}_{\omega}\boldsymbol{\omega}. \tag{3.38}$$

La ecuación (3.8) se sustituye en (3.39), lo que resulta en:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{rot} =& \frac{1}{2}(\mathbf{W}_{\Theta}\dot{\boldsymbol{\Theta}})^{\intercal}\mathbf{I}_{\omega}(\mathbf{W}_{\Theta}\dot{\boldsymbol{\Theta}}) \\ =& \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\Theta}}^{\intercal}\mathbf{W}_{\Theta}^{\intercal}\mathbf{I}_{\omega}\mathbf{W}_{\Theta}\dot{\boldsymbol{\Theta}} \\ =& \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\Theta}}^{\intercal}\mathbf{M}\dot{\boldsymbol{\Theta}},\end{aligned} \tag{3.39}$$

donde $\mathbf{M}(\boldsymbol{\Theta}) = \mathbf{W}_{\Theta}^{\intercal}\mathbf{I}_{\omega}\mathbf{W}_{\Theta}$ y se define como:

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{\Theta}) = \begin{bmatrix} I_x & 0 & -I_x S_\theta \\ 0 & I_z + I_y C_\phi^2 - I_z C_\phi^2 & C_\phi S_\phi C_\theta (I_y - I_z) \\ -I_x S_\theta & C_\phi S_\phi C_\theta (I_y - I_z) & I_z C_\phi^2 C_\theta^2 + I_y S_\phi^2 C_\theta^2 + I_x S_\theta^2 \end{bmatrix}, \tag{3.40}$$

entonces,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}_{rot}}{\partial \dot{\boldsymbol{\Theta}}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}_{rot}}{\partial \boldsymbol{\Theta}} = \boldsymbol{\tau}. \tag{3.41}$$

Resolviendo analíticamente se obtiene:

$$\begin{aligned}\mathbf{M}\ddot{\boldsymbol{\Theta}} + \left(\dot{\mathbf{M}} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\Theta}}(\dot{\boldsymbol{\Theta}}^{\intercal}\mathbf{M})\right)\dot{\boldsymbol{\Theta}} &= \boldsymbol{\tau} \\ \mathbf{M}(\boldsymbol{\Theta})\ddot{\boldsymbol{\Theta}} + \mathbf{C}(\boldsymbol{\Theta}, \dot{\boldsymbol{\Theta}})\dot{\boldsymbol{\Theta}} &= \boldsymbol{\tau}\end{aligned} \tag{3.42}$$

En la cual, la matriz $\mathbf{C}(\boldsymbol{\Theta}, \dot{\boldsymbol{\Theta}})$ es el término Coriolis, que contiene los términos giroscópicos y centrípetos, expresada de forma matricial como:

$$\mathbf{C}(\boldsymbol{\Theta}, \dot{\boldsymbol{\Theta}}) = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}, \tag{3.43}$$

donde:

$$
\begin{aligned}
c_{11} =& 0 \\
c_{12} =& (I_y - I_z)(\theta_p C_\phi S_\phi + \psi_p S_\phi^2 C_\theta) + (I_z - I_y)(\psi_p C_\phi^2 C_\theta) - I_x \psi_p C_\theta \\
c_{13} =& (I_z - I_y)\psi_p C_\phi S_\phi C_\theta^2 \\
c_{21} =& (I_z - I_y)(\theta_p C_\phi S_\phi + \psi_p S_\phi C_\theta) + (I_y - I_z)(\psi_p C_\phi^2 C_\theta) + I_x \psi_p C_\theta \\
c_{22} =& (I_z - I_y)\phi_p C_\phi S_\phi \\
c_{23} =& -I_x \psi_p S_\theta C_\theta + I_y \psi_p S_\phi^2 S_\theta C_\theta + I_z \psi_p C_\phi^2 S_\theta C_\theta \\
c_{31} =& (I_y - I_z)\psi_p C_\theta^2 S_\phi C_\phi - I_x \theta_p C_\theta \\
c_{32} =& (I_z - I_y)(\theta_p C_\phi S_\phi S_\theta + \phi_p S_\phi^2 C_\theta) + (I_y - I_z)\phi_p C_\phi^2 C_\theta + I_x \psi_p S_\theta C_\theta \\
& - I_y \psi_p S_\phi^2 S_\theta C_\theta - I_z \psi_p C_\phi^2 S_\theta C_\theta \\
c_{33} =& (I_y - I_z)\phi_p C_\phi S_\phi C_\theta^2 - I_y \theta_p S_\phi^2 C_\theta S_\theta - I_z \theta_p C_\phi^2 C_\theta S_\theta + I_x \theta_p C_\theta S_\theta
\end{aligned}
\tag{3.44}
$$

Finalmente, basado en ecuaciones de Euler-Lagrange la dinámica de un cuerpo rígido con 6 grados de libertad puede escribirse de forma compacta de la forma:

$$
\begin{bmatrix} \mathbf{R}\,{}^b\mathbf{T} \\ {}^b\boldsymbol{\tau} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m\mathbf{I}_{3\times 3} & \mathbf{0}_{3\times 3} \\ \mathbf{0}_{3\times 3} & \mathbf{M}(\boldsymbol{\Theta}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\boldsymbol{\eta}} \\ \ddot{\boldsymbol{\Theta}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3\times 3} & \mathbf{0}_{3\times 3} \\ \mathbf{0}_{3\times 3} & \mathbf{C}(\boldsymbol{\Theta}, \dot{\boldsymbol{\Theta}}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\eta}} \\ \dot{\boldsymbol{\Theta}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} mg\mathbf{e}_3 \\ 0 \end{bmatrix}
\tag{3.45}
$$

La ecuación (3.45) expresada en su forma compata se expresa,

$$
\bar{\mathbf{M}}(\boldsymbol{\varrho})\ddot{\boldsymbol{\varrho}} + \bar{\mathbf{C}}(\boldsymbol{\varrho}, \dot{\boldsymbol{\varrho}})\dot{\boldsymbol{\varrho}} + \bar{\mathbf{G}} = \boldsymbol{\mathcal{T}},
\tag{3.46}
$$

donde $\bar{\mathbf{M}}(\boldsymbol{\varrho})$ es la matriz de inercia generalizada, $\bar{\mathbf{C}}(\boldsymbol{\varrho}, \dot{\boldsymbol{\varrho}})$ es la matriz generalizada de Coriolis, $\bar{\mathbf{G}}$ representa las fuerzas gravitatorias, y $\boldsymbol{\mathcal{T}} = \begin{bmatrix} {}^e\mathbf{F} & {}^b\boldsymbol{\tau} \end{bmatrix}^\intercal$ corresponde a las fuerzas y torques aplicados.

Modelo dinámico basado en velocidad vertical y actitud

El sistema de control de vuelo de un cuadricóptero es un típico sistema no lineal. Esto hace que el análisis y el diseño sean complejos. Además, el cuadricóptero es un sistema subactuado, con fuerte acoplamiento y alta dimensionalidad. Por lo tanto, para facilitar la identificación del modelo dinámico basado en una velocidad vertical y posiciones deseadas de actitud, es necesario encarar el diseño del controlador PD como un modelo lineal.

Se asume que los torques responsables del movimiento horizontal, ${}^b\boldsymbol{\tau}_h = \begin{bmatrix}\tau_x & \tau_y\end{bmatrix}^\intercal$, son controlados por un controlador PD de actitud de bajo nivel. Este controlador regula los torques en los ejes x y y para asegurar la estabilidad en el plano horizontal. Estos torques se aplican de la siguiente manera:

$$ {}^b\boldsymbol{\tau}_h = \mathbf{K}_{p_h}(\boldsymbol{\Theta}_{h_d} - \boldsymbol{\Theta}_h) + \mathbf{K}_{d_h}(\dot{\boldsymbol{\Theta}}_{h_d} - \dot{\boldsymbol{\Theta}}_h), $$

donde $\boldsymbol{\Theta}_h = \begin{bmatrix}\phi & \theta\end{bmatrix}^\top$ representa los ángulos actuales de alabeo y cabeceo, y $\boldsymbol{\Theta}_{h_d} = \begin{bmatrix}\phi_d & \theta_d\end{bmatrix}^\top$ representa la actitud deseada. Suponiendo que no hay cambio en la tasa de actitud deseada, $\dot{\boldsymbol{\Theta}}_{h_d} = 0$. Las ganancias proporcionales y derivativas se denotan por $\mathbf{K}_{p_h}$ y $\mathbf{K}_{d_h}$, respectivamente.

Se asume que si $\boldsymbol{\Theta}_{h_d} = 0$, entonces:

$$ \lim_{t\to\infty} \|\boldsymbol{\tau}_h\| = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{t\to\infty} \|\tilde{\boldsymbol{\Theta}}_h\| = 0, $$

donde $\tilde{\boldsymbol{\Theta}}_h = \boldsymbol{\Theta}_{h_d} - \boldsymbol{\Theta}_h$. Esto asegura que, con el tiempo, el torque aplicado y el error de actitud en el plano horizontal tenderán a cero.

Para el control de guiñada, el torque está gobernado por un controlador PD con retroalimentación de aceleración:

$$ {}^b\tau_\psi = k_{p_\psi}(\dot{\psi}_d - \dot{\psi}) + k_{d_\psi}(\ddot{\psi}_d - \ddot{\psi}), $$

donde $\dot{\psi}_d$ es la tasa de guiñada deseada, $\ddot{\psi}_d$ es la aceleración de guiñada deseada, $\dot{\psi}$ es la tasa de guiñada actual, y $\ddot{\psi}$ es la aceleración de guiñada actual. El control de guiñada considera tanto la tasa de guiñada como la aceleración de guiñada. Por lo tanto, asumimos que:

$$ \lim_{t\to\infty} \|\tau_\psi\| = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{t\to\infty} \|\tilde{\psi}\| = 0, $$

donde $\tilde{\psi} = \psi_d - \psi$, lo que implica que tanto el torque de guiñada aplicado como el error de ángulo de guiñada tenderán a cero con el tiempo.

En vuelo estacionario, con compensación de la gravedad, la fuerza de empuje vertical está dada por:

$$ {}^b f_z = k_{p_z}(\dot{\eta}_{z_d} - \dot{\eta}_z) + k_{d_z}(\ddot{\eta}_{z_d} - \ddot{\eta}_z) + mg, $$

donde $\dot{\eta}_{z_d}$ es la velocidad vertical de referencia, $\ddot{\eta}_{z_d}$ y $\ddot{\eta}_z$ son las derivadas temporales de las velocidades verticales de referencia y reales, y k_{p_z} y k_{d_z}

son las ganancias proporcionales y derivativas. Se asume que si $\dot{\eta}_{z_d} = 0$, entonces:

$$\lim_{t\to\infty} \|{}^b f_z\| = mg \quad \text{y} \quad \lim_{t\to\infty} \|\dot{\tilde{\eta}}_z\| = 0,$$

donde $\dot{\tilde{\eta}}_z = \dot{\eta}_{z_d} - \dot{\eta}_z$, lo que implica que la fuerza de empuje se estabiliza en el valor de vuelo estacionario y el error de velocidad vertical tiende a cero.

Por lo expuesto anteriormente, la estructura general del controlador PD que tiene como entradas al sistema velocidad vertical y ángulos de altitud se puede expresar como sigue,

$$\begin{bmatrix} {}^e f_x \\ {}^e f_y \\ {}^e f_z \\ {}^b \tau_\phi \\ {}^b \tau_\theta \\ {}^b \tau_\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k_{p_z}(\dot{\eta}_{z_d} - \dot{\eta}_z) + k_{d_z}(\ddot{\eta}_{z_d} - \ddot{\eta}_z) + mg \end{bmatrix} \\ k_{p_\phi}(\phi_d - \phi) + k_{p_\phi}(\dot{\phi}_d - \dot{\phi}) \\ k_{p_\theta}(\theta_d - \theta) + k_{p_\theta}(\dot{\theta}_d - \dot{\theta}) \\ k_{p_\psi}(\dot{\psi}_d - \dot{\psi}) + k_{p_\psi}(\ddot{\psi}_d - \ddot{\psi}) \end{bmatrix} \tag{3.47}$$

La ecuación (3.47) puedes reescribirse de la siguiente forma:

$$\boldsymbol{\mathcal{T}}_{PD} = \bar{\mathbf{R}} \left[\bar{\mathbf{S}}_1 \mathbf{u} - \bar{\mathbf{S}}_2 \boldsymbol{\varrho} - \bar{\mathbf{S}}_3 \dot{\boldsymbol{\varrho}} - \bar{\mathbf{S}}_4 \ddot{\boldsymbol{\varrho}} + \bar{\mathbf{S}}_5 \right], \tag{3.48}$$

donde $\boldsymbol{\mathcal{T}} := \begin{bmatrix} {}^e\mathbf{F}_{PD} & {}^b\boldsymbol{\tau} \end{bmatrix}^\intercal \in \mathbb{R}^6$; $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{\eta}_{z_d} & \phi_d & \theta_d & \dot{\psi}_d \end{bmatrix}^\intercal$ son la señales de entrada aplicadas al cuadricóptero, que son correspondiente a las que son recibidas con el UAV DJI Matrice 100 usando el Onboard SDK basado en ROS. Además, la matriz $\bar{\mathbf{R}}$ es una matriz de rotación expandida, expresada como:

$$\bar{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0}_{3\times3} \\ \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} \end{bmatrix}.$$

Las matrices diagonales que encapsulan los parámetros relevantes son especificadas a continuación.

$$\bar{\mathbf{S}}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \xi_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \xi_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi_4 \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{S}}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \xi_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \xi_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{S}}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \xi_8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \xi_9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi_{10} \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{S}}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi_{12} \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{S}}_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \xi_{13} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\intercal$$

Aquí, los términos ξ_i representan las ganancias PD del controlador. Las inercias I_x, I_y, I_z se incluyen como los parámetros $\xi_{14} - \xi_{16}$, los cuales también deben ser identificados.

El modelo dinámico en (3.46) se iguala a (3.48), y se obtiene:

$$\bar{\mathbf{M}}(\boldsymbol{\varrho})\ddot{\boldsymbol{\varrho}} + \bar{\mathbf{C}}(\boldsymbol{\varrho}, \dot{\boldsymbol{\varrho}})\dot{\boldsymbol{\varrho}} + \bar{\mathbf{G}} = \bar{\mathbf{R}}\left[\bar{\mathbf{S}}_1\mathbf{u} - \bar{\mathbf{S}}_2\boldsymbol{\varrho} - \bar{\mathbf{S}}_3\dot{\boldsymbol{\varrho}} - \bar{\mathbf{S}}_4\ddot{\boldsymbol{\varrho}} + \bar{\mathbf{S}}_5\right]$$

Finalmente, el modelo dinámico basado en una velocidad vertical y actitud deseada queda expresada de la siguiente forma:

$$\ddot{\boldsymbol{\varrho}} = \left(\bar{\mathbf{M}}(\boldsymbol{\varrho}) + \bar{\mathbf{R}}\mathbf{S}_4\right)^{-1}\left[\bar{\mathbf{R}}\left(\bar{\mathbf{S}}_1\mathbf{u} - \bar{\mathbf{S}}_2\boldsymbol{\varrho} - \bar{\mathbf{S}}_3\dot{\boldsymbol{\varrho}} + \bar{\mathbf{S}}_5\right) - \bar{\mathbf{C}}(\boldsymbol{\varrho}, \dot{\boldsymbol{\varrho}})\dot{\boldsymbol{\varrho}} - \bar{\mathbf{G}}\right] \tag{3.49}$$

3.7. Identificación dinámica

Aunque la formulación teórica del modelo dinámico de un cuadricóptero se expresa naturalmente en términos de fuerzas y torques —pues representan directamente las interacciones físicas que generan el movimiento—, en la práctica experimental con plataformas comerciales como el DJI Matrice 100 no es posible acceder a dichos comandos de bajo nivel. Este tipo de UAV únicamente permite enviar referencias de velocidad, tanto lineales como angulares, mediante sus interfaces de control (OSDK/ROS).

Por esta razón, si bien en este capítulo se presenta el modelo dinámico clásico basado en fuerzas y torques, la implementación experimental y los modelos utilizados para identificación emplean un modelo equivalente basado en velocidades de maniobrabilidad. Esta aclaración permite conectar el modelo físico derivado de la mecánica clásica con el modelo realmente aplicable en drones de grado industrial, y explica por qué en las validaciones experimentales las referencias suministradas corresponden a velocidades y no a fuerzas o torques.

Con este marco conceptual, la identificación dinámica se orienta a obtener un modelo parametrizado que reproduzca el comportamiento real del UAV a partir de datos experimentales. El objetivo es ajustar un modelo que, aun partiendo de una formulación física clásica, utilice como entradas las señales efectivamente accesibles en la plataforma.

Como se ilustra en la Fig. 3.3, en el caso del cuadricóptero el proceso de identificación consta de varias etapas clave:

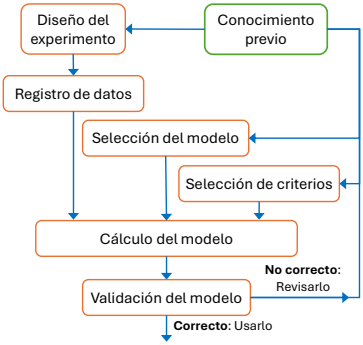


Figura 3.3: Etapas clave para la identificación dinámica

- **Conocimiento previo.** Incluye información sobre las características del sistema, métodos de registro de datos y selección de modelos. Esto ayuda a definir los modelos candidatos y el diseño del experimento.
- **Diseño del experimento.** Busca obtener datos de entrada y salida que reflejen el comportamiento del sistema. Los experimentos pueden ser en lazo abierto o cerrado, dependiendo de si el sistema requiere retroalimentación.
- **Registro de datos.** Recopilación de datos de entrada y salida durante los experimentos.
- **Selección del modelo.** Se elige un conjunto de modelos candidatos y se valida el más adecuado. Los parámetros desconocidos se calculan mediante métodos de identificación de parámetros.

- **Cálculo del modelo.** Se determinan los parámetros desconocidos utilizando métodos de optimización.

- **Validación del modelo.** Se establece un criterio para validar el modelo identificado. Si pasa la validación, se adopta como modelo final; si no, se revisan los pasos anteriores.

3.7.1. Modelo dinámico simplificado

La identificación y validación del modelo dinámico obtenido mediante la formulación de Euler-Lagrange, se logra mediante el método de Programación Cuadrática Secuencial (SQP). Este enfoque se basa en datos experimentales reales para estimar los parámetros dinámicos con el objetivo de integrar el modelo en el controlador propuesto.

El modelo matemático original (3.19) se transforma en la siguiente representación paramétrica lineal:

$$\boldsymbol{\mu}(t) = \mathbf{Y}(\dot{\boldsymbol{\nu}}, \boldsymbol{\nu})\boldsymbol{\pi}, \tag{3.50}$$

donde $\mathbf{Y}(\dot{\boldsymbol{\nu}}, \boldsymbol{\nu})$ es conocida como la matriz regresora y $\boldsymbol{\pi}$ es el vector de parámetros desconocidos, que son funciones no lineales de los parámetros físicos y aerodinámicos del cuadricóptero; es decir, representan de forma conjunta la masa del robot, las constantes de los motores, coeficientes de arrastre del aire, desgaste mecánico, entre otros. La ecuación (3.50) se

presenta matricialmente con la siguiente estructura:

$$\boldsymbol{\mu}(t) = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & 0 \\ b\cdot\sigma_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & 0 \\ 0 & a\cdot\sigma_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b\cdot\sigma_1 \\ 0 & 0 & 0 & a\cdot\sigma_2 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_4\cdot(a^2+b^2) \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu_l & 0 & 0 & 0 \\ \mu_m\cdot\omega & 0 & 0 & 0 \\ a\cdot\omega^2 & \mu_l\cdot\omega & 0 & 0 \\ 0 & \mu_m & 0 & 0 \\ 0 & b\cdot\omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_l\cdot\omega \\ 0 & 0 & 0 & b\cdot\mu_m\cdot\omega \\ 0 & 0 & 0 & \omega \end{bmatrix}^{\intercal} \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \\ \pi_4 \\ \pi_5 \\ \pi_6 \\ \pi_7 \\ \pi_8 \\ \pi_9 \\ \pi_{10} \\ \pi_{11} \\ \pi_{12} \\ \pi_{13} \\ \pi_{14} \\ \pi_{15} \\ \pi_{16} \\ \pi_{17} \\ \pi_{18} \\ \pi_{19} \end{bmatrix} \tag{3.51}$$

Para estimar el vector de parámetros dinámicos, se toman mediciones en instantes específicos dentro del intervalo $[t, t+t_f]$, donde t es el tiempo inicial y t_f es el tiempo final de la recopilación de datos experimentales. El proceso de identificación se lleva a cabo estableciendo la función denominada *costo de identificación del modelo* la cual se expresa de la siguiente manera:

$$\ell_m(\dot{\boldsymbol{\nu}}(t), \boldsymbol{\nu}(t), \boldsymbol{\mu}(t), \boldsymbol{\pi}) = \frac{1}{2}||\boldsymbol{\mu}(t) - \mathbf{Y}(\dot{\boldsymbol{\nu}}(t), \boldsymbol{\nu}(t))\boldsymbol{\pi}||^2_{\mathbf{Q}_m}. \tag{3.52}$$

Esta función, mide la discrepancia entre las velocidades de referencia $\boldsymbol{\mu}(t)$ aplicadas al cuadricóptero y las mediciones del sistema, representadas por la matriz $\mathbf{Y}(\dot{\boldsymbol{\nu}}(t), \boldsymbol{\nu}(t))$. El operador $||\cdot||$ corresponde a la norma euclidiana, y $\mathbf{Q}_m \in \mathbb{R}^{4\times4}$ es una matriz de ponderación definida positiva.

A partir de la Ecuación (3.52), se define un índice de rendimiento o costo funcional sobre los datos experimentales:

$$V_m(\dot{\boldsymbol{\nu}}(t), \boldsymbol{\nu}(t), \boldsymbol{\mu}(t), \boldsymbol{\pi}) = \int_t^{t+t_f} \ell_m(\dot{\boldsymbol{\nu}}(\tau), \boldsymbol{\nu}(\tau), \boldsymbol{\mu}(\tau), \boldsymbol{\pi}) d\tau. \tag{3.53}$$

Utilizando este índice de rendimiento, se plantea el siguiente problema de optimización, que se resuelve mediante el método SQP:

$$\min_{\boldsymbol{\pi}} \quad V_m(\dot{\boldsymbol{\nu}}(t), \boldsymbol{\nu}(t), \boldsymbol{\mu}(t), \boldsymbol{\pi}) \tag{3.54}$$

Para identificar los parámetros dinámicos, se utilizaron datos experimentales del cuadricóptero DJI Matrice 100, que está equipado con un controlador de vuelo de bajo nivel. Este sistema incluye un GPS y una unidad de medición inercial (IMU), lo que permite obtener mediciones de odometría altamente precisas. Los parámetros identificados se detallan en la Tabla 3.2.

Tabla 3.2: Parámetros del vehículo aéreo DJI Matrice 100.

$\pi_1 = 2{,}11$	$\pi_2 = -0{,}005$	$\pi_3 = 1{,}8$	$\pi_4 = 3{,}17$
$\pi_5 = 1{,}78$	$\pi_6 = 0{,}39$	$\pi_7 = -0{,}003$	$\pi_8 = -0{,}03$
$\pi_9 = 0{,}006$	$\pi_{10} = 0{,}02$	$\pi_{11} = 0{,}002$	$\pi_{12} = 0{,}06$
$\pi_{13} = 0{,}70$	$\pi_{14} = 0{,}02$	$\pi_{15} = -0{,}05$	$\pi_{16} = -0{,}01$
$\pi_{17} = -0{,}005$	$\pi_{18} = -0{,}01$	$\pi_{19} = 0{,}023$	

La Fig. 3.4.a muestra los resultados del proceso de identificación, donde las señales ν_l, ν_m, ν_n y ν_ω fueron obtenidas de experimentos reales, mientras que ν_{l_m}, ν_{m_m}, ν_{n_m} y ν_{ω_m} son los valores estimados del modelo. Debido a la presencia de ruido en las señales experimentales, que puede afectar el proceso de identificación, se aplicó un filtro de la forma:

$$H(s) = \frac{\lambda}{s + \lambda},$$

con $\lambda = 1$, para atenuar el ruido presente en las mediciones. Este filtro de paso bajo se aplicó a las variables del sistema transformando cada una en sus versiones filtradas $\boldsymbol{\nu}_{\text{filtrada}}(t)$, $\dot{\boldsymbol{\nu}}_{\text{filtrada}}(t)$, y $\boldsymbol{\mu}_{\text{filtrada}}(t)$. Matemáticamente, la aplicación del filtro se expresa como:

$$x_{\text{filtrada}}(t) = \int_0^t H(s)x(\tau)d\tau,$$

donde $\mathbf{x}(t)$ representa cualquiera de las señales de estado originales ($\boldsymbol{\nu}(t)$, $\dot{\boldsymbol{\nu}}(t)$, o $\boldsymbol{\mu}(t)$).

La validación de los parámetros dinámicos es un paso esencial, ya que el modelo debe ser capaz de replicar con precisión las dinámicas reales del sistema bajo diferentes condiciones de entrada. En la Fig. 3.4b se presentan las señales de validación, mostrando el rendimiento del modelo dinámico estimado.

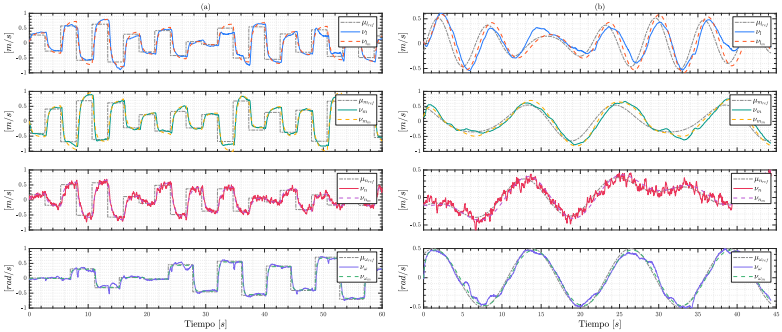


Figura 3.4: Identificación (**a**) y validación (**b**) del modelo simplificado por aproximación PD Euler-Lagrange

Con los resultados obtenidos y la validación de los parámetros dinámicos, se formula el modelo identificado utilizando Euler-Lagrange como una función vectorial:

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\mu}). \tag{3.55}$$

Más adelante, se presenta una comparativa con otros métodos de identificación paramétrica, evaluando su desempeño relativo en la representación precisa de las dinámicas simplificadas del sistema.

3.7.2. Modelo dinámico completo

De manera similar a lo anterior, el objetivo es minimizar el error cuadrático entre las fuerzas y torques generados por el modelo no lineal basado en Euler-Lagrange (Ecuación 3.46) y los generados por el modelo parametrizado (Ecuación 3.48), el cual utiliza los parámetros dinámicos y las constantes del controlador PD, representados por $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^{16}$, que encapsulan las propiedades dinámicas del UAV.

Se aplican técnicas de programación cuadrática de manera iterativa para ajustar los parámetros de las matrices diagonales $\bar{\mathbf{S}}_1, \bar{\mathbf{S}}_2, \bar{\mathbf{S}}_3, \bar{\mathbf{S}}_4, \bar{\mathbf{S}}_5$ hasta que la función de costo J alcance un mínimo. El problema de optimización se formula de la siguiente manera:

$$\min_{\boldsymbol{\xi}} \int_0^{t+t_f} J = \|\boldsymbol{\mathcal{T}} - \boldsymbol{\mathcal{T}}_{\text{PD}}(\boldsymbol{\xi})\|^2 \, dt$$

La presencia de ruido en las mediciones se aborda utilizando un filtro de paso bajo de la forma $\frac{\lambda}{s+\lambda}$, con $\lambda = 1$, aplicado tanto a las mediciones del sistema como a los valores de referencia. Esto asegura que el ruido no afecte el proceso de identificación, y dado que las derivadas temporales de $\dot{\mathbf{x}}(t)$ no se miden directamente, deben estimarse a partir de los datos del estado y pasar por el mismo filtro.

Las constantes identificadas que definen las matrices diagonales $\bar{\mathbf{S}}_i$ se presentan en la Tabla 3.3:

Tabla 3.3: Valores de ξ

$\xi_1 = 0{,}6756$	$\xi_2 = 1{,}0000$	$\xi_3 = 0{,}6344$	$\xi_4 = 1{,}0000$
$\xi_5 = 0{,}4080$	$\xi_6 = 1{,}0000$	$\xi_7 = 1{,}0000$	$\xi_8 = 1{,}0000$
$\xi_9 = 0{,}2953$	$\xi_{10} = 0{,}5941$	$\xi_{11} = -0{,}8109$	$\xi_{12} = 1{,}0000$
$\xi_{13} = 0{,}3984$	$\xi_{14} = 0{,}00546$	$\xi_{15} = 0{,}0035$	$\xi_{16} = 0{,}00659$

Las Fig. 3.5.a y 3.5.b muestran los resultados del proceso de identificación y validación, donde el sufijo *ref* se refiere a los valores de referencia recibidos por el UAV y el sufijo *PD* corresponde al modelo aproximado por Euler-Lagrange.

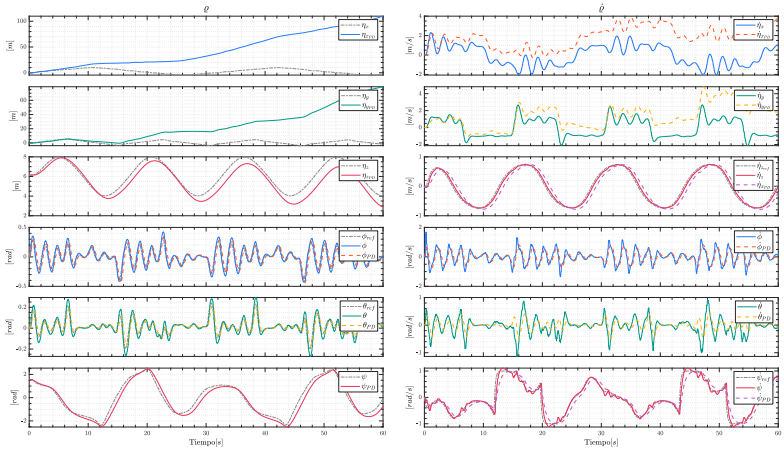


Figura 3.5: Identificación (**a**) y validación (**b**) del modelo completo por aproximación PD Euler-Lagrange

Estos resultados proporcionan la mejor aproximación del comportamiento dinámico del UAV y son adecuados para su uso en el modelado y diseño de MPC. La dinámica del sistema se caracteriza de manera concisa en función de las entradas de control, y el modelo identificado se formula como una función vectorial, dada por:

$$\dot{\mathbf{x}}_E = \mathbf{f}(\mathbf{x}_E, \mathbf{u}, \boldsymbol{\xi}). \tag{3.56}$$

3.8. Modelado dinámico paramétrico

En los últimos años, el modelado basado en datos ha cobrado relevancia en el diseño de controladores predictivos, especialmente en sistemas donde las dinámicas exactas son difíciles de identificar de manera analítica. A través de técnicas como DMDc, DMDc en linea, y SINDy, es posible derivar modelos dinámicos a partir de datos observacionales.

Para sistemas lineales o aproximadamente lineales, DMDc es una opción efectiva que permite capturar las dinámicas del sistema en tiempo real, adaptándose a cambios lentos mediante su versión online. Esto resulta

particularmente útil para implementar un MPC que requiere un modelo actualizado para predecir y controlar las futuras trayectorias del sistema.

Por otro lado, SINDy es adecuado para sistemas no lineales, como el modelo completo del cuadricóptero, permitiendo identificar ecuaciones diferenciales no lineales parsimoniosas que describen con precisión la dinámica del sistema. Al integrar este tipo de modelos en MPC, se logra un control eficiente en sistemas complejos, ya que el MPC basado en datos utiliza directamente las estructuras dinámicas identificadas para optimizar el control a lo largo del horizonte de predicción.

En conjunto, el enfoque basado en datos para la identificación dinámica y el MPC, conocido como *Data-Driven* MPC, proporciona un marco robusto que permite controlar sistemas complejos en entornos donde la incertidumbre y las dinámicas no lineales son predominantes. Este enfoque combina la flexibilidad de los modelos identificados por datos con la capacidad de optimización del MPC, lo que permite lograr un control eficiente y adaptativo.

3.8.1. Descomposición de Modo Dinámico con Control (DMDc)

En esta sección se presenta el enfoque de formulación del modelo dinámico, teniendo en cuenta que el cuadricóptero solo cuenta con controladores PID de bajo nivel y tiende a mantenerse cerca de la posición de vuelo estacionario, con pequeñas variaciones angulares en los ángulos de cabeceo y alabeo. Además, este tipo de plataformas comerciales no se controlan mediante comandos de torque, sino a través de las velocidades de maniobrabilidad de referencia $\boldsymbol{\mu}$ aplicadas al UAV.

Considerando las pequeñas variaciones angulares y las entradas del sistema, el modelo puede formularse como una aproximación lineal para sistemas que varían en el tiempo, resultando en la siguiente ecuación:

$$\dot{\boldsymbol{\nu}}(t) = \mathbf{A}\boldsymbol{\nu}(t) + \mathbf{B}\boldsymbol{\mu}(t), \tag{3.57}$$

donde $\boldsymbol{\nu}$ y $\dot{\boldsymbol{\nu}}$ son los vectores de velocidades y aceleraciones de maniobrabilidad, $\boldsymbol{\mu}$ es el vector de referencia de velocidad de maniobrabilidad (también conocido como vector de control), y las matrices $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{4\times4}$ y $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{4\times4}$ representan el sistema no forzado y la contribución del vector de control, respectivamente.

Una de las técnicas emergentes para identificar sistemas a partir de datos experimentales es el DMD, cuyo objetivo es aproximar las matrices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$. El algoritmo DMD propone la construcción de mediciones instantáneas y la formación de matrices aumentadas, resultando en una nueva formulación del sistema de la siguiente manera:

$$\dot{\boldsymbol{\chi}} \approx \mathbf{A}\boldsymbol{\chi} + \mathbf{B}\boldsymbol{\Gamma}, \tag{3.58}$$

donde las nuevas matrices se definen a continuación:

$$\dot{\boldsymbol{\chi}} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \dot{\boldsymbol{\nu}}_1 & \dot{\boldsymbol{\nu}}_2 & \dots & \dot{\boldsymbol{\nu}}_s \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\chi} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \boldsymbol{\nu}_1 & \boldsymbol{\nu}_2 & \dots & \boldsymbol{\nu}_s \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Gamma} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \boldsymbol{\mu}_1 & \boldsymbol{\mu}_2 & \dots & \boldsymbol{\mu}_s \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

$\dot{\boldsymbol{\chi}}$ y $\boldsymbol{\chi}$ son las matrices aumentadas que representan las aceleraciones y velocidades de maniobrabilidad, respectivamente; mientras que $\boldsymbol{\Gamma}$ es la matriz de las velocidades de referencia aplicadas al sistema en los s instantes de tiempo.

Para fines de estimación, el sistema puede formularse como:

$$\dot{\boldsymbol{\chi}} \approx \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Omega}, \tag{3.59}$$

donde $\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times(4+4)}$ es la matriz que contiene los valores desconocidos de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$, y $\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\chi} & \boldsymbol{\Gamma} \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{(4+4)\times s}$ es la matriz de datos obtenida del sistema.

Este trabajo encuentra los mejores valores de la matriz desconocida utilizando la norma de Frobenius $||\dot{\boldsymbol{\chi}} - \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Omega}||_F$, definiendo los valores en la siguiente ecuación:

$$\boldsymbol{\Phi} \approx \dot{\boldsymbol{\chi}}\boldsymbol{\Omega}^{\dagger}. \tag{3.60}$$

Uno de los métodos más efectivos para resolver la norma de Frobenius es la descomposición en valores singulares (SVD). Aplicando este método a la matriz de datos aumentada, se obtiene $\boldsymbol{\Omega} \approx \bar{\mathbf{U}}\bar{\boldsymbol{\Sigma}}\bar{\mathbf{V}}^T$, donde $\bar{\mathbf{U}}$, $\bar{\boldsymbol{\Sigma}}$ y

$\bar{\mathbf{V}}$ son matrices truncadas con un valor $\bar{r}$. Con estas consideraciones, la estimación se define mediante la ecuación:

$$\mathbf{\Phi} \approx \dot{\boldsymbol{\chi}} \bar{\mathbf{V}} \bar{\mathbf{\Sigma}}^{-1} \bar{\mathbf{U}}^{T}. \tag{3.61}$$

Para aproximar los valores de las matrices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$, la ecuación (3.61) puede escribirse como (3.62), considerando la separación de los valores del vector singular $\bar{\mathbf{U}}$:

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}} & \bar{\mathbf{B}} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\chi}} \bar{\mathbf{V}} \bar{\mathbf{\Sigma}}^{-1} \bar{\mathbf{U}}_1^{T} & \dot{\boldsymbol{\chi}} \bar{\mathbf{V}} \bar{\mathbf{\Sigma}}^{-1} \bar{\mathbf{U}}_2^{T} \end{bmatrix} \tag{3.62}$$

Los valores de la matriz $\mathbf{A}$ se aproximan utilizando la matriz dividida $\bar{\mathbf{U}}_1 \in \mathbb{R}^{4 \times \bar{r}}$, y los de $\mathbf{B}$ se obtienen mediante $\bar{\mathbf{U}}_2 \in \mathbb{R}^{4 \times \bar{r}}$.

Se presenta el proceso de identificación y validación del modelo dinámico utilizando la formulación DMD. Los valores de las matrices $\dot{\boldsymbol{\chi}}$, $\boldsymbol{\chi}$ y $\mathbf{\Gamma}$ se construyeron mediante mediciones instantáneas de la plataforma aérea y la aplicación del Algoritmo 1, que describe los pasos necesarios para identificar las matrices desconocidas.

Algoritmo 1 Proceso de Identificación usando DMDc

Requiere: Mediciones de $(\dot{\boldsymbol{\chi}}, \boldsymbol{\chi}, \mathbf{\Gamma})$ y valor de truncado $\bar{r}$.
Asegura: Matrices $\bar{\mathbf{A}}$ y $\bar{\mathbf{B}}$.
Para Cada conjunto de $(\dot{\boldsymbol{\chi}}, \boldsymbol{\chi}, \mathbf{\Gamma}, \bar{r})$ **hacer**
$\mathbf{\Omega} \leftarrow \begin{bmatrix} \boldsymbol{\chi} & \mathbf{\Gamma} \end{bmatrix}^{T}$
$(\mathbf{U}, \mathbf{\Sigma}, \mathbf{V}) \leftarrow \text{SVD}(\mathbf{\Omega})$
$(\bar{\mathbf{U}}, \bar{\mathbf{\Sigma}}, \bar{\mathbf{V}}) \leftarrow \text{Truncar}(\mathbf{U}, \mathbf{\Sigma}, \mathbf{V}, \bar{r})$
$(\bar{\mathbf{U}}_1, \bar{\mathbf{U}}_2) \leftarrow \text{Separar}(\bar{\mathbf{U}})$
$\bar{\mathbf{A}} \leftarrow \dot{\boldsymbol{\chi}} \bar{\mathbf{V}} \bar{\mathbf{\Sigma}}^{-1} \bar{\mathbf{U}}_1^{T}$
$\bar{\mathbf{B}} \leftarrow \dot{\boldsymbol{\chi}} \bar{\mathbf{V}} \bar{\mathbf{\Sigma}}^{-1} \bar{\mathbf{U}}_2^{T}$
Fin Para Retornar $(\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}})$

Los valores aproximados de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ se presentan en la Tabla 3.4, donde a_{ij} y b_{ij} representan los elementos individuales de cada una de las matrices, respectivamente.

Tabla 3.4: Valores de la matriz de estados (**A**) y la matriz de control (**B**)

Matriz A			
$a_{11} = -0{,}5827$	$a_{12} = -0{,}0721$	$a_{13} = 0{,}0587$	$a_{14} = -0{,}0280$
$a_{21} = 0{,}0214$	$a_{22} = -0{,}4770$	$a_{23} = 0{,}0731$	$a_{24} = -0{,}1840$
$a_{31} = 0{,}0152$	$a_{32} = 0{,}0102$	$a_{33} = -3{,}5696$	$a_{34} = 0{,}0064$
$a_{41} = 0{,}0377$	$a_{42} = -0{,}0113$	$a_{43} = -0{,}0058$	$a_{44} = -8{,}2424$
Matriz B			
$b_{11} = 0{,}8048$	$b_{12} = -0{,}0376$	$b_{13} = -0{,}0793$	$b_{14} = -0{,}1797$
$b_{21} = 0{,}0634$	$b_{22} = 0{,}8527$	$b_{23} = -0{,}0783$	$b_{24} = 0{,}3821$
$b_{31} = -0{,}0202$	$b_{32} = -0{,}0046$	$b_{33} = 3{,}5776$	$b_{34} = 0{,}0607$
$b_{41} = -0{,}0251$	$b_{42} = -0{,}0029$	$b_{43} = -0{,}0288$	$b_{44} = 8{,}1294$

Las señales utilizadas para el proceso de identificación se muestran en la Fig. 3.6 a, y son las mismas que se emplearon en el proceso de identificación mediante la formulación de Euler-Lagrange, ya que ambas técnicas necesitan estimar los valores bajo las mismas condiciones para un análisis comparativo posterior.

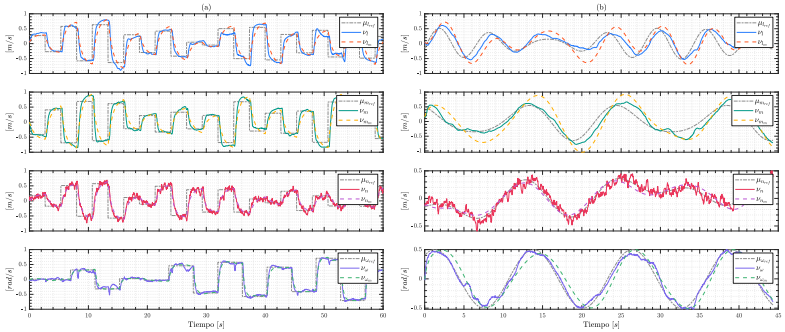


Figura 3.6: Identificación (**a**) y validación (**b**) del modelo simplificado por DMDc

El proceso de validación se observa en la Fig. 3.6 b, donde se puede apreciar claramente cómo el modelo estimado replica con precisión las señales experimentales, mostrando un buen ajuste entre las señales medidas y las predichas por el modelo identificado. Esto demuestra la robustez de

la formulación DMD en presencia de ruido y su capacidad para capturar las dinámicas del sistema.

Finalmente, considerando los valores aproximados de las matrices desconocidas, el modelo dinámico puede expresarse en forma de función vectorial como:

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \mathbf{f}_{DMD}(\boldsymbol{\Gamma}, \boldsymbol{\chi}) \tag{3.63}$$

Métricas de Identificación PD y DMD

Las métricas de identificación para los métodos de formulacion PD y DMD, presentadas en la Tabla 3.5, muestran que Optimización logra mayor precisión y concordancia en todos los estados ν_l, ν_m, ν_n y ν_ω. El RMSE global es menor en Optimización (0.5019 vs. 0.5828 en DMD), al igual que el MAE (0.5510 frente a 0.6745), lo que indica un error promedio más bajo y una mayor consistencia.

El índice de concordancia global también favorece al modelo PD (0.6493 vs. 0.5271), sugiriendo un mejor ajuste a la variabilidad de los datos de referencia. A nivel individual, cada estado muestra valores más bajos de RMSE y MAE para Optimización, siendo ν_ω el de mayor ventaja, con un índice de concordancia de 0.9017 frente a 0.8429 en DMD.

Tabla 3.5: Métricas de Identificación: PD vs DMD

	RMSE		**MAE**		**Concordance Index**	
State	**SQP**	**DMD**	**SQP**	**DMD**	**SQP**	**DMD**
ν_l	0.2904	0.3470	0.1783	0.2250	0.5624	0.3754
ν_m	0.3149	0.3599	0.1992	0.2287	0.5417	0.4014
ν_n	0.2235	0.2455	0.1242	0.1506	0.5895	0.5046
ν_ω	0.1357	0.1715	0.0493	0.0702	0.9017	0.8429
$\boldsymbol{\nu}$	**0.5019**	**0.5828**	**0.5510**	**0.6745**	**0.6493**	**0.5271**

3.8.2. DMDc Ventaneado (Windowed DMDc)

A diferencia de DMDc, que considera todas las instantáneas del experimento y tiene acceso a conjuntos de datos con un gran número de estados y entradas de control, este trabajo explora un algoritmo que actualiza un pequeño número de mediciones con el objetivo de modelar y controlar la

dinámica del sistema. La meta es encontrar modelos adaptables que puedan hacer frente a perturbaciones y errores de modelado.

La intención de esta sección es identificar un sistema lineal en tiempo discreto dado por:

$$\boldsymbol{\nu}_{k+1} = \mathbf{A}\boldsymbol{\nu}_k + \mathbf{B}\boldsymbol{\mu}_k. \tag{3.64}$$

En el instante k, se tiene acceso a un conjunto de pares de instantáneas pasadas, que consisten en (ν_i, μ_i) desde $k - w + 1$ hasta k, donde w es el tamaño del período de tiempo limitado. La idea conceptual es aproximar el modelo no lineal $\bar{\Lambda}_k$ tal que $\bar{\mathbf{Y}}_k = \bar{\mathbf{\Lambda}}_k \bar{\mathbf{X}}_k$ para todos los i en la "ventana-w, dejando que:

$$\bar{\mathbf{Y}}_k = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\nu}_{k-w+2} & \boldsymbol{\nu}_{k-w+3} & \cdots & \boldsymbol{\nu}_{k+1} \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{X}}_k = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\nu}_{k-w+1} & \boldsymbol{\nu}_{k-w+2} & \cdots & \boldsymbol{\nu}_k \\ \boldsymbol{\mu}_{k-w+1} & \boldsymbol{\mu}_{k-w+2} & \cdots & \boldsymbol{\mu}_k \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{\Lambda}}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_k & \mathbf{B}_k \end{bmatrix}$$

La matriz $\bar{\mathbf{\Lambda}}_k$ se puede encontrar minimizando la función de costo de error:

$$G_k = ||\bar{\mathbf{Y}}_k - \bar{\mathbf{\Lambda}}_k \bar{\mathbf{X}}_k||_F^2 \tag{3.65}$$

Asumiendo que el rango de $\bar{\mathbf{X}}_k$ es $n \leq w$, existe una solución única para el problema de mínimos cuadrados, que está determinada por:

$$\bar{\mathbf{\Lambda}}_k = \bar{\mathbf{Y}}_k \bar{\mathbf{X}}_k^{\dagger}. \tag{3.66}$$

Sin embargo, calcular una nueva pseudoinversa y una multiplicación de matrices en cada paso de tiempo son operaciones que requieren muchos recursos. Esta actualización puede realizarse de manera más eficiente utilizando un método similar, descrito a continuación.

La ecuación (3.66) puede reescribirse como:

$$\bar{\mathbf{\Lambda}}_k = \mathbf{Q}_k \mathbf{P}_k, \tag{3.67}$$

donde $\mathbf{Q}_k = \bar{\mathbf{Y}}_k \bar{\mathbf{X}}_k^* \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $\mathbf{P}_k = (\bar{\mathbf{X}}_k \bar{\mathbf{X}}_k^*)^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. En el instante k, el valor de $\mathbf{A}_k$ depende de las w instantáneas más recientes. Consecuentemente e intuitivamente, se sigue que en el paso $k + 1$ es necesario calcular la expresión:

$$\bar{\mathbf{\Lambda}}_{k+1} = \mathbf{Q}_{k+1} \mathbf{P}_{k+1} \tag{3.68}$$

El uso de la fórmula de Sherman-Morrison para actualizar $\mathbf{Q}_k$ y $\mathbf{P}_k$ fue presentado en [47] de la siguiente manera:

$$\mathbf{Q}_{k+1} = \mathbf{Q}_k + \mathbf{V}\mathbf{C}\mathbf{U}^\intercal \tag{3.69}$$

$$\mathbf{P}_{k+1} = (\mathbf{P}_k^{-1} + \mathbf{U}\mathbf{C}\mathbf{U}^*)^{-1}, \tag{3.70}$$

donde $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{w\times w}$ es una matriz identidad con su primer componente $C_{11} = -1$,

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{\nu}}_{k-w+2} & \cdots & \bar{\boldsymbol{\nu}}_{k+1} \\ \boldsymbol{\mu}_{k-w+1} & \cdots & \boldsymbol{\mu}_k \end{bmatrix}, \ \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\nu}_{k-w+2} & \cdots & \boldsymbol{\nu}_{k+1} \end{bmatrix},$$

donde $\bar{\boldsymbol{\nu}}$ es la velocidad estimada obtenida de (3.64). Al sustituir las ecuaciones (3.69) y (3.70) en (3.68) se obtiene la expresión que actualiza $\bar{\mathbf{\Lambda}}_k$ para la siguiente iteración.

$$\bar{\mathbf{\Lambda}}_{k+1} = (\mathbf{Q}_k + \mathbf{V}\mathbf{C}\mathbf{U}^*)(\mathbf{P}_k^{-1} + \mathbf{U}\mathbf{C}\mathbf{U}^*)^{-1} \tag{3.71}$$

Considerando el lema de inversión de matrices [48] aplicado a $\mathbf{P}_{k+1}$, la ecuación (7.17) puede reescribirse como:

$$\bar{\mathbf{\Lambda}}_{k+1} = (\mathbf{Q}_k + \mathbf{V}\mathbf{C}\mathbf{U}^\intercal)\left[\mathbf{P}_k - \mathbf{P}_k\mathbf{U}\mathbf{\Gamma}_{k+1}\mathbf{U}^\intercal\mathbf{P}_k\right],$$

donde $\mathbf{\Gamma}_{k+1} = (\mathbf{C}^{-1} + \mathbf{U}^\intercal\mathbf{P}_k\mathbf{U})^{-1}$. Resolviendo de forma algebraica y simplificando los términos se obtiene:

$$\bar{\mathbf{\Lambda}}_{k+1} = \mathbf{Q}_k\mathbf{P}_k - \mathbf{Q}_k\mathbf{P}_k\mathbf{U}\mathbf{\Gamma}_{k+1}\mathbf{U}^\intercal\mathbf{P}_k + \mathbf{V}\mathbf{\Gamma}_{k+1}\mathbf{U}^\intercal\mathbf{P}_k \tag{3.72}$$

Finalmente, (3.67) se sustituye en (3.72) y se obtiene la fórmula de actualización para calcular $\bar{\mathbf{\Lambda}}_{k+1}$ dados $\mathbf{A}_k$ y $\mathbf{P}_k$.

$$\bar{\mathbf{\Lambda}}_{k+1} = \bar{\mathbf{\Lambda}}_k + (\mathbf{V} - \bar{\mathbf{\Lambda}}_k\mathbf{U})\mathbf{\Gamma}_{k+1}\mathbf{U}^\intercal\mathbf{P}_k \tag{3.73}$$

Para iniciar esta predicción de modelo en el paso $k+1$, es necesario inicializar el algoritmo usando el cálculo del DMDc estándar fuera de linea definido en (3.66) para establecer los valores iniciales de las matrices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$.

La Fig. 3.7 muestra la efectividad del modelo Windowed DMDc en capturar la dinámica real del sistema, utilizando un conjunto de datos medido en una ventana de $w = 6$ instantáneas para la identificación. Los

resultados muestran un buen ajuste con los datos medidos, lo que indica la capacidad del modelo para capturar la dinámica subyacente del sistema y su desempeño preciso en reflejar esta dinámica.

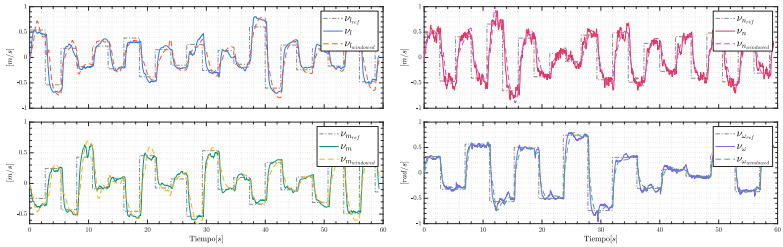


Figura 3.7: Identificación del modelo simplificado por Windowed DMDc

3.8.3. SINDy

El método de SINDy proporciona un marco basado en datos para identificar modelos parsimoniosos de sistemas dinámicos [49]. La suposición principal de SINDy es que la mayoría de los sistemas dinámicos pueden representarse utilizando solo unos pocos términos activos, mientras que la mayoría de las posibles funciones candidatas permanecen inactivas. Este enfoque aprovecha técnicas de regresión parcimoniosa para seleccionar los términos más relevantes en las ecuaciones gobernantes del sistema.

Formulación matemática

Consideremos un sistema dinámico no lineal regido por la ecuación diferencial ordinaria (ODE):

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)),$$

donde $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^q$ es la entrada de control, y $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ representa las dinámicas no lineales. El objetivo de SINDy es encontrar una aproximación parcimoniosa de $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ utilizando datos de series temporales de $\mathbf{x}(t)$ y sus derivadas $\dot{\mathbf{x}}(t)$.

El objetivo es expresar $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ como una combinación lineal y escasa de las columnas de $\mathbf{\Psi}(\mathbf{X}, \mathbf{U})$. Esto lleva a la siguiente aproximación:

$$\dot{\mathbf{X}} \approx \mathbf{\Psi}(\mathbf{X}, \mathbf{U})\mathbf{\Xi}, \tag{3.74}$$

donde $\dot{\mathbf{X}} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ contiene las derivadas temporales de los estados, $\Psi(\mathbf{X}, \mathbf{U}) \in \mathbb{R}^{m \times p}$ es la evaluación de la biblioteca de funciones sobre el conjunto de datos, donde p es el número de funciones candidatas; $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{m \times q}$ contiene los datos de las entradas de control, y $\boldsymbol{\Xi} \in \mathbb{R}^{p \times n}$ es la matriz escasa que incluye tanto las dinámicas del sistema como los efectos de las entradas de control.

Al incluir términos de control en la biblioteca de funciones, SINDy puede identificar la influencia de fuerzas externas o acciones de control en la dinámica del sistema, lo que lo hace adecuado para aplicaciones en robótica, sistemas autónomos y teoría de control.

La biblioteca de funciones candidatas puede incluir funciones polinómicas, trigonométricas y otras funciones no lineales de los estados $\mathbf{x}(t)$ y puede expresarse como:

$$\boldsymbol{\Psi} = \left[1 \ \mathbf{x} \ \mathbf{u} \ \mathbf{x}^2 \ \mathbf{xu} \ \sin(\mathbf{x}) \ \cos(\mathbf{x}) \ \mathbf{x}\sin(\mathbf{x}) \ \mathbf{x}\cos(\mathbf{x})\right]$$

Para determinar $\boldsymbol{\Xi}$, se formula un problema de regresión escasa como:

$$\min_{\boldsymbol{\Xi}} \|\dot{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{X}, \mathbf{U})\boldsymbol{\Xi}\|_2^2 + \lambda\|\boldsymbol{\Xi}\|_1$$

Por lo tanto, las dinámicas completas identificadas con control son:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} = \underbrace{\Xi_1}_{\text{Constante}} + \underbrace{\Xi_2\mathbf{x}}_{\text{Lineal}} + \underbrace{\Xi_3\mathbf{u}}_{\text{Control}} + \underbrace{\Xi_4\mathbf{x}^2}_{\text{Cuadrático}} + \underbrace{\Xi_6\mathbf{xu}}_{\text{Términos Cruzados}} + \\ \underbrace{\Xi_7\sin(\mathbf{x}) + \Xi_8\cos(\mathbf{x})}_{\text{Trigonométrico}} + \underbrace{\Xi_9\mathbf{x}\sin(\mathbf{x}) + \Xi_{10}\mathbf{x}\cos(\mathbf{x})}_{\text{Mixto}}.\end{aligned} \tag{3.75}$$

donde los términos Ξ_i representan interacciones constantes, lineales, cuadráticas, cruzadas y trigonométricas entre el vector de estados, las entradas de control y los ángulos de Euler, capturando las dinámicas esenciales y los efectos del control.

En aplicaciones prácticas, las derivadas temporales $\dot{\mathbf{x}}(t)$ no se miden directamente y deben calcularse mediante la diferenciación numérica de los datos del estado.

Aproximación SINDy

Dado el conjunto de datos de estados $\mathbf{x}(t)$, entradas de control $\mathbf{u}(t)$ y derivadas numéricas calculadas $\dot{\mathbf{x}}(t)$, el algoritmo SINDy produce una

matriz de coeficientes dispersa $\boldsymbol{\Xi}$, que contiene principalmente ceros, con entradas no nulas que corresponden a los términos activos que describen la dinámica real del sistema. Esta matriz identifica los términos relevantes en la biblioteca de funciones $\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{X}, \mathbf{U})$ que contribuyen a la dinámica. Este trabajo empleó técnicas de diferenciación numérica y métodos de suavizado, como el filtro de Savitzky-Golay, para obtener $\dot{\mathbf{x}}(t)$, siguiendo el enfoque presentado en [50].

La biblioteca de funciones $\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{X}, \mathbf{U})$ se redujo para equilibrar la simplicidad y expresividad en la dinámica identificada. Esta reducción se basa en las siguientes consideraciones:

1. Dominio de términos lineales y trigonométricos:
   La dinámica se captura principalmente mediante términos lineales ($\Xi_2\mathbf{x}$) y términos trigonométricos ($\Xi_7 \sin(\boldsymbol{\Theta}), \Xi_8 \cos(\boldsymbol{\Theta})$), los cuales representan las interacciones clave en el sistema.

2. Inclusión de entradas de control:
   Las entradas de control ($\Xi_3\mathbf{u}$) representan fuerzas externas o acciones de control que influyen en la dinámica.

3. Exclusión de términos de orden superior:
   Los términos cuadráticos ($\Xi_4\mathbf{x}^2$), términos cruzados ($\Xi_6\mathbf{xu}$) y términos mixtos ($\Xi_9\mathbf{x}\sin(\mathbf{x}),\ \Xi_{10}\mathbf{x}\cos(\mathbf{x})$) fueron excluidos debido a su contribución insignificante dentro del rango de operación, lo que simplifica el modelo.

La matriz resultante $\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{X}, \mathbf{U})$ contiene:

$$\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{X}, \mathbf{U}) = \begin{bmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{u} & \sin(\boldsymbol{\Theta}) & \cos(\boldsymbol{\Theta}) \end{bmatrix}.$$

Esta estructura conserva la dinámica dominante mientras garantiza que el modelo sea interpretable, eficiente y generalizable a escenarios no vistos.

El problema se resuelve utilizando el método de optimización *Sparse Relaxed Regularized Regression* (SR3), que aplica regularización l_1 y l_2 para imponer dispersión. SR3 se alinea bien con el objetivo deseado, ya que promueve un modelo parsimonioso eliminando términos insignificantes [50, 51].

Mientras que métodos alternativos como STLSQ usan regularización l_2 (Ridge), SR3 garantiza una mejor dispersión introduciendo un mecanismo

de umbral y una ganancia de regularización $\lambda = 0{,}05$, lo que da como resultado un modelo compacto para $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$.

Como se muestra en la Figura 3.8, las contribuciones de los términos en $\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{X}, \mathbf{U})$ revelan que los estados angulares ϕ (balanceo) y θ (cabeceo) dominan la dinámica del sistema. Las interacciones trigonométricas también son significativas, lo que refleja su papel en la captura de comportamientos no lineales. Además, las entradas de control contribuyen a la estabilización y corrección del sistema, enfatizando la influencia crítica de estos términos en la dinámica representada por $\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{X}, \mathbf{U})$.

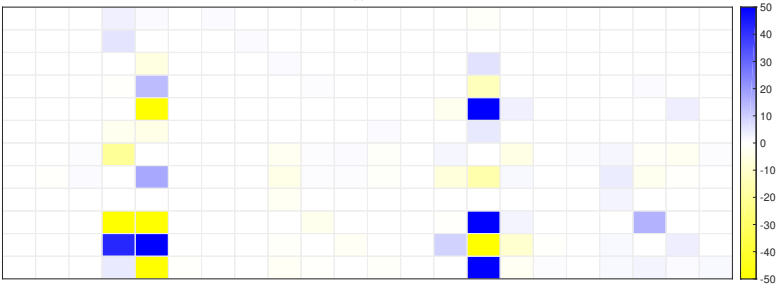


Figura 3.8: Mapa de calor de la matriz dispersa $\boldsymbol{\Xi}^{\intercal}$ de $\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{X}, \mathbf{U})$

La Fig. 3.9 muestra los resultados del proceso de identificación, donde el sufijo *ref* se refiere a los valores de referencia recibidos por el UAV, el sufijo *sindy* se refiere a los valores generados por el modelo identificado con SINDy.

Métricas de identificación no lineal PD y Sindy

La Tabla 3.6 presenta una comparación de los valores de RMSE, MAE e Índice de Concordancia para ambos modelos, SINDy y PD. La comparación se realiza específicamente para cada estado, así como de manera global para todo el vector de estados.

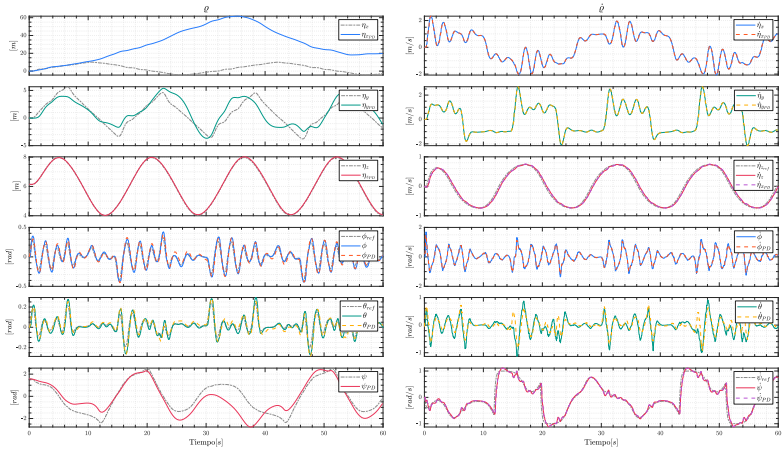


Figura 3.9: Identificación (**a**) y validación (**b**) del modelo completo por SINDy

Tabla 3.6: Métricas comparativas para modelado por SINDy y PD.

	RMSE		**MAE**		**Concordance Index**	
State	**SINDy**	**PD**	**SINDy**	**PD**	**SINDy**	**PD**
η_x	33.1389	53.4461	27.1978	41.6780	0.1300	0.0887
η_y	1.2704	32.8757	1.0249	23.7101	0.7435	0.0779
η_z	0.0399	0.6811	0.0334	0.5703	0.9861	0.7705
$\dot{\eta}_x$	0.0179	1.0154	0.0133	0.9151	0.9927	0.1133
$\dot{\eta}_y$	0.0252	1.1049	0.0172	1.0193	0.9916	0.0515
$\dot{\eta}_z$	0.0042	1.1453	0.0035	0.9436	0.9964	0.4652
ϕ	0.0290	2.1226	0.0231	1.8431	0.9075	0.0575
θ	0.0238	1.9420	0.0194	1.5267	0.8333	0.0355
ψ	0.8033	0.9464	0.6057	0.7830	0.7498	0.5414
$\dot{\phi}$	0.0438	0.2639	0.0285	0.1991	0.9597	0.6997
$\dot{\theta}$	0.1788	0.2468	0.1224	0.1714	0.6744	0.4701
$\dot{\psi}$	0.0049	0.1684	0.0033	0.1343	0.9966	0.8588
x	**9.5764**	**18.1445**	**2.4244**	**6.1245**	**0.8301**	**0.3525**

Consideraciones finales

El modelado del cuadricóptero presentado en este capítulo constituye un pilar fundamental para el desarrollo de un control predictivo de alta precisión, ya que la efectividad de cualquier controlador predictivo depende de la fidelidad y robustez del modelo utilizado. Se han explorado tanto modelos simplificados como completos, lo cual permite optar por enfoques lineales o no lineales en función de los requisitos específicos de control y los recursos computacionales disponibles.

El modelo cinemático y dinámico simplificado es ideal para aplicaciones en tiempo real que requieren un modelo ligero y eficiente, adecuado para controladores predictivos lineales. En contraste, el modelo dinámico completo ofrece una representación detallada de las interacciones no lineales del sistema, lo que lo convierte en una base sólida para controladores predictivos no lineales en escenarios donde se demanda mayor fidelidad.

Además, se han explorado enfoques basados en datos como DMDc y SINDy, los cuales, aunque no replican completamente un modelo dinámico detallado, permiten estimar con precisión los estados futuros. Esta capacidad predictiva es clave para optimizar el rendimiento del NMPC, anticipando el comportamiento del sistema y ajustando las acciones de control de manera óptima.

En conjunto, este capítulo resalta la importancia de contar con un modelado preciso y flexible para implementar controladores predictivos efectivos, asegurando un control robusto de la dinámica del cuadricóptero.

CAPÍTULO 4

Control Predictivo basado en Modelo

4 Control Predictivo Basado en Modelo

4.1. Introducción

El control predictivo basado en modelo es una técnica de control avanzada que ha ganado popularidad en la última década debido a su capacidad para manejar sistemas multivariables, imponer restricciones y optimizar el desempeño en tiempo real. MPC es ampliamente utilizado en diversas áreas, especialmente en sistemas donde la precisión y la estabilidad son cruciales, como es el caso de los UAVs, y en particular, los cuadricópteros.

La principal ventaja del MPC radica en su habilidad para anticipar el comportamiento futuro del sistema mediante la solución de un Problema de Control óptimo (OCP) en cada instante de tiempo. Esto permite al controlador generar secuencias de control óptimas basadas en un horizonte de predicción, minimizando una función de costo que considera tanto el seguimiento de una trayectoria deseada como el esfuerzo de control requerido.

Además de su precisión, MPC es capaz de manejar restricciones tanto en los estados del sistema como en las acciones de control, lo cual es particularmente útil en el control de cuadricópteros, donde las limitaciones físicas como ángulos de inclinación, velocidades y aceleraciones máximas deben respetarse para garantizar un funcionamiento seguro y estable.

La capacidad del MPC para adaptarse y reaccionar a cambios en el entorno lo hace ideal para su aplicación en entornos parcialmente estructurados, donde se presentan desafíos adicionales debido a la presencia de obstáculos y la variabilidad del entorno. En estas condiciones, el MPC permite ajustar la trayectoria y los esfuerzos de control de forma óptima, manteniendo al cuadricóptero en el curso deseado mientras evita colisiones y cumple con los requisitos de la misión.

Esta sección se enfocará en desarrollar una comprensión de los funda-

mentos de MPC, incluyendo su formulación general como un problema de control óptimo, y sentará las bases para su implementación específica en el control de cuadricópteros. El esquema general de cómo se aborda el problema para el seguimiento de una referencia se muestra en la Fig. 4.1 y se fundamenta en los siguientes pasos:

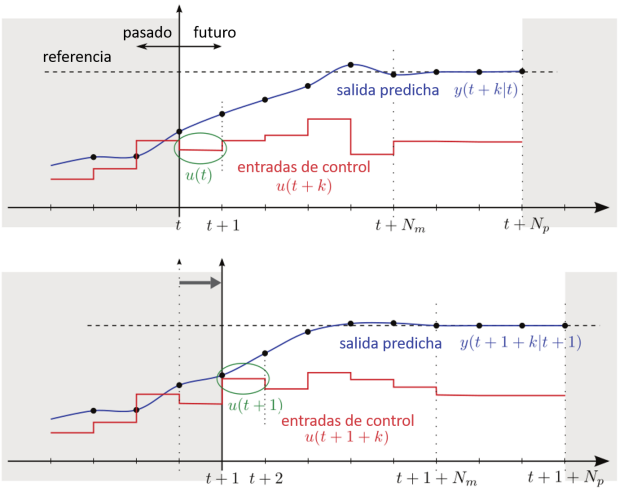


Figura 4.1: Esquema de funcionamiento del MPC

1. **Resolución de un OCP en cada instante de muestreo (t)**: En el tiempo t, se inicia la resolución de un problema de control óptimo con un horizonte de predicción que abarca un período futuro, generalmente denotado como N. Este problema tiene como objetivo determinar la mejor secuencia de comandos de control para el horizonte de predicción actual, que se extiende en $l \in [t, t+N]$, es decir, desde t hasta $t+N$.

2. **Aplicación del control óptimo en el intervalo [t, $t+1$]**: El resultado del OCP proporciona una secuencia de comandos de control óptimos. El controlador aplica el primer comando de esta secuencia en el sistema durante un intervalo breve, desde t hasta $t+1$. Este período es conocido como el horizonte de control y la acción de control óptima se aplica únicamente durante este intervalo.

3. **Resolución de un nuevo OCP en el instante** $(t + 1)$: Luego de la aplicación del control óptimo en el intervalo $[t, t + 1]$, el controlador recopila nuevas mediciones del estado del sistema en $t + 1$. Estas mediciones actualizan la comprensión del estado actual del sistema.

4. **Controlador Predictivo Basado en Modelo**: Utilizando las mediciones actualizadas, el controlador resuelve un nuevo problema OCP, pero esta vez, el horizonte de predicción comienza en $t + 1$ y se extiende hacia el futuro hasta $t + 1 + N$. Este proceso se repite en cada instante de muestreo, lo que da como resultado a la formulación del control predictivo.

Este enfoque permite una adaptación dinámica del control en tiempo real. Cada resolución de OCP tiene en cuenta las condiciones cambiantes del sistema, lo que lo hace especialmente efectivo en el control de sistemas dinámicos, como los cuadricópteros. La estrategia se caracteriza por su capacidad para proporcionar respuestas precisas y adaptables a medida que el sistema se mueve y se enfrenta a diferentes situaciones durante su operación.

4.2. MPC como problema de control óptimo

El MPC se basa en la resolución iterativa de un OCP en tiempo real. En cada instante, el controlador minimiza una función de costo definida sobre un horizonte de predicción, anticipando la evolución futura del sistema para determinar las acciones óptimas. Este proceso se realiza sujeto a las dinámicas del sistema y a las restricciones operativas impuestas en los estados y las acciones de control.

Sea el sistema dinámico del cuadricóptero, definido por una ecuación diferencial que describe la evolución de sus estados:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = f(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t)),$$

donde $\boldsymbol{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado en el tiempo t, $\boldsymbol{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ es el control, y $f(\cdot)$ es una función no lineal que describe la dinámica del sistema.

La formulación general de un OCP se puede expresar matemáticamente como:

$$\min_{\boldsymbol{u}} \int_{t}^{t+T} J(\boldsymbol{x}(s), \boldsymbol{u}(s))\, ds, \tag{4.1}$$

sujeto a:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}(t) &= f(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t)), \\ \boldsymbol{x}(0) &= \boldsymbol{x}_0, \\ \boldsymbol{x}(t) &\in \mathcal{X}, \\ \boldsymbol{u}(t) &\in \mathcal{U}. \end{aligned}$$

donde J es la función de costo que evalúa el desempeño del sistema, $\mathcal{U}$ es el conjunto admisible de controles, $\mathcal{X}$ es el conjunto admisible de estados y $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$ representa las condiciones iniciales.

Esta formulación permite definir el control óptimo sobre un horizonte de predicción T, proporcionando una secuencia de control que minimiza J bajo las restricciones definidas. Además, las restricciones en MPC suelen incluir límites físicos y de seguridad en los estados y en las acciones de control. Estas restricciones aseguran que el sistema opere dentro de un rango seguro, respetando las capacidades físicas del cuadricóptero, como los ángulos máximos de inclinación y los límites de aceleración.

Función de Costo

La función de costo en MPC juega un rol fundamental en la determinación del comportamiento del controlador. Típicamente, esta función combina dos tipos de términos: un costo intermedio y un costo final. Estos dos términos trabajan juntos para asegurar tanto el seguimiento preciso de la trayectoria como la eficiencia en el uso del control.

Costo Intermedio: Este término, definido como una integral acumulativa sobre el horizonte de predicción, penaliza el error $\tilde{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}_{\text{ref}}(t)$ en cada instante t, así como el esfuerzo de control $\boldsymbol{u}(t)$. La penalización del error a lo largo del horizonte permite al controlador corregir el curso progresivamente y mantenerse lo más cerca posible de la trayectoria de referencia en todo momento. A su vez, el esfuerzo de control está penalizado para evitar acciones de control bruscas o excesivas, promoviendo un

comportamiento de control suave y eficiente. La ecuación (4.2) define una función de costo intermedia $\boldsymbol{\ell}_t$:

$$\boldsymbol{\ell}_t(\tilde{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{u}) = \frac{1}{2} \|\tilde{\boldsymbol{x}}\|^2_{\mathbf{Q}} + \frac{1}{2} \|\boldsymbol{\mu}\|^2_{\mathbf{R}} \tag{4.2}$$

Costo Final: Este término penaliza la desviación del estado final $\tilde{\boldsymbol{x}}(N) = \boldsymbol{x}(N) - \boldsymbol{x}_{\text{ref}}(N)$ en el instante final N del horizonte de predicción. El costo final es especialmente importante cuando el objetivo es llevar el sistema a un estado específico al final del horizonte. En el último instante de tiempo, la ecuación (4.3) define la función de costo de predicción final $\boldsymbol{\ell}_f$,

$$\boldsymbol{\ell}_f(\tilde{\boldsymbol{\eta}}_N) = \frac{1}{2} \|\tilde{\boldsymbol{\eta}}_N\|^2_{\mathbf{Q}} \tag{4.3}$$

La función de costo completa en MPC, combinando ambos términos, puede expresarse como:

$$J(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = \frac{1}{2} \int_0^T \left(\|\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}_{\text{ref}}(t)\|^2_Q + \|\boldsymbol{u}(t)\|^2_R \right) dt + \frac{1}{2} \|\boldsymbol{x}(T) - \boldsymbol{x}_{\text{ref}}(T)\|^2_{Q_f}$$

donde:

- $\boldsymbol{x}_{\text{ref}}(t)$ es la trayectoria de referencia para el estado,
- $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz simétrica positiva que pondera el costo asociado a los estados,
- $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$ es una matriz simétrica positiva que pondera el costo asociado a las acciones de control,
- $Q_f \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de costo final para penalizar el error en el estado al final del horizonte T,
- $\|\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}_{\text{ref}}(t)\|^2_Q = (\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}_{\text{ref}}(t))^T Q (\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}_{\text{ref}}(t))$ representa la norma cuadrada ponderada.
- $\|\boldsymbol{u}(t)\|^2_R$: Penaliza las acciones de control grandes, ponderado por R.

La combinación del costo intermedio y el costo final permite que el controlador logre un equilibrio entre el seguimiento continuo de la trayectoria deseada y la minimización del error en el estado final, asegurando que el sistema siga la referencia de manera óptima a lo largo de todo el horizonte de predicción.

4.3. Programación No Lineal en el MPC

Para implementar un MPC en tiempo real, el problema de OCP planteado en su forma continua debe convertirse en un problema de optimización discreto que pueda resolverse mediante técnicas de programación matemática. Esta transformación permite al controlador obtener la secuencia de control óptima en un horizonte de predicción definido. En general, esta conversión de un OCP en un problema de Programación No Lineal (NLP) se realiza mediante la discretización directa o métodos de shooting (disparo).

Discretización Directa del OCP

El primer paso en la conversión de un OCP a un NLP es la discretización. El horizonte de predicción continuo T se divide en un conjunto de pasos de tiempo discretos $\{t_0, t_1, \ldots, t_N\}$. Esto transforma las ecuaciones diferenciales en ecuaciones en diferencias y convierte la función de costo continua en una suma discreta.

El problema de control óptimo discreto se puede formular como:

$$\min_{\boldsymbol{u}_k} \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}_{\text{ref},k}\|_Q^2 + \|\boldsymbol{u}_k\|_R^2 \right) + \frac{1}{2} \|\boldsymbol{x}_N - \boldsymbol{x}_{\text{ref},N}\|_{Q_f}^2$$

sujeto a:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_{k+1} &= f(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{u}_k), \\ \boldsymbol{x}_0 &= \boldsymbol{x}(0) \\ \boldsymbol{x}_k &\in \mathcal{X}, \\ \boldsymbol{u}_k &\in \mathcal{U}, \quad \text{para } k = 0, \ldots, N-1 \end{aligned}$$

Este enfoque funciona bien para sistemas simples o lineales. Sin embargo, para sistemas no lineales complejos, es posible que los errores acumulativos en la integración de la dinámica generen inconsistencias. En estos casos, se utilizan los métodos de disparo para mejorar la precisión y robustez.

Métodos de Shooting (Disparo)

Para sistemas altamente no lineales o bajo condiciones iniciales variables, los métodos de disparo ofrecen una solución más robusta al manejar la integración numérica de la dinámica del sistema, los más utilizados son:

- **Single Shooting (Disparo Simple):** En este método, solo se optimizan las variables de control $\boldsymbol{u}$, y los estados se calculan a través de la integración de la dinámica del sistema a partir de las condiciones iniciales. Aunque es más sencillo y reduce la cantidad de variables de optimización, puede ser ineficiente para sistemas no lineales con restricciones de estado complejas, debido a posibles errores acumulados en la integración.
- **Multiple Shooting (Disparo Múltiple):** En este enfoque, tanto los estados como los controles se tratan como variables de optimización en cada paso de tiempo. Además de las restricciones dinámicas, se agregan restricciones de continuidad que aseguran que los estados sean consistentes a lo largo del horizonte. Este enfoque es especialmente adecuado para sistemas no lineales complejos, ya que permite ajustes en cada subintervalo, evitando errores acumulados y garantizando mayor estabilidad.

Estos métodos convierten el OCP en un problema de programación no lineal, donde se optimiza una función objetivo sujeta a restricciones en las variables de decisión (estados y controles) en cada paso de tiempo.

Estructura general de un Problema de Programación No Lineal

Después de aplicar el método de disparo, el problema de control óptimo se reformula como un NLP, que puede expresarse de la siguiente manera:

$$\min_{\boldsymbol{w}} \ \Phi(\boldsymbol{w})$$

sujeto a:

$$g_1(\boldsymbol{w}) \leq 0,$$
$$g_2(\boldsymbol{w}) = 0,$$

donde:

- $\boldsymbol{w}$ representa el conjunto de variables de decisión, que incluye los estados y controles en cada paso de tiempo discretizado.
- $\Phi(\boldsymbol{w})$ es la función objetivo (equivalente a la función de costo del OCP).
- $g_1(\boldsymbol{w}) \leq 0$ representa las restricciones de desigualdad, que pueden incluir límites en los estados y acciones de control.
- $g_2(\boldsymbol{w}) = 0$ representa las restricciones de igualdad, tales como las restricciones dinámicas del sistema y las condiciones de continuidad en el método de disparo múltiple.

Este enfoque permite que el MPC sea implementado en tiempo real utilizando algoritmos de optimización eficientes, como los métodos de punto interior o los métodos de Programación Cuadrática Secuencial (SQP).

Dado que en cada intervalo de actualización solo se implementa la primera acción de la secuencia óptima, MPC puede verse como un método que aproxima los principios de la programación dinámica al recalcular el óptimo en función del estado actualizado. Herramientas como Acados y CasADi son frecuentemente empleadas para implementar MPC en sistemas complejos, proporcionando capacidades para manejar las dinámicas no lineales y optimizar en presencia de restricciones.

Ventajas y Limitaciones de los Métodos de Shooting

Los métodos de *shooting* ofrecen distintas ventajas y desventajas en la transformación de OCP a NLP:

- *Single Shooting* es computacionalmente más eficiente y más fácil de implementar, pero puede fallar en converger o producir soluciones inexactas para sistemas altamente no lineales o bajo condiciones iniciales inciertas.

- *Multiple Shooting* ofrece una mayor robustez y estabilidad en la solución de sistemas no lineales complejos, aunque aumenta la carga computacional debido al mayor número de variables de decisión y restricciones de continuidad.

Estos métodos de disparo permiten que MPC se implemente en una variedad de sistemas dinámicos, desde sistemas lineales simples hasta sistemas no lineales altamente complejos, como el control de cuadricópteros en entornos parcialmente estructurados.

Discretización automática en Acados Para resolver un OCP en tiempo real mediante MPC, Acados permite formular el problema de control de forma continua y luego realiza la discretización a lo largo del horizonte de predicción Esto convierte el problema continuo en un NLP, optimizando la función de costo bajo las restricciones de la dinámica del sistema y los límites de los estados y controles.

Este proceso transforma las ecuaciones diferenciales en ecuaciones en diferencias a lo largo de los pasos de tiempo discretos $\{t_0, t_1, \ldots, t_N\}$. En cada paso de tiempo, Acados evalúa el costo y las restricciones, asegurando que se respete la dinámica del sistema y los límites operativos.

De esta manera, Acados simplifica el proceso de formulación del OCP en MPC, permitiendo trabajar con un problema continuo y confiando en la discretización automática y los métodos de disparo para obtener soluciones precisas y consistentes.

Esta flexibilidad en la discretización y el enfoque de disparo permite una implementación precisa y eficiente del MPC para sistemas complejos, manejando tanto el costo intermedio como el final de manera automática a lo largo del horizonte de predicción.

4.4. MPC nominal para cuadricópteros

En esta sección se presenta la aplicación del MPC nominal para los modelos de cuadricópteros desarrollados en este trabajo. Se consideran distintas aproximaciones, incluyendo el modelo simplificado obtenido a partir de primeros principios y el modelo basado en DMDc, así como el modelo completo formulado mediante principios de energía por Euler-Lagrange y el método de SINDy. Además, se implementa el modelo basado

en la formulación de Newton-Euler, que proporciona una representación dinámica detallada de la estructura del sistema. Estas aproximaciones permiten evaluar la efectividad del MPC nominal al realizar tareas de seguimiento de trayectorias y estabilización bajo diferentes niveles de fidelidad y complejidad en la modelación.

El objetivo principal del controlador propuesto en este capitulo es seguir la trayectoria de referencia definida en la Tabla 4.1 sobre el marco $\langle \mathbb{I} \rangle$ sin la consideración de perturbaciones en el modelo dinámico.

Tabla 4.1: Trayectoria deseada para los experimentos

Parámetros	**Valores**
η_{x_d}	$4\sin(0{,}12t) + 3$
η_{y_d}	$4\sin(0{,}24t)$
η_{z_d}	$2\sin(0{,}24t) + 6$
η_{ψ_d}	$\text{atan2}(\dot{y}_d, \dot{x}_d)$

4.4.1. MPC para modelo simplificado

Se describe la formulación del problema de control óptimo para planificar el seguimiento de trayectoria en un horizonte de predicción finito $l \in [t, t+N]$. La predicción del sistema cinemático-dinámico generalizado no lineal se define como:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{\mu}(t). \tag{4.4}$$

Las matrices asociadas al los estados y de control son definidas como:

$$A = \begin{bmatrix} 0_{4x4} & \mathbf{J}(\psi) \\ 0_{4x4} & -\mathbf{M}_n^{-1}\mathbf{C}_n \end{bmatrix} \quad y \quad B = \begin{bmatrix} 0_{4x4} \\ \mathbf{M}_n^{-1} \end{bmatrix},$$

donde $\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}^\intercal & \boldsymbol{\nu}^\intercal \end{bmatrix}^\intercal \in \mathbb{X}$ y $\boldsymbol{\mu}(t) \in \mathbb{U}$ son el estado y la entrada del sistema; y $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\eta}}^\intercal & \dot{\boldsymbol{\nu}}^\intercal \end{bmatrix}^\intercal$. Se define una función de costo intermedia $\boldsymbol{\ell}_t$ como:

$$\boldsymbol{\ell}_t(\tilde{\boldsymbol{\eta}}, \boldsymbol{\mu}) = \frac{1}{2}(\tilde{\boldsymbol{\eta}}^\intercal(t)\mathbf{Q}\tilde{\boldsymbol{\eta}}(t) + \boldsymbol{\mu}^\intercal(t)\mathbf{R}\boldsymbol{\mu}(t)). \tag{4.5}$$

En el último instante de tiempo, la función de costo final de la predicción $\boldsymbol{\ell}_f$ se define como:

$$\boldsymbol{\ell}_f(\tilde{\boldsymbol{\eta}}) = \frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{\eta}}^{\intercal}(N)\mathbf{Q}\tilde{\boldsymbol{\eta}}(N), \tag{4.6}$$

donde $\mathbf{Q}$ y $\mathbf{R}$ son matrices de ganancia de diseño definidas positivas para el error y la entrada del sistema, respectivamente. El NMPC se define como la solución del OCP:

$$\min_{\tilde{\boldsymbol{\eta}}(.),\boldsymbol{\mu}(.)} \boldsymbol{\ell}_f(\tilde{\boldsymbol{\eta}}(N)) + \int_t^N \boldsymbol{\ell}_t(\tilde{\boldsymbol{\eta}}(t), \boldsymbol{\mu}(t))dt \tag{4.7a}$$

$$\text{sujeto a:} \quad \dot{\boldsymbol{x}} = \mathbf{f}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{\mu}(t)) \tag{4.7b}$$

$$\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x_0} \tag{4.7c}$$

$$\boldsymbol{\mu} \in [\boldsymbol{\mu}_{min}, \boldsymbol{\mu}_{max}] \tag{4.7d}$$

$$\boldsymbol{\mu}(t) \in \mathbb{U} \quad \forall t \in [0, N-1] \tag{4.7e}$$

$$\boldsymbol{x}(t) \in \mathbb{X} \quad \forall t \in [0, N] \tag{4.7f}$$

El NMPC propuesto emplea una estructura de control óptimo que puede aplicarse tanto con el modelo de primeros principios como con la dinámica identificada mediante DMDc. Este último captura los modos dominantes del sistema dinámico en función de datos históricos, proporcionando una aproximación de la dinámica que permite implementar el OCP bajo una representación identificada.

Dado que las acciones de control son las mismas tanto en el modelo simplificado basado en PD-Euler-Lagrange (3.19) como en el modelo de DMD (3.63), es posible realizar un planteamiento unificado del problema de control óptimo no lineal (NOCP).

En este contexto, el NOCP (4.7a) se resuelve considerando las condiciones iniciales (4.7c) y se traduce en una formulación NLP mediante el método de disparo múltiple directo [52]. La dinámica del sistema, considerada como una restricción en (4.7b), puede formularse tanto con el modelo dinámico simplificado basado en PD-Euler-Lagrange como con la dinámica identificada mediante DMD. Las ecuaciones (4.7d) a (4.7f) establecen las restricciones en la entrada y en el estado, respectivamente.

Este planteamiento unificado facilita la implementación en tiempo real, al permitir la sustitución de la dinámica del sistema con cualquiera de los modelos identificados sin modificar la estructura general del problema de optimización.

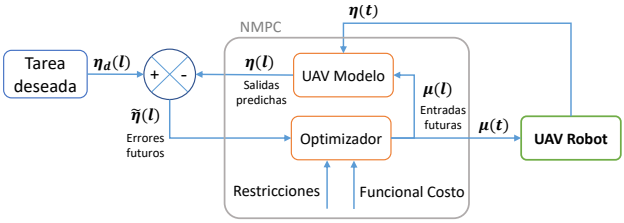


Figura 4.2: Esquema general del NMPC nominal.

Para la implementación de los experimentos, se establecen las siguientes restricciones, condiciones iniciales y matrices de ganancia para el controlador propuesto. Considerando que la velocidad máxima de la trayectoria deseada se alcanza cuando la derivada de la función está en su punto máximo, se infiere que $\boldsymbol{\mu}_{max} = \begin{bmatrix}4 & 4 & 4 & 0{,}5\end{bmatrix}^\intercal [\frac{m}{s}]$; $\boldsymbol{\mu}_{min} = -\boldsymbol{\mu}_{max}$; $\boldsymbol{\eta}_0 = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}^\intercal [m]$; además, $\boldsymbol{\nu}_0 = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}^\intercal [\frac{m}{s}]$; matriz de ponderación para la función de costo $\mathbf{Q} = 1{,}5I_{4\times4}$ y $\mathbf{R} = diag[1\ 1\ 1\ 1]$; matriz de ponderación para la ley adaptativa $\boldsymbol{\Omega} = 2I_{4\times4}$, $\boldsymbol{\Lambda} = 0{,}2I_{4\times4}$ y $\boldsymbol{\Gamma} = diag[1\ 1\ 1\ 1]$.

Resultados de formalización PD Euler Lagrange y DMD

Representación espacial del comportamiento La Fig. 4.3 demuestra el seguimiento de la trayectoria deseada mediante una aproximación basada en la formulación de Euler-Lagrange. Este enfoque permite que el NMPC aproveche una modelación dinámica detallada, asegurando una adherencia precisa a la trayectoria de referencia, incluso en presencia de variaciones externas. La efectividad del controlador se evidencia en la baja desviación respecto a la trayectoria deseada, lo que indica una adecuada compensación frente a las perturbaciones.

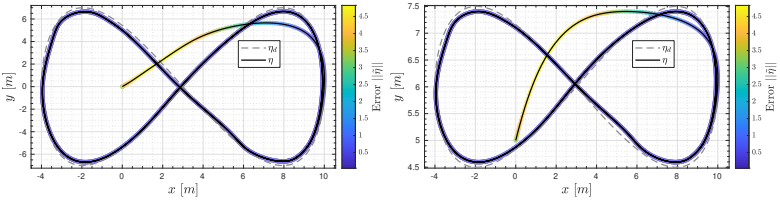


Figura 4.3: MPC nominal con modelo PD Euler-Lagrange.

La Fig. 4.4 muestra los resultados del experimento utilizando la aproximación de DMDc para el seguimiento de la trayectoria. En este caso, el MPC se beneficia de un modelo simplificado que captura las dinámicas principales del sistema. Aunque el modelo DMDc es menos detallado, su enfoque permite una respuesta rápida, y el controlador aún logra un seguimiento efectivo, con desviaciones moderadas que reflejan una buena compensación del modelo frente a las variaciones externas.

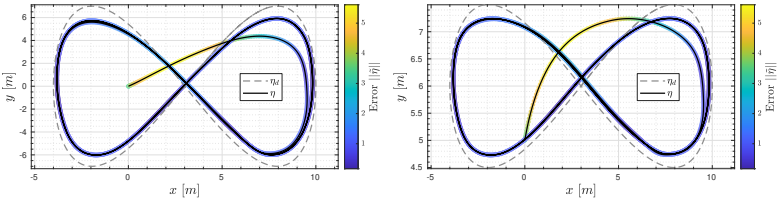


Figura 4.4: MPC nominal con modelo DMDc.

Representación de los errores En la Fig. 4.5, se presentan los errores de seguimiento para el controlador NMPC utilizando la formulación basada en PD-Euler-Lagrange. Como se observa, los errores de posición están acotados en una región pequeña, manteniéndose dentro del límite de $\|\boldsymbol{\eta}\| < 0{,}1$ m. Esto demuestra la precisión del modelo PD-Euler-Lagrange al capturar las dinámicas necesarias para el seguimiento de la trayectoria, proporcionando un control preciso y estable en el entorno experimental.

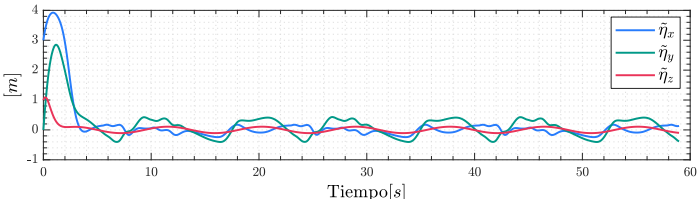


Figura 4.5: Errores de control del MPC nominal con modelo PD Euler-Lagrange.

Por otro lado, en la Fig. 4.6, se muestra el error de seguimiento para el controlador NMPC utilizando el modelo identificado mediante DMD. Aunque se observa un aumento en el error debido a la mayor velocidad de la trayectoria en comparación con la velocidad en la que fue identificado el modelo, los errores de posición permanecen acotados en $\|\boldsymbol{\eta}\| < 0{,}2\,\text{m}$. A pesar de esta limitación, el modelo DMD mantiene un rendimiento adecuado en el seguimiento de la trayectoria, destacando su aplicabilidad incluso en escenarios de mayor demanda dinámica.

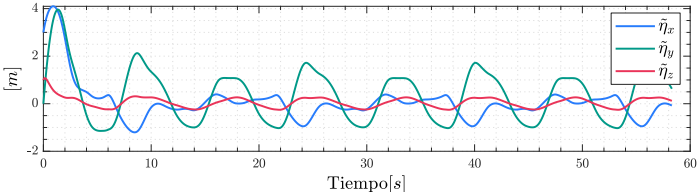


Figura 4.6: Errores de control del MPC nominal con modelo DMDc

Acciones de Control En la Fig. 4.7, se presentan las acciones de control para el controlador NMPC utilizando la formulación PD-Euler-Lagrange. Se observa que el UAV sigue de cerca las referencias de velocidad establecidas, alcanzando los valores deseados con precisión. Además, las restricciones impuestas en el OCP sobre las velocidades de control máximas y mínimas se respetan a lo largo de la trayectoria, demostrando que el controlador mantiene las acciones de control dentro de los límites operativos del sistema.

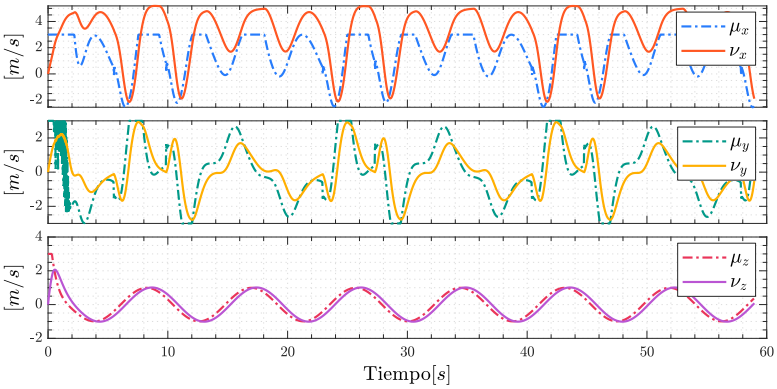


Figura 4.7: Acciones de control del MPC nominal con modelo PD Euler-Lagrange.

Por otro lado, la Fig. 4.8 muestra las acciones de control cuando se utiliza el modelo DMD. A pesar de la diferencia en la dinámica modelada, el UAV sigue las referencias de velocidad establecidas, adaptándose a las demandas de la trayectoria.

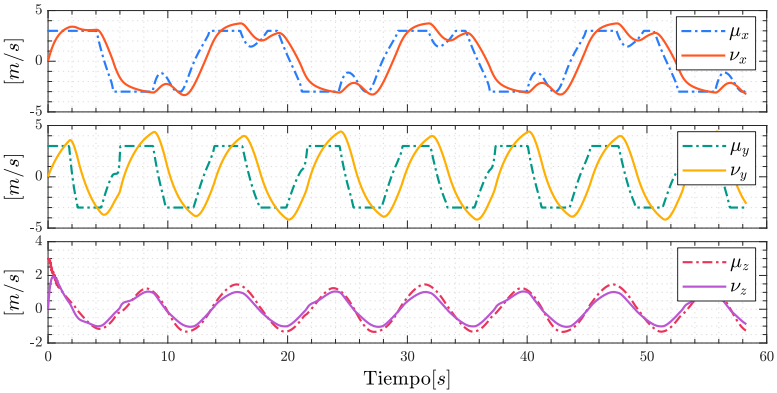


Figura 4.8: Acciones de control del MPC nominal con modelo DMDc.

Similar al caso anterior, se observa que las restricciones de velocidad máxima y mínima se cumplen en todo momento, confirmando que el contro-

lador respeta los límites definidos en el OCP y asegura un comportamiento seguro y controlado del UAV en el entorno experimental

Comparativa de desempe del modelo simplificado

Las métricas de rendimiento se muestran en la Tabla 9, donde se observa que ambos modelos siguen la trayectoria de referencia con buen desempeño. El modelo PD se destaca con un RMSE de 0.9060 y MAE de 0.6669, indicando una menor desviación respecto a la referencia. Por otro lado, el modelo DMD, con un RMSE de 1.4281 y MAE de 1.5817, refleja un seguimiento adecuado pero con mayor error, posiblemente debido a diferencias en las condiciones de identificación dinámica. Ambos modelos logran un índice de concordancia cercano a 1 (0.9839 para PD y 0.9605 para DMD), confirmando un buen ajuste, aunque el modelo PD muestra una comportamiento superior en este escenario.

Tabla 4.2: Resultados comparativos para la validación del MPC

Modelo	RMSE	MAE	Índice de Concordancia
PD	0.9060	0.6669	0.9839
DMD	1.4281	1.5817	0.9605

Bucle de tiempo

El análisis del tiempo promedio de resolución muestra que el solver asociado al modelo PD tiene un tiempo de cálculo promedio de 0.0021 segundos, mientras que el del modelo DMD es de 0.0029 segundos. Esta diferencia en el tiempo de cómputo puede atribuirse a la complejidad del modelo, ya que el modelo PD contiene un total de 19 parámetros, mientras que el modelo DMD utiliza 16 parámetros para la matriz $\mathbf{A}$ y otros 16 para $\mathbf{B}$. La mayor cantidad de parámetros en el modelo DMD implica una carga computacional adicional que se refleja en el tiempo de solución del controlador predictivo, como se observa en la Fig. 4.9.

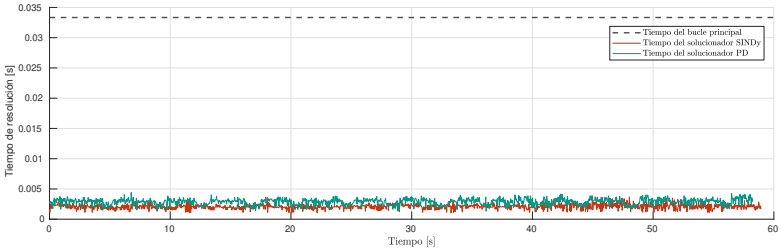


Figura 4.9: Comparativa del bucle de tiempo.

4.4.2. MPC para modelo completo

El rendimiento de los modelos identificados dentro del marco de NMPC se valida evaluando los errores de seguimiento en un entorno experimental real. En este entorno, se asigna al UAV la tarea de seguir una trayectoria de referencia predefinida, como se detalla en la Tabla 4.3, lo que permite una evaluación exhaustiva de la efectividad de cada modelo bajo el control predictivo no lineal.

Tabla 4.3: Posiciones deseadas para diferentes tipos de trayectoria

Trayectoria	$x_d(t)$	$y_d(t)$	$z_d(t)$
Sinusoidal	$4\sin(0{,}32t)+3$	$4\sin(0{,}64t)$	$2\sin(0{,}64t)+6$
Circular	$5\cos(t)$	$5\sin(t)$	6
Espiral	$e^{0{,}06t}\cos(t)$	$e^{0{,}06t}\sin(t)$	$0{,}1t+5$

La optimización se resuelve en cada instante de tiempo, aplicando la primera entrada de control en un horizonte deslizante de $N = 30$, con una frecuencia de muestreo de 30 Hz. La optimización se realiza utilizando Acados y CasADi mediante un método de programación cuadrática secuencial (SQP), ejecutado dentro de un esquema de iteración en tiempo real (RTI). El sistema se comunica utilizando ROS (Sistema Operativo de Robots), lo que permite la comunicación en tiempo real dentro de la arquitectura del UAV. El PC a bordo del UAV está equipado con una Jetson Orin de 16 GB (275 TOPS), asegurando un control preciso en tiempo real.

El NMPC optimiza las entradas de control sobre un horizonte de predicción finito para minimizar tanto los errores de seguimiento como el

esfuerzo de control. La función de costo para el OCP se define como:

$$\min_{\tilde{\mathbf{x}}(.)\,\boldsymbol{\mu}(.)} \quad \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{x}}_N^{\intercal}\mathbf{Q}\tilde{\mathbf{x}}_N + \sum_{k=0}^{N-1}\frac{1}{2}\tilde{\mathbf{x}}_k^{\intercal}\mathbf{Q}\tilde{\mathbf{x}}_k + \frac{1}{2}\boldsymbol{\mu}_k^{\intercal}\mathbf{R}\boldsymbol{\mu}_k \tag{4.8a}$$

$$\text{sujeto a:} \quad \boldsymbol{x}_{k+1} = \mathbf{f}_{din}(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{\mu}_k), \quad \forall k \in [0, N-1] \tag{4.8b}$$

$$\boldsymbol{x}_0 = [\boldsymbol{\eta}_0\ \boldsymbol{\Omega}_0]^{\intercal} \tag{4.8c}$$

$$|\dot{\eta}_{z_d}| \leq 5\,\text{m/s} \tag{4.8d}$$

$$|\phi_d| \leq 0{,}611\,\text{rad}, \tag{4.8e}$$

$$|\theta_d| \leq 0{,}611\,\text{rad} \tag{4.8f}$$

$$|\dot{\psi}_d| \leq \frac{5}{6}\pi\,\text{rad/s} \tag{4.8g}$$

Aquí, $\mathbf{x}_k$ representa el vector de estado en el instante k, y $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{\text{ref,k}}$ denota la desviación del vector de estado de referencia $\mathbf{x}_{\text{ref,k}}$. El término $\mathbf{Q} = 2\mathbf{I}_{3\times3}$ es la matriz de ponderación del estado, y $\mathbf{R} = 0{,}1\mathbf{I}_{3\times3}$ es la matriz de ponderación de la entrada de control. El horizonte de predicción es N, y la dinámica del sistema, $\mathbf{f}_{din}(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{\mu}_k)$, se modela en función del modelo basado en PD-Euler-Lagrange (3.7.2) o mediante el modelo identificado por SINDy (3.8.3).

Cabe destacar que tanto en la formulación de PD-Euler-Lagrange como en la de SINDy, se utilizan las mismas señales de control, lo que permite un planteamiento unificado del OCP en el NMPC. Esta consistencia facilita la implementación del controlador en tiempo real al considerar dinámicas de distinta fidelidad sin cambiar la estructura del problema de optimización. Las condiciones iniciales para el sistema son $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix}3 & 3 & 5 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}^{\intercal}$. Las restricciones en la entrada de control, como los límites en la velocidad vertical, los ángulos deseados y la velocidad de guiñada, se imponen debido a las limitaciones del SDK de DJI Onboard, que rige las señales de control recibidas por el UAV.

Resultados con la formulación PD Euler Lagrange y Sindy

Representación espacial del comportamiento La Fig. 4.10 demuestra que el NMPC permite un seguimiento efectivo de la trayectoria deseada, incluso bajo perturbaciones. La estabilidad del controlador se refleja en la capacidad del sistema para adherirse a la trayectoria de referencia

sin desviaciones significativas, lo que indica una adecuada compensación frente a las variaciones externas.

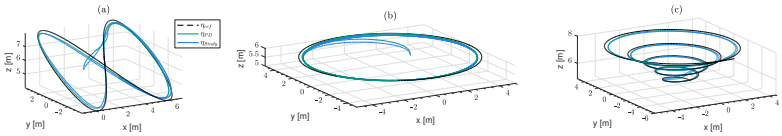


Figura 4.10: Comportamiento espacial del UAV con los modelos PD-Euler Lagrange y SINDy para tres trayectorias de referencia distintas: (a) sinusoidal, (b) circular y (c) espiral.

Representación de los errores La Fig. 4.11 presenta un análisis visual de los errores de seguimiento, donde se observa que el NMPC mantiene las desviaciones dentro de márgenes tolerables. Las correcciones oportunas realizadas por el controlador evidencian su precisión y capacidad de ajuste, minimizando el impacto de las perturbaciones y manteniendo el sistema cerca de la referencia en tiempo real.

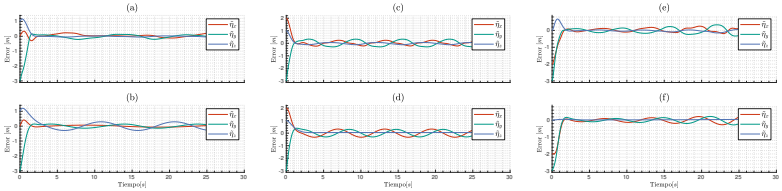


Figura 4.11: Errores de posición para trayectorias sinusoidales (a, b), circulares (c, d) y en espiral (e, f), con los modelos SINDy (arriba) y PD (abajo).

Acciones de control La Fig. 4.12 muestra las acciones de control necesarias para compensar los errores de seguimiento. La intensidad y frecuencia de estas acciones revelan el esfuerzo requerido para mantener la estabilidad y robustez en presencia de incertidumbre, indicando que el controlador opera eficientemente al aplicar ajustes mínimos y efectivos.

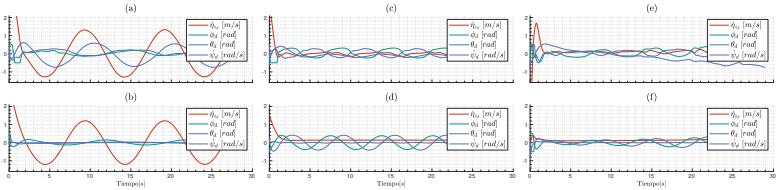


Figura 4.12: Acciones de control para trayectorias sinusoidal (a, b), circular (c, d) y en espiral (e, f), con los modelos SINDy (arriba) y PD (abajo).

Comparativa de rendimiento

Tabla 4.4 presenta los errores obtenidos en el seguimiento de la trayectoria deseada durante el MPC como parte del proceso de validación. Proporciona un análisis comparativo de RMSE, MAE y el Índice de Concordancia para ambos modelos, donde SINDy demuestra consistentemente un rendimiento superior en términos de precisión de seguimiento. SINDy exhibe métricas de error más bajas, aunque el Índice de Concordancia para ambos modelos sigue siendo alto, lo que indica una fuerte alineación con la trayectoria de referencia. Además, SINDy muestra una mejor consistencia en todos los experimentos. Estos resultados sugieren que SINDy ofrece una solución más precisa y confiable, lo que lo convierte en el modelo preferido en este proceso de validación.

Tabla 4.4: Resultados comparativos para la validación del MPC

Experimento	Modelo	RMSE	MAE	Índice de Concordancia
Sinusoidal	**PD**	0.4823	0.4319	0.9868
	SINDy	0.4791	0.3372	0.9869
Circular	**PD**	0.5209	0.5560	0.9895
	SINDy	0.4842	0.4752	0.9909
Espiral	**PD**	0.5711	0.4068	0.9704
	SINDy	0.4958	0.4239	0.9777
Promedio	**PD**	0.5248	0.4649	0.9822
	SINDy	0.4864	0.4121	0.9852

Bucle de tiempo

Es notable que el modelo SINDy converge más rápido que la aproximación PD-Euler Lagrange, como se muestra en la Fig. 4.13. Esto se debe a que la segunda implica una estructura más compleja y no lineal en comparación con la formulación más simple utilizada por el modelo SINDy. La menor complejidad computacional del modelo SINDy permite una ejecución más rápida, haciéndolo más eficiente para aplicaciones en tiempo real, a pesar de un compromiso en el rendimiento del error en estado estable.

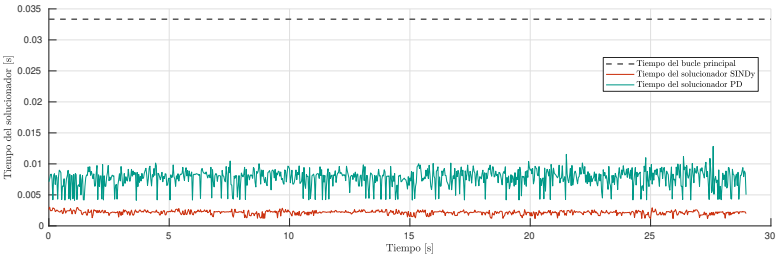


Figura 4.13: Comparativa del bucle de tiempo.

4.5. Consideraciones finales

En este capítulo se ha presentado la aplicación de MPC para el seguimiento de trayectorias en cuadricópteros, implementando y evaluando distintas representaciones del sistema, incluyendo modelos simplificados y completos. Los modelos abordados, desde el basado en primeros principios hasta los obtenidos mediante técnicas de identificación como DMD y SINDy, han demostrado distintos niveles de efectividad y complejidad en términos de seguimiento de trayectorias y robustez frente a perturbaciones.

Los resultados experimentales muestran que el modelo basado en DMD ofrece un rendimiento adecuado en términos de precisión de seguimiento, aunque el modelo PD-Euler Lagrange proporciona una mayor adherencia a la trayectoria de referencia en escenarios de alta fidelidad. Por su parte, el modelo SINDy presenta una eficiencia computacional notable, permitiendo tiempos de resolución más bajos, lo cual es ventajoso para aplicaciones en tiempo real.

Las métricas de rendimiento indican que, aunque cada modelo presenta ventajas particulares, el enfoque unificado permite al controlador NMPC adaptarse a las necesidades específicas de cada aplicación. En conjunto, este análisis sugiere que el uso de modelos simplificados identificados mediante técnicas como DMD o SINDy puede ser suficiente en aplicaciones de baja demanda, mientras que los modelos detallados como PD-Euler Lagrange son preferibles en entornos que requieren un alto nivel de precisión y estabilidad en el seguimiento.

En resumen, la implementación de MPC en cuadricópteros, considerando diferentes aproximaciones de modelado, permite un control flexible y eficiente, adaptado a las limitaciones computacionales y requisitos de precisión de cada escenario. Estas contribuciones son relevantes para el desarrollo de estrategias de control avanzadas en UAVs, promoviendo una mayor versatilidad y robustez en aplicaciones del mundo real.

CAPÍTULO 6

MPC Robusto y Adaptativo (RA-MPC)

5 MPC Robusto y Adaptativo (RA-MPC)

5.1. Introducción

Uno de los principales retos al trabajar con UAVs en entornos reales es la presencia de perturbaciones externas. La mayoría de los enfoques de diseño de control no consideran las incertidumbres en los modelos matemáticos [53] en espacios parcialmente estructurados o no estructurados. Estas incertidumbres pueden generar perturbaciones externas, como ruido, retrasos en la comunicación, desgaste, fallos en el sistema de vuelo y variaciones en la masa de carga útil [54, 55], lo cual afecta significativamente el rendimiento y la fiabilidad del UAV. Además, las dinámicas internas del robot cambian constantemente debido a las tareas asignadas, lo que implica que el sistema de control puede volverse ineficaz y los parámetros dinámicos deben actualizarse a pesar de las incertidumbres [56]. Una solución es el uso de control adaptativo, un método en sistemas de control automático que permite que el controlador se adapte a condiciones desconocidas o variables [57]. Esto convierte al control adaptativo en una opción ideal para los UAVs, ya que permite al sistema ajustarse a cambios en la dinámica interna durante la ejecución de las tareas deseadas [58].

El desarrollo de UAVs ha tenido avances significativos con la integración de MPC para mejorar el seguimiento de trayectorias en UAVs [39], en particular, sus variantes NMPC y Control Predictivo No Lineal Adaptativo (A-NMPC), que optimizan el seguimiento de trayectorias, el consumo energético y la seguridad, centrando su enfoque en un Observador de Momento para mejorar los resultados de los modelos propuestos.

En este capítulo, se considera únicamente el modelo simplificado mediante la formulación de Euler-Lagrange (Eq: 3.19). En primer lugar, se introduce un enfoque innovador al integrar leyes adaptativas con un Observador de Momento Dinámico (MOD), mejorando significativamente la

adaptabilidad y precisión del controlador ante cambios dinámicos en el sistema. Esta integración no solo refuerza la robustez de la estrategia de control, sino que también permite ajustes en tiempo real frente a incertidumbres o condiciones operativas variables. Adicionalmente, el trabajo aborda la tarea de estimar dinámicas de perturbación en el modelo dinámico simplificado del UAV, ofreciendo un análisis comparativo de diversos métodos de identificación. De esta forma, aporta valiosas perspectivas para abordar modelos de sistemas desconocidos o inciertos, avanzando en el estado del arte en metodologías de identificación de sistemas y control.

Este enfoque combina elementos de robustez y adaptabilidad en el diseño del MPC para manejar incertidumbres en las dinámicas y, al mismo tiempo, adaptarse a condiciones cambiantes en tiempo real.

- Introducción al Observador de Dinámica de Momento (MOD), un enfoque innovador que integra leyes adaptativas para mejorar la adaptabilidad y precisión del controlador frente a cambios dinámicos en el sistema. Este método aumenta la robustez del control al permitir ajustes en tiempo real ante incertidumbres y condiciones operativas variables.

- Implementación de una ley de control adaptativa que ajusta dinámicamente los parámetros del modelo para reflejar cambios en la dinámica del sistema y el entorno operativo.

- Análisis exhaustivo de métodos de identificación para estimar dinámicas de perturbación en el modelo dinámico simplificado del UAV, con una evaluación detallada de sus ventajas y limitaciones.

5.2. Modelo dinámico con perturbación

El modelo dinámico simplificado (3.19), presentado en el capítulo 4, describe la evolución del sistema mediante la ecuación $\dot{\boldsymbol{\nu}}(t) = \mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\nu}(t), \boldsymbol{\mu}(t))$, donde las velocidades lineales y rotacionales se consideran como señales de entrada. Este modelo se expresa de forma compacta como:

$$\boldsymbol{\mu}_n(t) = \mathbf{M}_n(\boldsymbol{\xi}, a, b)\dot{\boldsymbol{\nu}}(t) + \mathbf{C}_n(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\nu}, a, b)\boldsymbol{\nu}(t), \tag{5.1}$$

El modelo dinámico (6.1) puede representarse como una matriz de regresores del sistema $\boldsymbol{Y}_n$ y el vector de parámetros dinámicos $\boldsymbol{\xi}$,

$$\mathbf{M}_n(\boldsymbol{\xi}, a, b)\dot{\boldsymbol{\nu}}(t) + \mathbf{C}_n(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\nu}, a, b)\boldsymbol{\nu}(t) = \boldsymbol{Y}_n(\dot{\boldsymbol{\nu}}, \boldsymbol{\nu}, a, b)\boldsymbol{\xi}, \tag{5.2}$$

donde el vector $\boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix}\xi_1 & \xi_2 & .. & \xi_p\end{bmatrix}^\intercal \in \mathbb{R}^p$, con $p = 19$, es el vector de parámetros dinámicos desconocidos representados en la Tabla 1, que abarca la dinámica interna del cuadricóptero. Estos parámetros constituyen una combinación de valores asociados a los fenómenos físicos, mecánicos, eléctricos y aerodinámicos que influyen en el sistema robótico.

Sin embargo, (5.2) no considera las dinámicas no modeladas inherentes al modelo simplificado y la incidencia de perturbaciones externas que pueden alterar la conFig.ción interna del UAV, por lo que se introduce un término de velocidades de incertidumbre $\mathbf{S}\boldsymbol{\tau}_u$:

$$\boldsymbol{\mu}_T(t) = \mathbf{M}_n(\boldsymbol{\xi}, a, b)\dot{\boldsymbol{\nu}}(t) + \mathbf{C}_n(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\xi}, a, b)\boldsymbol{\nu}(t) + \mathbf{S}\boldsymbol{\tau}_u, \tag{5.3}$$

donde $\boldsymbol{\mu}_T = \boldsymbol{\mu}_n + \boldsymbol{\mu}_{ext}$ representa las velocidades totales aplicadas en la plataforma y es la suma de las velocidades activas nominales $\boldsymbol{\mu}_n$, y las velocidades de perturbación externa $\boldsymbol{\mu}_{ext} \in \mathbb{R}^4$.

5.3. Controlador NMPC Adaptativo

La Fig. 5.1 muestra el esquema general para resolver el problema de seguimiento de trayectoria como la suma directa de las acciones de control óptimas generadas por el NMPC sujeto a restricciones y la estimación de las dinámicas no modeladas, que tienen un carácter de compensación adaptativa frente a las perturbaciones a las que el cuadricóptero puede estar sometido.

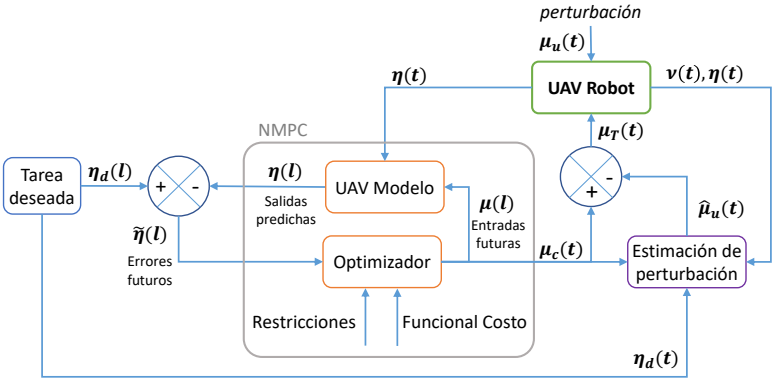


Figura 5.1: Esquema general del NMPC adaptativo.

Debido a los cambios en la dinámica interna y el efecto de las incertidumbres que afectan al modelo dinámico del cuadricóptero, se generan errores de velocidad $\tilde{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\mu_c} - \boldsymbol{\nu}$, que son la diferencia entre las velocidades del controlador óptimo y las velocidades reales del robot. El modelo dinámico (5.3) puede reescribirse en forma de matriz de regresores:

$$\boldsymbol{\mu}_T(t) = \boldsymbol{Y}_n(\dot{\boldsymbol{\nu}}, \boldsymbol{\nu})\boldsymbol{\xi}_n + \boldsymbol{Y}_u(\dot{\boldsymbol{\nu}}, \boldsymbol{\nu})\boldsymbol{\xi}_u. \tag{5.4}$$

En esta expresión, el subíndice 'n' se refiere al modelo dinámico nominal obtenido mediante identificación fuera de línea, mientras que 'u' se refiere a las dinámicas no modeladas en el modelo dinámico simplificado, que incluyen las perturbaciones externas desconocidas. Considerando el error entre el modelo de incertidumbre aproximado y la incertidumbre real, se obtiene:

$$\boldsymbol{Y}_u(\dot{\boldsymbol{\nu}}, \boldsymbol{\nu})\hat{\boldsymbol{\xi}}_u \approx \boldsymbol{Y}_u(\dot{\boldsymbol{\nu}}, \boldsymbol{\nu})\boldsymbol{\xi}_u + \boldsymbol{Y}_u(\dot{\boldsymbol{\nu}}, \boldsymbol{\nu})\tilde{\boldsymbol{\xi}}_u, \tag{5.5}$$

donde $\hat{\boldsymbol{\xi}}$ y $\boldsymbol{\xi}$ son los parámetros dinámicos estimados y reales, respectivamente, y $\tilde{\boldsymbol{\xi}} = \hat{\boldsymbol{\xi}} - \boldsymbol{\xi}$ es el vector de error de parámetros. Para estimar las incertidumbres en los parámetros dinámicos y las dinámicas no modeladas, se asume que la salida del NMPC produce una entrada óptima $\boldsymbol{\mu}_c(t) \approx \boldsymbol{Y}_n(\dot{\boldsymbol{\nu}}, \boldsymbol{\nu})\boldsymbol{\xi}_n$, y se propone el siguiente NMPC No Lineal Adaptativo:

$$\boldsymbol{\mu}_T(t) = \boldsymbol{\mu}_c(t) + \mathbf{Y}_u(\dot{\boldsymbol{\nu}}_r, \boldsymbol{\nu}_r)\hat{\boldsymbol{\xi}}_u \tag{5.6}$$
$$= \boldsymbol{\mu}_c(t) + \hat{\boldsymbol{\mu}}_u(t). \tag{5.7}$$

El componente adaptable $\mathbf{Y}_u(\dot{\boldsymbol{\nu}}_r, \boldsymbol{\nu}_r)\hat{\boldsymbol{\xi}}_u := \hat{\boldsymbol{\mu}}_u(t)$ sirve para dos propósitos: proporcionar una estimación de la perturbación y generar los ajustes necesarios en la dinámica del sistema. Además, se propone la siguiente ley de actualización de parámetros:

$$\mathbf{Y}_u(\dot{\boldsymbol{\upsilon}}_r, \boldsymbol{\upsilon}_r)\hat{\boldsymbol{\xi}}_u = \hat{\mathbf{M}}_u(\boldsymbol{\xi})\dot{\boldsymbol{\nu}}_r + \hat{\mathbf{C}}_u(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\nu}_r + \mathbf{K}_r\boldsymbol{\sigma}, \tag{5.8}$$
$$\dot{\hat{\boldsymbol{\xi}}}_u = \boldsymbol{\Gamma}^{-1}\mathbf{Y}_u^{\intercal}\boldsymbol{\sigma}. \tag{5.9}$$

donde los errores de posición en estado estacionario no deseados están restringidos a una superficie de deslizamiento $\boldsymbol{\sigma} = \tilde{\boldsymbol{\nu}} + \boldsymbol{\Lambda}\tilde{\boldsymbol{\eta}}$, donde $\boldsymbol{\Lambda}$ es una matriz diagonal de ganancia constante de los errores de velocidad. Aquí, $\boldsymbol{\nu}_r = \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\nu}$ representa la velocidad de referencia modificada.

Para demostrar la convergencia global del error de seguimiento, se considera la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$\mathbf{V} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^{\intercal}\mathbf{M}_u\boldsymbol{\sigma} + \frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{\xi}}^{\intercal}\boldsymbol{\Gamma}\tilde{\boldsymbol{\xi}}, \tag{5.10}$$

donde $\boldsymbol{\Gamma} \in \mathbb{R}^{p\times p}$ es una matriz diagonal definida positiva. A partir de (5.10), la derivada temporal de la candidata de Lyapunov a lo largo de las trayectorias del sistema es:

$$\dot{\mathbf{V}} = -\boldsymbol{\sigma}^{\intercal}[\boldsymbol{\mu}_u - \mathbf{M}_u\dot{\boldsymbol{\nu}}_r - \mathbf{C}_u\boldsymbol{\nu}_r] + \tilde{\boldsymbol{\xi}}^{\intercal}\boldsymbol{\Gamma}\dot{\tilde{\boldsymbol{\xi}}}. \tag{5.11}$$

A partir de las ecuaciones (5.8), (5.9) y (5.11), y considerando que $\dot{\tilde{\boldsymbol{\xi}}} = \dot{\hat{\boldsymbol{\xi}}}$ debido a que los parámetros son valores escalares, entonces:

$$\dot{\mathbf{V}} = -\boldsymbol{\sigma}^{\intercal}[\tilde{\mathbf{M}}_u\dot{\boldsymbol{\nu}}_r + \tilde{\mathbf{C}}_u\boldsymbol{\nu}_r + \mathbf{K}_r\boldsymbol{\sigma}] + \tilde{\boldsymbol{\xi}}^{\intercal}\boldsymbol{\Gamma}\dot{\hat{\boldsymbol{\xi}}} \tag{5.12}$$
$$= -\boldsymbol{\sigma}^{\intercal}\mathbf{K}_r\boldsymbol{\sigma} + \tilde{\boldsymbol{\xi}}^{\intercal}[\boldsymbol{\Gamma}\dot{\hat{\boldsymbol{\xi}}} - \mathbf{Y}_u^{\intercal}\boldsymbol{\sigma}] \tag{5.13}$$
$$= -\boldsymbol{\sigma}^{\intercal}\mathbf{K}_r\boldsymbol{\sigma} \leq 0. \tag{5.14}$$

La expresión (5.14) indica que los errores de salida tienden hacia la superficie de deslizamiento a medida que pasa el tiempo.

$$\boldsymbol{\sigma} = \tilde{\boldsymbol{\nu}} + \boldsymbol{\Lambda}\tilde{\boldsymbol{\eta}} = 0. \tag{5.15}$$

Además, la expresión (5.15) sugiere que la superficie de deslizamiento $\boldsymbol{\sigma}$ tiende a cero, lo que indica la convergencia del sistema hacia un estado de equilibrio. Sin embargo, para afirmar que el sistema alcanza un estado estable en el que tanto el error de velocidad en estado estacionario $\tilde{\boldsymbol{\nu}}$ como el error de posición en estado estacionario $\tilde{\boldsymbol{\eta}}$ convergen a cero, es necesario demostrar que el error de velocidad en estado estacionario también desaparece. Esto puede lograrse sustituyendo la velocidad deseada $\boldsymbol{\nu}_d$ por una 'velocidad de referencia' virtual $\boldsymbol{\nu}_r$ [59]:

$$\boldsymbol{\nu}_r = \boldsymbol{\nu}_d + \boldsymbol{\Lambda}\tilde{\boldsymbol{\eta}}, \tag{5.16}$$

y se define que,

$$\boldsymbol{\sigma} = \tilde{\boldsymbol{\nu}}_r = \boldsymbol{\nu}_r - \boldsymbol{\nu}.$$

La ley de control y la ley de adaptación se convierten en:

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}_u(t) = \hat{\mathbf{M}}_u(\boldsymbol{\xi})\dot{\boldsymbol{\nu}}_d + \hat{\mathbf{C}}_u(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\nu}_d + \mathbf{K}_r\tilde{\boldsymbol{\nu}}, \tag{5.17}$$

con

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\xi}}}_u = \boldsymbol{\Gamma}^{-1}\mathbf{Y}_u^{\intercal}\tilde{\boldsymbol{\nu}}. \tag{5.18}$$

Una vez más, se puede demostrar la convergencia global del seguimiento empleando la función de Lyapunov:

$$\mathbf{V} = \frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{\nu}}^{\intercal}\mathbf{M}_u\tilde{\boldsymbol{\nu}} + \frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{\xi}}^{\intercal}\boldsymbol{\Gamma}\tilde{\boldsymbol{\xi}}, \tag{5.19}$$

Similar a la demostración anterior, en lugar de (5.10), el resultado obtenido es:

$$\dot{\mathbf{V}} = -\tilde{\boldsymbol{\nu}}^{\intercal}\mathbf{K}_r\tilde{\boldsymbol{\nu}} \leq 0. \tag{5.20}$$

La expresión (5.20) sugiere que el error de velocidad en estado estacionario de la aeronave es cero. Consecuentemente, esto implica que $\tilde{\boldsymbol{\eta}} \to 0$ cuando $t \to \infty$. El controlador adaptativo diseñado para las perturbaciones definidas por las ecuaciones (5.8) y (5.9) logra estabilidad asintótica global y asegura un error de posición nulo en estado estacionario para el UAV.

5.4. MPC con Observador de Momento Dinámico (MPC-MOD)

El momento generalizado de la plataforma $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^4$ es:

$$\mathbf{p} = \mathbf{M}_n \boldsymbol{\nu}. \tag{5.21}$$

A partir del modelo en (6.1), la evolución temporal de $\mathbf{p}$ se escribe como:

$$\dot{\mathbf{p}} = \boldsymbol{\mu}_\tau + \dot{\mathbf{M}}_n \boldsymbol{\nu} - \mathbf{C}_n \boldsymbol{\nu} \tag{5.22}$$

$$= \boldsymbol{\mu}_\tau + \mathbf{C}_n^\intercal \boldsymbol{\nu}, \tag{5.23}$$

donde se usa la propiedad $\dot{\mathbf{M}}_n = \mathbf{C}_n + \mathbf{C}_n^\intercal$. Como se presenta en [60], a partir de (5.22), se deduce la dinámica del observador de momento:

$$\dot{\hat{\mathbf{p}}} = \boldsymbol{\mu} + \hat{\boldsymbol{\mu}}_{ext} + \mathbf{C}_n^\intercal \boldsymbol{\nu} \tag{5.24}$$

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\mu}}}_{ext} = \mathbf{K}_o(\dot{\mathbf{p}} - \dot{\hat{\mathbf{p}}}), \tag{5.25}$$

donde $\hat{\boldsymbol{\mu}}_{ext}$ es la estimación de la velocidad de perturbación externa, y $\mathbf{K}_o$ es la matriz de ganancia diagonal positiva del observador. El resultado del observador es la estimación de la perturbación externa, obtenida integrando (5.25) como sigue:

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}_{ext} = \mathbf{K}_o \left(\mathbf{p}(t) - \int_{t_0}^{t} (\boldsymbol{\mu}_n + \hat{\boldsymbol{\mu}}_{ext} + \mathbf{C}_n^\intercal \boldsymbol{\nu}) dt - \mathbf{p}(0) \right). \tag{5.26}$$

La señal monitoreada $\hat{\boldsymbol{\mu}}_{ext}$ también se conoce como vector residual. Idealmente, este vector, asemejándose a un sensor abstracto, permite que el observador de momento funcione como un sensor virtual, detectando velocidades externas en toda la estructura del UAV.

La relación dinámica entre las velocidades externas $\boldsymbol{\mu}_{ext}$ y $\hat{\boldsymbol{\mu}}_{ext}$ se expresa como:

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\mu}}}_{ext} = \mathbf{K}_o(\boldsymbol{\mu}_{ext} - \hat{\boldsymbol{\mu}}_{ext}) \tag{5.27}$$

Esta ecuación representa una estimación de primer orden, de paso bajo, estable, lineal y desacoplada de las fuerzas externas, con la propiedad de que $\hat{\boldsymbol{\mu}}_{ext} \approx \boldsymbol{\mu}_{ext}$ cuando $\mathbf{K}_o$ tiende a infinito.

La Fig. 5.2 muestra el esquema general para resolver el problema de seguimiento de trayectoria como la suma directa de las acciones de control óptimas generadas por el NMPC sujeto a restricciones y la estimación de las dinámicas no modeladas, que tienen un carácter de compensación adaptativa frente a las perturbaciones a las que el cuadricóptero puede estar sometido.

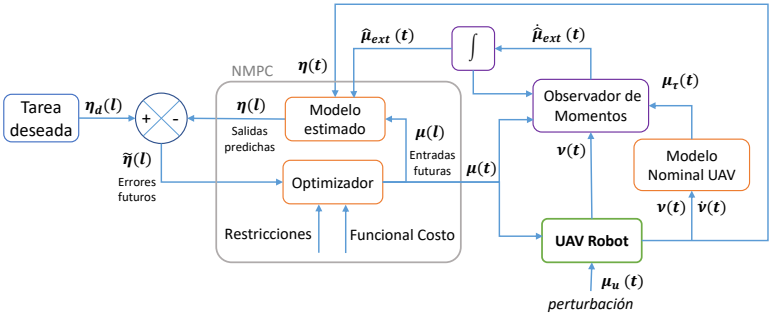


Figura 5.2: Esquema general del MOD-NMPC.

La combinación de Dinámica de Observador de Momento y NMPC, llamada MOD-NMPC, se define como:

$$\min_{\tilde{\boldsymbol{\eta}}(.),\boldsymbol{\mu}(.)} \int_t^N \boldsymbol{\ell}_t(\tilde{\boldsymbol{\eta}}(t),\boldsymbol{\mu}(t))dt + \boldsymbol{\ell}_f(\tilde{\boldsymbol{\eta}}(N)) \tag{5.28a}$$

$$\text{sujeto a:} \quad \dot{\boldsymbol{x}} = \mathbf{f}(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{\mu}_n(t),\hat{\boldsymbol{\mu}}_{ext}(t)) \tag{5.28b}$$

$$\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x_0} \tag{5.28c}$$

$$\boldsymbol{\nu} \in [\boldsymbol{\nu}_{min},\boldsymbol{\nu}_{max}] \tag{5.28d}$$

$$\boldsymbol{\mu}(t) \in \mathbb{U} \quad \forall t \in [0, N-1] \tag{5.28e}$$

$$\boldsymbol{x}(t) \in \mathbb{X} \quad \forall t \in [0, N] \tag{5.28f}$$

Se considera que la perturbación estimada $\hat{\boldsymbol{\mu}}_{ext}$ en el tiempo t se mantiene constante a lo largo del horizonte $[t, t+N]$.

5.5. NMPC Adaptativo con esquema MOD

Suponemos que el Observador de Momento Dinámico está diseñado de manera que la diferencia $\|\boldsymbol{\mu}_{ext} - \hat{\boldsymbol{\mu}}_{ext}\|$ sea minimizada; sin embargo, existe un error residual $\tilde{\boldsymbol{\mu}}_{ext}$ tal que:

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}_{ext} \approx \boldsymbol{\mu}_{ext} + \tilde{\boldsymbol{\mu}}_{ext} \tag{5.29}$$

La Fig. 5.3 muestra el esquema general que este capítulo propone como una combinación de control adaptativo con NMPC y MOD para generar una acción de control que minimice, adapte y estime las perturbaciones externas que actúan sobre el cuerpo de la aeronave, utilizando la ley de control 5.30.

$$\boldsymbol{\mu}_n(t) \approx \boldsymbol{\mu}_c(t) + \hat{\boldsymbol{\mu}}_u(t) - \hat{\boldsymbol{\mu}}_{ext}(t) \tag{5.30}$$

$$\approx \boldsymbol{\mu}_c(t) + \mathbf{Y}_u(\dot{\boldsymbol{\nu}}_r, \boldsymbol{\nu}_r)\hat{\boldsymbol{\xi}}_u - \hat{\boldsymbol{\mu}}_{ext} \tag{5.31}$$

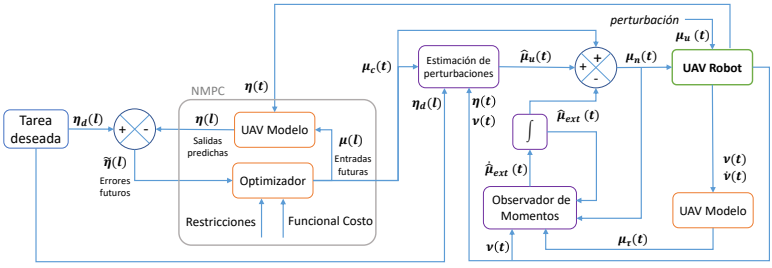


Figura 5.3: Esquema general del NMPC Adaptativo con MOD.

Si el error se mantiene mínimo, el término del observador $\hat{\boldsymbol{\mu}}_{ext}$ se aproxima a la incertidumbre real $\boldsymbol{Y}_u(\dot{\boldsymbol{\nu}}, \boldsymbol{\nu})\boldsymbol{\xi}_u$, entonces $\hat{\boldsymbol{\mu}}_u(t) \approx \tilde{\boldsymbol{\mu}}_{ext}$. Sin referencias que estimulen de manera consistente, esto sugiere que $\hat{\boldsymbol{\mu}}_u(t) \not\approx \hat{\boldsymbol{\mu}}_{ext}(t)$. No obstante, indica que la dinámica del NMPC se aproxima de manera general a la dinámica real.

5.6. Resultados

Los controladores propuestos en este artículo se evalúan y validan mediante experimentos de simulación aplicados al gemelo digital del cuadricóptero DJI Matrice 100, utilizando un modelo dinámico identificado en un marco de experimentación real [61]. Este análisis compara las propuestas en un entorno MiL [62] usando el software de simulación robótica Webots [63], como se muestra en la Fig. 5.4.

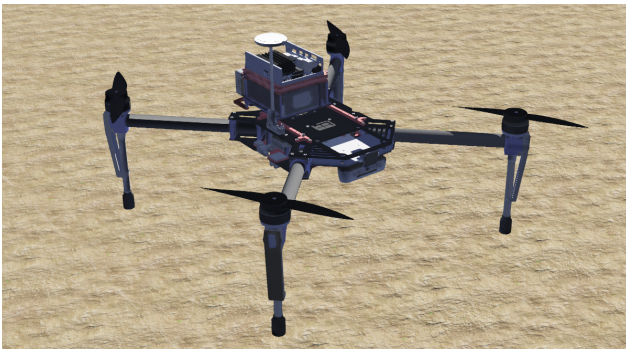


Figura 5.4: Gemelo digital del DJI Matrice 100.

El experimento implica la prueba de cuatro escenarios base aplicando perturbaciones:

1. NMPC nominal
2. NMPC Adaptativo
3. MOD-NMPC
4. NMPC Adaptativo con MOD

Es posible lograr resultados ideales utilizando un problema de NMPC que sea completamente consciente de las perturbaciones aplicadas al modelo. El objetivo principal de este trabajo es estimar con precisión las dinámicas no modeladas y utilizarlas para mejorar la robustez del NMPC. Todos los métodos emplean la misma función de costo intermedia y final,

ajustada en términos de matrices de ganancia para alcanzar el rendimiento óptimo en el caso nominal.

Para evaluar el rendimiento en tiempo de ejecución del algoritmo de control avanzado, los experimentos se realizan en una PC de estación base (Intel i7-8850H, 2.6 GHz, hexa-core 64 bits), con el lazo de control funcionando a 30 Hz, lo que significa un horizonte de tiempo de 1s con $N = 30$. El solucionador OCP se basa en el algoritmo de Disparo Múltiple IPOP proporcionado por CasADi [64]. La comunicación entre el nodo controlador y el nodo UAV se facilita a través de ROS.

Configuración experimental

Para la implementación de los experimentos simulados, se establecen las siguientes restricciones, condiciones iniciales y matrices de ganancia para el controlador propuesto. Considerando que la velocidad máxima de la trayectoria deseada se alcanza cuando la derivada de la función está en su punto máximo, se infiere que $\boldsymbol{\mu}_{max} = \begin{bmatrix}4 & 4 & 4 & 0{,}5\end{bmatrix}^\intercal [\frac{m}{s}]$; $\boldsymbol{\mu}_{min} = -\boldsymbol{\mu}_{max}$; $\boldsymbol{\eta}_0 = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}^\intercal [m]$; Además, $\boldsymbol{\nu}_0 = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}^\intercal [\frac{m}{s}]$; matriz de pesos para la función de costo $\mathbf{Q} = 1{,}5I_{4\times4}$ y $\mathbf{R} = diag[1\ 1\ 1\ 1]$; matriz de pesos para la ley adaptativa $\boldsymbol{\Omega} = 2I_{4\times4}$, $\boldsymbol{\Lambda} = 0{,}2I_{4\times4}$ y $\boldsymbol{\Gamma} = diag[1\ 1\ 1\ 1]$.

Cuando aparece una perturbación, la aceleración del robot se describe mediante la siguiente ecuación diferencial:

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \mathbf{M}_n(\boldsymbol{\xi}, a, b)^{-1}[-\mathbf{C}_n(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\nu}, a, b)\boldsymbol{\nu} + \mathbf{S}\boldsymbol{\tau}_u + \boldsymbol{\mu}] \tag{5.32}$$

La perturbación, denotada por $\mathbf{S}\boldsymbol{\tau}_u = \begin{bmatrix}\tau_{u_x} & \tau_{u_y} & \tau_{u_z} & \tau_{u_\psi}\end{bmatrix}^\intercal \in \mathbb{R}^4$, se describe mediante la función:

$$\begin{aligned}
\tau_{u_x}(t) &= \begin{cases} 0 & t < 5 \vee t > 25 \\ 2 & 5 \leq t < 10 \\ 0{,}5 & 10 \leq t < 15 \\ -1{,}8 & 15 \leq t < 20 \\ 1{,}5 & 20 \leq t < 25 \end{cases} \\
\tau_{u_y}(t) &= 2\sin(0{,}1t) + 1{,}5\cos(0{,}06t) \\
\tau_{u_z}(t) &= 2\sin(0{,}05t) + 2\cos(-0{,}025t) \\
\tau_{u_\psi}(t) &= 1{,}5\text{sign}(0{,}2\sin(0{,}04t) + 3\cos(-0{,}04t))
\end{aligned} \tag{5.33}$$

El objetivo principal del controlador propuesto en este trabajo es seguir la trayectoria de referencia definida en la Tabla 7.2 sobre el marco $\langle \mathbb{I} \rangle$ durante la incidencia de perturbaciones no consideradas en el modelo dinámico.

Tabla 5.1: Trayectoria deseada para los experimentos.

Parámetros	**Valores**	**Parámetros**	**Valores**
η_{x_d}	$4\sin(0{,}12t)+3$	η_{z_d}	$2\sin(0{,}24t)+6$
η_{y_d}	$4\sin(0{,}24t)$	η_{ψ_d}	$\text{atan2}(\dot{y}_d, \dot{x}_d)$

5.6.1. Experimento NMPC nominal

La evaluación se realiza considerando funciones de perturbación que actúan como señales externas modificando la dinámica del sistema. Los resultados mostrados en las Fig.s 5.5.a y 5.5.b ilustran que el NMPC con el modelo nominal por sí solo no es lo suficientemente robusto contra perturbaciones. En las Fig.s 5.5.c y 5.5.d, se observan los errores y las acciones de control, respectivamente. Esto destaca la necesidad de integrar mecanismos de control adaptativo, como el MOD, para mejorar el error del sistema en escenarios reales.

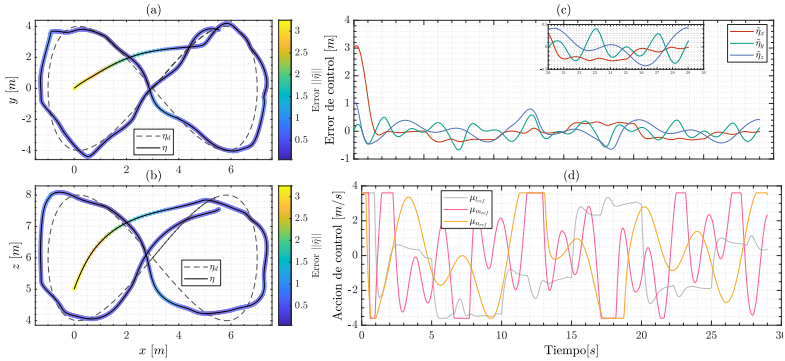


Figura 5.5: Resultados del experimento NMPC Nominal.

La Fig. 5.6 muestra que la duración para resolver el problema de control óptimo para el NMPC se mantiene consistentemente por debajo de los 5.2

ms para un horizonte de 1 segundo. Se reconoce que el rendimiento computacional depende del hardware empleado, lo que sugiere escalabilidad con una PC de estación base más robusta.

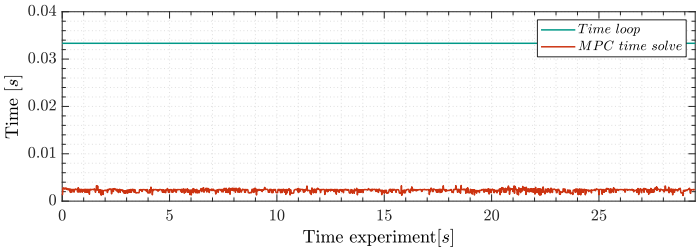


Figura 5.6: Tiempo de ejecución del solucionador MPC.

5.6.2. Experimento NMPC adaptativo

Las Fig. 5.7.a y 5.7.b muestran el comportamiento obtenido alineado con la trayectoria deseada. Esto se debe a que los errores observados en la Fig. 5.7.c convergen a cero, y las acciones de control en la Fig. 5.7.d están acotadas.

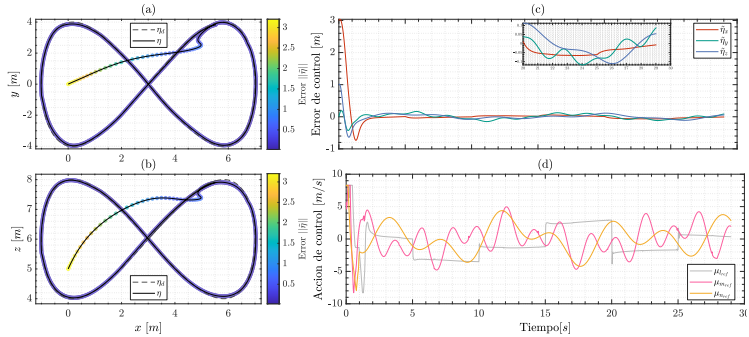


Figura 5.7: Resultados del experimento NMPC adaptativo.

En la Fig. 5.8, se presenta una comparación entre los componentes de las perturbaciones generadas por (5.33) y los estimados por la ley de adaptación con NMPC. La ilustración demuestra la excepcional capacidad del

algoritmo para aproximar las perturbaciones introducidas en la aeronave. Esta observación destaca la efectividad del mecanismo de control adaptativo en mitigar las perturbaciones externas, mejorando así la robustez y el rendimiento general del sistema.

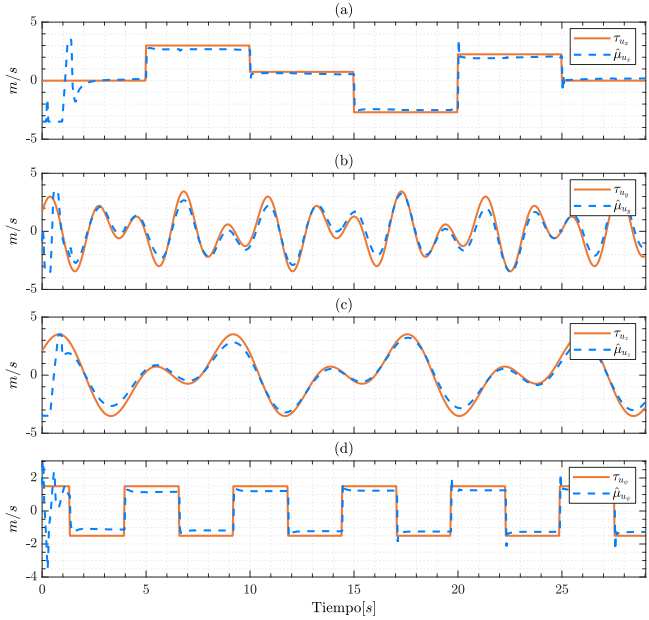


Figura 5.8: Estimación de perturbaciones de la ley adaptativa.

5.6.3. Experimento MOD-NMPC

Las Fig.s 5.9.a y 5.9.b ilustran el comportamiento de la aeronave resultante de la implementación del MOD-NMPC como se describe en (5.28). Los resultados demuestran que el controlador propuesto mitiga eficazmente las perturbaciones que afectan al sistema, incluso cuando son altamente ágiles. Esto es evidente en cómo los errores se mantienen acotados, como se muestra en la Fig. 5.9.c, junto con las acciones de control en la Fig. 5.9.d. En consecuencia, el cuadricóptero mantiene su trayectoria deseada incluso en presencia de perturbaciones desconocidas.

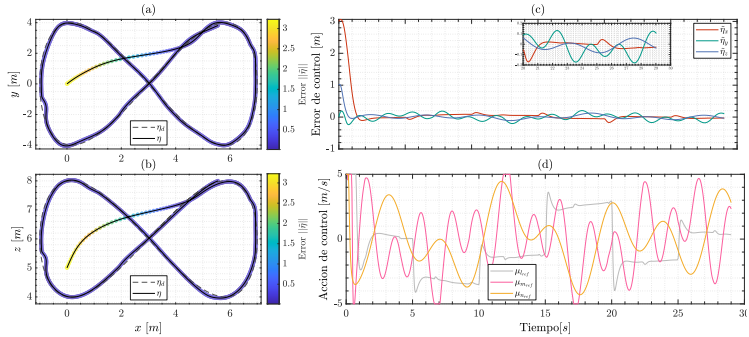


Figura 5.9: Resultados del experimento MOD-NMPC.

La Fig. 5.10 muestra la comparación entre perturbaciones estimadas y reales. Esta comparación ofrece una comprensión general de las perturbaciones que pueden afectar al sistema y que también son estimables.

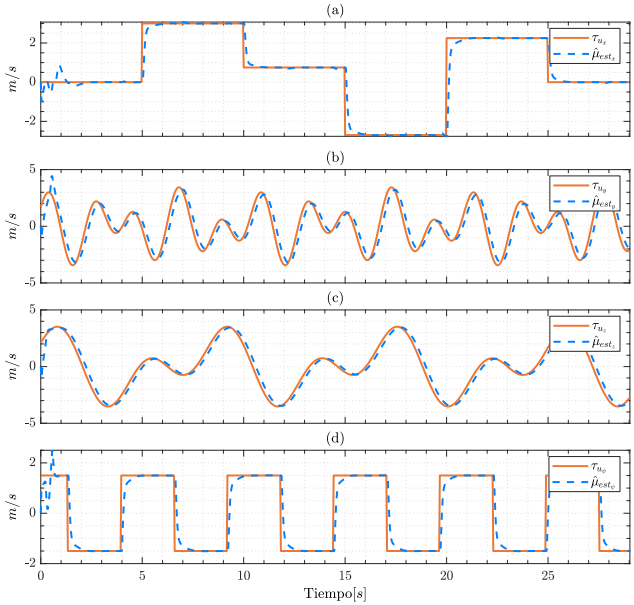


Figura 5.10: Resultados de estimación de perturbaciones del MOD.

Se confirma que el observador de momento estima eficazmente las velocidades que afectan al sistema y alteran la conFig.ción interna del cuadricóptero, gracias a las características de filtrado que aseguran una aproximación suave a los valores estimados.

5.6.4. Experimentos NMPC adaptativo con MOD

En la Fig. 5.11.a y 5.11.b se observa un seguimiento de trayectoria mejorado en presencia de perturbaciones. La Fig. 5.11.c demuestra que el error de control $\tilde{\boldsymbol{\eta}} = \begin{bmatrix}\tilde{\eta}_x & \tilde{\eta}_y & \tilde{\eta}_z & \tilde{\eta}_\psi\end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^4$ converge a valores cercanos a cero en presencia de perturbaciones externas aplicadas en la simulación. Específicamente, los errores de control están acotados, alcanzando un error característico final $|\tilde{\boldsymbol{\eta}}| < 0{,}1$, y son distintos de cero, es decir, $\tilde{\boldsymbol{\eta}} = \boldsymbol{\eta}_d - \boldsymbol{\eta} \neq 0$. Finalmente, las acciones de control se muestran en la Fig. 5.11.d.

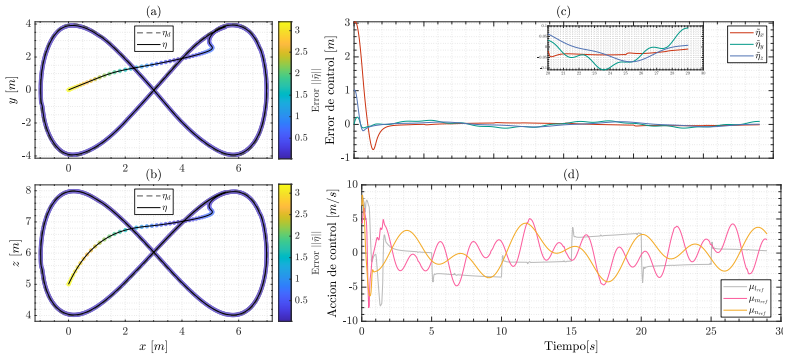


Figura 5.11: Resultados del experimento NMPC Adaptativo con MOD.

La Fig. 5.12 ilustra la estimación de perturbaciones que afectan la conFig.ción interna del cuadricóptero durante la prueba experimental real, mostrando la evidente presencia de dinámicas no modeladas. Mientras que la acción del MOD estima las velocidades externas que perturban el sistema, la ley de adaptación estima el error de estimación, asegurando su convergencia a cero, es decir, $\hat{\boldsymbol{\mu}}_u(t) \approx \tilde{\boldsymbol{\mu}}_{ext}$.

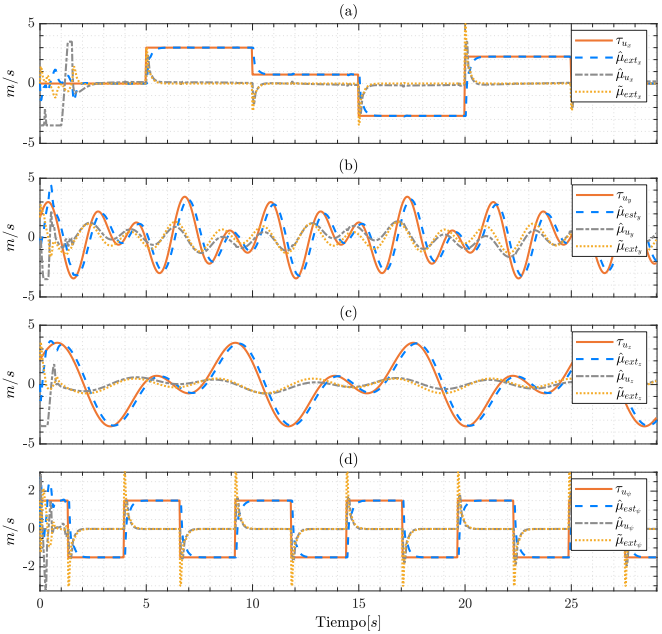


Figura 5.12: Estimación de perturbaciones con MOD y ley adaptativa.

La estimación de dinámicas no modeladas, expresadas como perturbaciones externas, ofrece una visión de los fenómenos no considerados durante el desarrollo del modelo matemático del sistema robótico. Los resultados confirman la robustez del controlador propuesto, que es una combinación de NMPC, la ley de adaptación-estimación y la dinámica del observador de momento.

5.6.5. Discusión

Este trabajo combina un observador de momento dinámico y una ley de estimación adaptativa con un controlador predictivo basado en modelos sujeto a restricciones para estimar perturbaciones no modeladas con el fin de resolver la tarea de seguimiento de trayectoria. Los resultados de las pruebas simuladas muestran que la ley de estimación del observador de momento y la ley de control adaptativo permiten estimar el componente de

las dinámicas no modeladas que sirve tanto para estimar la perturbación como para generar la adaptación necesaria en la dinámica del sistema para disipar errores de control. Además, el NMPC está estructurado como un problema de programación no lineal, empleando el método de disparo múltiple. Su función de costo abarca tanto los modelos cinemático como dinámico del cuadricóptero.

Las pruebas utilizan el marco MiL y se introdujeron perturbaciones externas para simular comportamientos disruptivos para el sistema. Esto permitió demostrar la robustez del controlador propuesto combinando la entrada óptima del controlador predictivo y la estimación de la perturbación desconocida para el sistema, asegurando que el error en estado estacionario converja a valores cercanos a cero a pesar de la incidencia de perturbaciones externas que modifican la dinámica del sistema. El uso del marco CasADi asegura que el tiempo necesario para encontrar la solución óptima se mantenga por debajo del tiempo de muestreo, abordando un desafío significativo en el uso de esquemas de control predictivo en condiciones críticas de sistemas de vuelo.

5.7. Conclusión

Este trabajo desarrolla y valida un controlador robusto que combina NMPC, incorporando una función de costo que considera tanto los modelos cinemático como dinámico del cuadricóptero para producir una entrada óptima para el modelo nominal, junto con un observador de momento que actúa como un sensor virtual, además de una ley adaptativa para estimar dinámicas no modeladas que afectan y modifican la dinámica del sistema, con el objetivo de mitigar los errores de control causados por perturbaciones externas. El controlador propuesto se evalúa mediante experimentos simulados utilizando el marco de programación no lineal CasADi, conocido por su alta eficiencia computacional. En las pruebas simuladas, se generan perturbaciones ficticias y la ley de adaptación estima con precisión valores cercanos a los reales, validando así la funcionalidad del controlador propuesto.

CAPÍTULO 7

MPC de Contorno (MPCC)

6 MPC de Contorno (MPCC)

6.1. Introducción

La creciente complejidad de los sistemas aéreos modernos ha impulsado avances sustanciales en metodologías de control capaces de gestionar las dinámicas no lineales y las restricciones críticas de seguridad de los UAV [65]. Los UAV deben operar en entornos dinámicos e inciertos donde no solo se requiere que sigan trayectorias predefinidas, sino que también respondan de manera adaptativa ante la presencia de obstáculos e interacciones con otros vehículos [66]. Estos escenarios imponen exigencias significativas en los sistemas de control, que deben optimizar simultáneamente la precisión de la trayectoria, la seguridad y la adaptabilidad en tiempo real [67].

El NMPCC ha surgido como un marco de control prometedor para abordar estos desafíos [68, 69, 70]. A diferencia del NMPC nominal, que se centra en minimizar errores de seguimiento en función del tiempo, el NMPCC enfatiza la minimización de errores de contorno y retardo en relación con una trayectoria deseada [71]. Esta optimización de seguimiento de trayectorias proporciona una mayor flexibilidad a los UAV para adaptar sus trayectorias en respuesta a cambios en el entorno, como la aparición repentina de obstáculos, manteniendo al mismo tiempo los objetivos de la misión [72]. Esta adaptabilidad hace que el NMPCC sea especialmente adecuado para tareas complejas que requieren alta capacidad de respuesta en tiempo real y altos niveles de autonomía [73].

La integración de NMPCC en sistemas UAV introduce desafíos adicionales al operar en espacios aéreos complejos, donde es necesario evitar tanto obstáculos estáticos como dinámicos [74]. Asegurar una navegación segura y libre de colisiones en estas condiciones requiere estrategias avanzadas de control que puedan ajustar dinámicamente las trayectorias mientras mantienen los estándares necesarios de estabilidad y seguridad [75]. Los métodos de control tradicionales, aunque efectivos en entornos

más simples, a menudo carecen de la robustez y flexibilidad necesarias para manejar la complejidad de los sistemas multi-UAV en aplicaciones del mundo real [76, 77, 78].

Para abordar estas limitaciones, esta seccion propone integrar NMPCC con los marcos de CLF y CBF. Las CLFs ofrecen un enfoque numérico sistemático para asegurar la estabilidad del sistema mediante la imposición de la disminución de una función de Lyapunov a lo largo del tiempo [79, 80, 81, 82]. Por otro lado, las CBFs imponen restricciones de seguridad, garantizando que los UAV operen dentro de límites seguros y eviten colisiones [83, 84]. La combinación de estos marcos de control dentro de la estructura del NMPCC resulta en un enfoque integral que aborda tanto el rendimiento como la seguridad, permitiendo que los UAV naveguen en entornos complejos y dinámicos de forma autónoma.

Además de las consideraciones de seguimiento de trayectorias y seguridad, la orientación tridimensional es crucial para el control de UAV, especialmente en entornos dinámicos donde se requieren maniobras precisas [85]. Para abordar esto, incorporamos formulaciones basadas en cuaterniones en el diseño del control. Los cuaterniones ofrecen varias ventajas sobre los ángulos de Euler tradicionales, como evitar el bloqueo de cardán y asegurar una rotación suave y continua [86]. Al aprovechar las propiedades matemáticas de los cuaterniones, en particular su capacidad para mapear al espacio tangente mediante el operador logarítmico (Log) [87, 88, 89], podemos gestionar efectivamente las dinámicas rotacionales de los UAV, mejorando la robustez y precisión del sistema de control general. Este enfoque basado en cuaterniones está fundamentado en la teoría de Lie y los principios de variedades, proporcionando una base matemática rigurosa para manejar el comportamiento rotacional de los UAV.

La implementación de este marco integrado, que combina NMPCC, CLFs, CBFs y formulaciones basadas en cuaterniones, introduce considerables desafíos computacionales, especialmente para aplicaciones en tiempo real. Para mitigar estos desafíos, utilizamos ACADOS [90], un paquete de software de código abierto optimizado para resolver problemas de control óptimo con alta eficiencia computacional, junto con CasADi [91], un marco simbólico para diferenciación automática y optimización numérica. Estos marcos son especialmente adecuados para tareas de control de UAV que demandan toma de decisiones rápida y precisa, ofreciendo una flexibilidad que permite una integración fluida con la estrategia de control propuesta. Para la integración numérica de las dinámicas rotacionales, se aplica

un método de Runge-Kutta de cuarto orden, asegurando actualizaciones precisas del estado.

En este estudio, validamos la estrategia de control propuesta mediante simulaciones bajo un esquema MiL. Estas simulaciones demuestran la practicidad y robustez del enfoque en entornos complejos. Los resultados destacan los beneficios de integrar NMPCC con técnicas de control avanzadas, ofreciendo una solución unificada para la navegación segura y confiable de UAV en entornos operativos desafiantes.

En resumen, las contribuciones de este capitulo son las siguientes:

- Presentación una novedosa integración de NMPCC con ES-CLF y CBF de orden superior, proporcionando un enfoque unificado para evitar obstáculos dinámicos en entornos con múltiples obstáculos.
- Demostración de la efectividad de las formulaciones basadas en cuaterniones, utilizando el operador Log para mapear al espacio tangente según la teoría de Lie y las variedades, mejorando la robustez y precisión del control de actitud del UAV al asegurar transiciones suaves y representación precisa de la orientación.

6.2. Kinodinámica del UAV

El marco inercial fijo al mundo $\langle \mathbb{I} \rangle$ se utiliza para describir la posición del cuadricóptero mediante el vector $\boldsymbol{p} = [n_x, n_y, n_z]^\intercal \in \mathbb{R}^3$. Su movimiento se expresa en el marco de referencia fijado al cuerpo $\langle \mathbb{B} \rangle$, el cual está unido al vehículo con su origen en el centro de masa (CoM). En este marco, el vector de velocidad $\boldsymbol{\nu} = \begin{bmatrix} \nu_l & \nu_m & \nu_n & \nu_\omega \end{bmatrix}^\intercal \in \mathbb{R}^4$ representa tanto las velocidades lineales como angulares. La orientación se describe mediante el cuaternión unitario $\boldsymbol{q} = [q_w, q_x, q_y, q_z]^\intercal \in \mathbb{H}$, proporcionando una representación compacta y libre de singularidades de la actitud.

El modelo dinámico presentado en el capitulo 5 y definido en (6.1) proporciona una representación simplificada de la dinámica del sistema. Expresa la evolución temporal del estado de velocidad $\dot{\boldsymbol{\nu}}(t)$ como una función de la entrada de control $\boldsymbol{\mu}(t) = \begin{bmatrix} \mu_l & \mu_m & \mu_n & \mu_\omega \end{bmatrix}^\intercal \in \mathbb{R}^4$, la velocidad actual $\boldsymbol{\nu}(t)$ y los parámetros del sistema $\boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 & .. & \xi_{19} \end{bmatrix}^\intercal$, que abarcan la dinámica interna del cuadricóptero, incluyendo una combinación de valores asociados a los fenómenos físicos, mecánicos, eléctricos y aerodinámicos que influyen en el sistema robótico. Esta formulación

considera tanto las velocidades lineales como angulares como variables de entrada que impulsan el sistema.

$$\boldsymbol{\mu}(t) = \mathbf{M}(\boldsymbol{\xi}, a, b)\dot{\boldsymbol{\nu}}(t) + \mathbf{C}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\nu}, a, b)\boldsymbol{\nu}(t), \tag{6.1}$$

donde $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\xi}, a, b) \in \mathbb{R}^{4\times4}$ es una matriz definida positiva, que define la matriz de masa e inercia del cuadricóptero; $\mathbf{C}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\nu}, a, b) \in \mathbb{R}^{4\times4}$ es la matriz de Coriolis y centrípeta. Los valores a, b, c representan el desplazamiento adicional del punto de interés.

La actitud del UAV evoluciona con el tiempo de acuerdo con la derivada del cuaternión, que relaciona la representación en cuaterniones de la orientación con la velocidad angular del sistema. Aquí, $\otimes$ denota la multiplicación de cuaterniones:

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2}\mathbf{q} \otimes \boldsymbol{\omega}.$$

Esto también se puede expresar como:

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -\boldsymbol{\omega}^\intercal(t) \\ \boldsymbol{\omega}(t) & \left[\boldsymbol{\omega}(t)\right]_\times \end{bmatrix}\mathbf{q}(t), \tag{6.2}$$

o de manera equivalente:

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \frac{1}{2}\mathbf{S}(\omega(t))\mathbf{q}(t), \tag{6.3}$$

donde el vector de velocidad angular en el marco del cuerpo se denota como $\boldsymbol{\omega} = [\omega_x, \omega_y, \omega_z]^\intercal$, y $\left[\boldsymbol{\omega}(t)\right]_\times$ representa su forma de matriz antisimétrica.

Así, la formulación del sistema kinodinámico del UAV se establece como un sistema generalizado cinemático-dinámico explícito y no lineal, con un vector de estado $\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix}\boldsymbol{p}^\intercal & \boldsymbol{q}^\intercal & \boldsymbol{\nu}^\intercal\end{bmatrix}^\intercal$ que incorpora cuaterniones y se define como sigue:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{\mu}(t), \tag{6.4}$$

Las matrices del sistema son:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0_{3\times7} & \mathbf{J}(\boldsymbol{q}) & 0_{3\times1} \\ 0_{4\times3} & \frac{1}{2}\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}) & 0_{4\times4} \\ 0_{4\times7} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} & 0_{4\times4} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0_{7\times4} \\ \mathbf{M}^{-1} \end{bmatrix}.$$

La matriz $\mathbf{J}(\boldsymbol{q})$ representa la transformación de velocidades en el marco del cuerpo a velocidades en el marco global.

6.3. Función de Control de Lyapunov

Consideremos el sistema dinámico no lineal del UAV descrito por:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = f(\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}, \tag{6.5}$$

donde $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado, $f(\boldsymbol{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ representa la dinámica sin control, y $g(\boldsymbol{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times m}$ es la matriz de distribución de control, que define cómo las entradas de control $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m$ afectan al sistema.

Una función escalar $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se llama *Función de Control de Lyapunov* si es continuamente diferenciable, definida positiva y satisface $V(\boldsymbol{x}_e) = 0$, donde $\boldsymbol{x}_e$ representa el punto de equilibrio. Esto indica que el sistema está en equilibrio cuando $V(\boldsymbol{x}) = 0$, y fuera del equilibrio cuando $V(\boldsymbol{x}) > 0$ para todo $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\boldsymbol{x}_e\}$.

Para que $V(\boldsymbol{x})$ sea efectiva como una CLF, su derivada temporal a lo largo de las trayectorias del sistema bajo la ley de control $\boldsymbol{u}$ debe ser definida negativa. Matemáticamente, este requisito se expresa como:

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}) = \nabla V(\boldsymbol{x}) \cdot \dot{\boldsymbol{x}} < 0 \quad \text{para todo } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\boldsymbol{x}_e\}. \tag{6.6}$$

Esta condición implica que la función $V(\boldsymbol{x})$ disminuye estrictamente a lo largo de las trayectorias del sistema para una elección adecuada de la entrada de control $\boldsymbol{u}$, conduciendo a la estabilidad asintótica del sistema en el punto de equilibrio $\boldsymbol{x}_e$.

Una *Función de Control de Lyapunov con Estabilidad Exponencial* es una forma especializada de CLF que asegura la convergencia exponencial del vector de estado $\boldsymbol{x}$ al punto de equilibrio $\boldsymbol{x}_e$. La función $V(\boldsymbol{x})$ se clasifica como una ES-CLF si satisface las siguientes condiciones [80]:

- Existen constantes positivas $c_1, c_2 > 0$ tales que:

$$c_1\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_e\|^2 \leq V(\boldsymbol{x}) \leq c_2\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_e\|^2, \quad \text{para todo } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n. \tag{6.7}$$

- Existe una constante positiva $c_3 > 0$ y una ley de control continua $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{k}(\boldsymbol{x})$ que asegura que se cumpla la siguiente condición:

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}) \leq -c_3 V(\boldsymbol{x}), \quad \text{para todo } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n,\ \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}_e. \tag{6.8}$$

Integrando esta desigualdad con respecto al tiempo se obtiene:

$$V(\boldsymbol{x}(t)) \leq V(\boldsymbol{x}(0))e^{-c_3 t}. \tag{6.9}$$

Dadas las cotas cuadráticas en $V(\boldsymbol{x})$, podemos deducir además:

$$c_1\|\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}_e\|^2 \leq V(\boldsymbol{x}(t)) \leq V(\boldsymbol{x}(0))e^{-c_3 t} \leq c_2\|\boldsymbol{x}(0) - \boldsymbol{x}_e\|^2 e^{-c_3 t}. \tag{6.10}$$

Tomando la raíz cuadrada en ambos lados y reorganizando términos, obtenemos:

$$\|\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}_e\| \leq \sqrt{\frac{c_2}{c_1}}\|\boldsymbol{x}(0) - \boldsymbol{x}_e\|e^{-\frac{c_3}{2}t}. \tag{6.11}$$

Esta condición implica que $V(\boldsymbol{x})$ decrece exponencialmente con el tiempo, garantizando que el vector de estado $\boldsymbol{x}$ converge al punto de equilibrio $\boldsymbol{x}_e$ de manera exponencial, con una tasa de convergencia determinada por la constante c_3.

El uso de una ES-CLF como función de Lyapunov en el diseño de control proporciona importantes garantías de estabilidad teórica [92, 93]. Esta estabilidad exponencial implica que el vector de estado del sistema $\boldsymbol{x}(t)$ converge al punto de equilibrio $\boldsymbol{x}_e$ a una tasa exponencial, lo que representa una forma de estabilidad más fuerte en comparación con la estabilidad asintótica.

6.4. Funciones de Barrera de Control

Una *Función de Barrera de Control* se define para un conjunto seguro $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ como:

$$\mathcal{C} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid h(\boldsymbol{x}) \geq 0\}, \tag{6.12}$$

donde $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función escalar dos veces diferenciable de forma continua.

Para asegurar que el estado del sistema permanezca dentro del conjunto seguro $\mathcal{C}$, consideramos las derivadas sucesivas de Lie de $h(\boldsymbol{x})$ a lo largo de la dinámica del sistema. La derivada de Lie de $h(\boldsymbol{x})$ con respecto a $f(\boldsymbol{x})$ se define como:

$$L_f h(\boldsymbol{x}) = \nabla h(\boldsymbol{x}) \cdot f(\boldsymbol{x}), \tag{6.13}$$

y la derivada de Lie de $h(\boldsymbol{x})$ con respecto a $g(\boldsymbol{x})$ es:

$$L_g h(\boldsymbol{x}) = \nabla h(\boldsymbol{x}) \cdot g(\boldsymbol{x}). \tag{6.14}$$

Aquí, $\nabla h(\boldsymbol{x})$ es el gradiente de la función $h(\boldsymbol{x})$ respecto a las variables de estado $\boldsymbol{x}$, y este gradiente se multiplica por $f(\boldsymbol{x})$ y $g(\boldsymbol{x})$, respectivamente.

La derivada de Lie de orden k de la función $h(\boldsymbol{x})$ a lo largo de la dinámica del sistema es:

$$L_f^k h(\boldsymbol{x}) = \frac{d^k h(\boldsymbol{x})}{dt^k} \tag{6.15}$$

$$= \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} \left(L_f^{k-1} h(\boldsymbol{x}) \right) f(\boldsymbol{x}). \tag{6.16}$$

Además, la derivada de Lie cruzada de orden $k-1$ que involucra la función $g(\boldsymbol{x})$ se expresa como:

$$L_g L_f^{k-1} h(\boldsymbol{x}) = \nabla \left(L_f^{k-1} h(\boldsymbol{x}) \right) \cdot g(\boldsymbol{x}), \tag{6.17}$$

donde $L_f^{k-1} h(\boldsymbol{x})$ es la derivada de Lie de orden $(k-1)$ de $h(\boldsymbol{x})$ con respecto a $f(\boldsymbol{x})$.

Para manejar restricciones de seguridad más complejas, introducimos Funciones de Barrera de Control de orden superior, que están gobernadas por la siguiente condición:

$$L_f^k h(\boldsymbol{x}) + L_g L_f^{k-1} h(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{u} + \cdots + L_g h(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{u} \geq -\alpha_k(h(\boldsymbol{x})), \tag{6.18}$$

donde $\alpha_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función de clase $\mathcal{K}$, es decir, es continua, estrictamente creciente, y $\alpha_k(0) = 0$.

La expresión completa para k derivadas puede expandirse como:

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} L_f^{k-i} L_g^i h(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{u} \geq -\alpha_k(h(\boldsymbol{x})), \tag{6.19}$$

donde $\binom{k}{i}$ es el coeficiente binomial. Esta condición asegura que, bajo la acción de la entrada de control $\boldsymbol{u}$, el sistema permanecerá dentro del conjunto seguro $\mathcal{C}$ definido por la función $h(\boldsymbol{x})$.

Para que $h(\boldsymbol{x})$ sea una *Función de Barrera de Control Exponencial*, debe existir un vector de ganancias $\mathbf{K}_\alpha = [K_{\alpha,1}, K_{\alpha,2}, \ldots, K_{\alpha,r}] \in \mathbb{R}^r$ tal que para el sistema descrito por (6.5), se cumpla la siguiente condición:

$$\sup_{\boldsymbol{u}\in U} \left[L_f^r h(\boldsymbol{x}) + L_g L_f^{r-1} h(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{u} \right] \geq -\mathbf{K}_\alpha \eta_b(\boldsymbol{x}), \tag{6.20}$$

donde el vector $\eta_b(\boldsymbol{x})$ agrupa las derivadas de $h(\boldsymbol{x})$ y sus derivadas de Lie hasta el orden $r-1$. El vector $\eta_b(\boldsymbol{x})$ se construye como:

$$\eta_b(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} h(\boldsymbol{x}) \\ L_f h(\boldsymbol{x}) \\ L_f^2 h(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ L_f^{r-1} h(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}. \tag{6.21}$$

Para calcular la derivada de Lie de segundo orden de la función de barrera, aplicamos la derivada de Lie a $L_f h(\boldsymbol{x})$ de la siguiente forma:

$$L_f^2 h(\boldsymbol{x}) = \nabla(L_f h(\boldsymbol{x})) \cdot f(\boldsymbol{x}), \tag{6.22}$$

$$L_g L_f h(\boldsymbol{x}) = \nabla(L_f h(\boldsymbol{x})) \cdot g(\boldsymbol{x}). \tag{6.23}$$

Este enfoque permite calcular funciones de barrera de hasta segundo orden, lo cual es esencial para implementar restricciones de la forma discutida:

$$\ddot{h}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = L_f^2 h(\boldsymbol{x}) + L_g L_f h(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{u}. \tag{6.24}$$

6.5. MPC de Contorno

A diferencia del NMPC tradicional, la formulación de *Control Predictivo de Seguimiento de Contorno No Lineal* se utiliza para minimizar los errores de seguimiento de trayectoria mientras se maximiza la velocidad a lo largo de una trayectoria dada en un horizonte de predicción finito $l \in [t, t+N]$ [72]. Este enfoque es particularmente útil en entornos tridimensionales (3D), donde el objetivo es reducir tanto el error de contorno (ortogonal a la trayectoria) como el error de arrastre (paralelo a la trayectoria), asegurando un progreso eficiente a lo largo del camino.

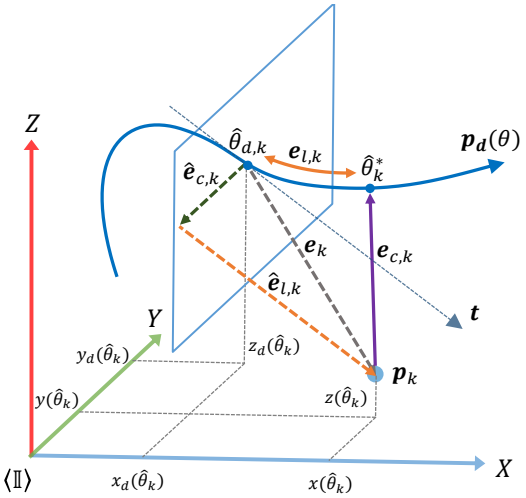


Figura 6.1: El error de posición se proyecta en vectores ortogonales, resultando en aproximaciones de los errores de contorno y de arrastre.

La trayectoria deseada se define como una curva suave parametrizada por la longitud de arco θ, también llamada *progreso* a lo largo del camino. La posición en cualquier punto de la trayectoria se da por $\mathbf{p}_d(\theta) = \begin{bmatrix} x_d(\theta) & y_d(\theta) & z_d(\theta) \end{bmatrix}^\intercal$, y su derivada con respecto a θ, que corresponde al vector tangente, es:

$$\mathbf{t}(\theta) = \mathbf{p}'_d(\theta) = \frac{d}{d\theta}\mathbf{p}_d(\theta).$$

Dado que la trayectoria está parametrizada por la longitud de arco, la norma del vector tangente es siempre uno:

$$\|\mathbf{t}(\theta)\| = 1,$$

En cualquier instante t_k, el punto θ^*_k representa la ubicación en la trayectoria deseada más cercana a la posición actual $\mathbf{p}(t_k)$. Sin embargo, dado que θ^*_k suele ser desconocido durante la optimización, el sistema

lo aproxima con $\hat{\theta}_k$, que sirve como la mejor estimación de θ_k^*. El error de posición total se define como la diferencia entre la posición actual del sistema $\mathbf{p}(t_k)$ y la posición deseada $\mathbf{p}_d(\hat{\theta}_k)$ en la trayectoria:

$$\mathbf{e}(\hat{\theta}_k) = \mathbf{p}(t_k) - \mathbf{p}_d(\hat{\theta}_k).$$

Aunque la posición del sistema está parametrizada en tiempo y la posición deseada está parametrizada en progreso, la comparación es válida porque $\hat{\theta}_k$ corresponde a la posición en la trayectoria en t_k. Como se muestra en la Fig. 6.1, el error total puede descomponerse en dos componentes ortogonales: el *error de arrastre*, $\mathbf{e}_l(\hat{\theta}_k)$, y el *error de contorno*, $\mathbf{e}_c(\hat{\theta}_k)$.

El error de arrastre se define como la diferencia en la longitud de arco entre la posición actual θ_k y el minimizador real θ_k^*:

$$e_l(\theta_k^*) = \theta_k - \theta_k^*.$$

A menudo se aproxima proyectando el error de posición total $\mathbf{e}(\hat{\theta}_k)$ en el vector tangente $\mathbf{t}(\hat{\theta}_k)$:

$$\mathbf{e}_l(\hat{\theta}_k) = \Big(\mathbf{e}(\hat{\theta}_k) \cdot \mathbf{t}(\hat{\theta}_k)\Big)\, \mathbf{t}(\hat{\theta}_k),$$

lo cual resulta en un vector que representa la componente del error total a lo largo de la dirección del movimiento. Aquí, $\mathbf{t}(\hat{\theta}_k) = \mathbf{p}'_d(\hat{\theta}_k)$.

Por otro lado, el error de contorno cuantifica la desviación perpendicular a la trayectoria. Se calcula restando el error de arrastre del error de posición total. Alternativamente, el error de contorno puede calcularse proyectando el error de posición en la normal al vector tangente. Esta proyección se realiza utilizando la matriz P_{ec}, que se define como:

$$P_{ec} = I - \mathbf{t}(\hat{\theta}_k)\mathbf{t}^\intercal(\hat{\theta}_k),$$

donde I es la matriz identidad. El error de contorno se expresa entonces como:

$$\mathbf{e}_c(\hat{\theta}_k) = P_{ec}\, \mathbf{e}(\hat{\theta}_k).$$

El error de contorno también puede entenderse como la solución al siguiente problema de minimización:

$$e_c(\hat{\theta}_k) = \min_{\theta} \|\mathbf{p}_k - \mathbf{p}_d(\theta)\|.$$

Si la proyección del error en la dirección tangente $\mathbf{e}_l(\hat{\theta}_k)$ es cero, las aproximaciones $\hat{\theta}_k$, $\mathbf{e}_c(\hat{\theta}_k)$ y $\mathbf{e}_l(\hat{\theta}_k)$ coinciden con sus valores reales, asegurando un seguimiento preciso.

Finalmente, la *velocidad de progreso* $v_{\hat{\theta},k}$ cuantifica la tasa a la que el sistema se mueve a lo largo de la trayectoria. Se calcula proyectando la velocidad del sistema $\mathbf{v}_k$ en el vector tangente $\mathbf{t}(\hat{\theta}_k)$:

$$v_{\hat{\theta},k} = \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{t}(\hat{\theta}_k),$$

lo cual da la velocidad instantánea a la que el sistema progresa a lo largo del camino tangente.

6.5.1. Problema de optimización para NMPCC

Además de minimizar las desviaciones del camino deseado y el esfuerzo de control, el NMPCC también considera mantener la orientación de la actitud del sistema alineada con la dirección de movimiento a lo largo del camino.

Este enfoque aprovecha el mapa logarítmico $\mathrm{Log}(\cdot)$, que mapea el error de cuaternión desde el espacio de cuaterniones unitarios $\mathbb{H}$ al espacio tangente $\mathbb{R}^3$. Este mapa se define como:

$$\mathrm{Log}(\tilde{\mathbf{q}}) = 2\tilde{\mathbf{q}}_v \cdot \frac{\mathrm{atan2}(\|\tilde{\mathbf{q}}_v\|, \tilde{q}_w)}{\|\tilde{\mathbf{q}}_v\|}, \tag{6.25}$$

donde $\tilde{q}_w \in \mathbb{R}$ es el componente escalar y $\tilde{\mathbf{q}}_v \in \mathbb{H}_p$ es la parte vectorial del error de cuaternión. Esta transformación es particularmente útil para optimizar errores de orientación en el espacio euclidiano. El error de orientación entre un cuaternión deseado $\mathbf{q}_d$ y el cuaternión actual $\mathbf{q}$ se calcula como:

$$\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q}_d \otimes \mathbf{q}^{-1}, \tag{6.26}$$

donde $\otimes$ denota la multiplicación de cuaterniones. El inverso de un cuaternión se puede calcular usando su conjugado, denotado como $\bar{\mathbf{q}}$, junto con su norma. Específicamente, el inverso se da por:

$$\mathbf{q}^{-1} = \frac{\bar{\mathbf{q}}}{||\mathbf{q}||^2}, \tag{6.27}$$

La variedad de cuaterniones $\mathcal{S}^3$, que representa cuaterniones unitarios, es una cobertura doble del grupo ortogonal especial $SO(3)$, lo que significa

que tanto $\mathbf{q}$ como $-\mathbf{q}$ describen la misma rotación [94]. Para evitar la ambigüedad que surge de esta propiedad, es esencial asegurar que la parte real q_w sea positiva; si q_w es negativo, el cuaternión debe negarse antes de proceder con cualquier cálculo.

El problema de optimización se formula como:

$$
\begin{aligned}
\min_{\mathbf{u_k}, \tilde{\mathbf{q}}_k} \quad & \sum_{k=0}^{N} \|\mathbf{e}_c(\hat{\theta}_k)\|^2_{\mathbf{Q}_c} + \|\mathbf{e}_l(\hat{\theta}_k)\|^2_{\mathbf{Q}_l} - \mu v^2_{\hat{\theta},k} + \\
& \|\mathrm{Log}(\tilde{\mathbf{q}}_k)\|^2_{\mathbf{Q}_q} + \frac{1}{2}\|\mathbf{u}_k\|^2_{\mathbf{R}} + \rho\zeta^2 \\
\text{sujeto a:} \quad & \boldsymbol{x}_{k+1} = f(\boldsymbol{x}_k) + g(\boldsymbol{x}_k)\boldsymbol{u}_k, \\
& \boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}(0), \\
& \mathbf{u}_k \in \mathbb{U}, \\
& \boldsymbol{x}_k \in \mathbb{X}, \\
& 0 \leq v_{\theta_k} \leq v_{\theta_{\max}}, \\
& \dot{V}(\boldsymbol{x}_k) \leq -\gamma V(\boldsymbol{x}_k) + \zeta, \\
& \ddot{h}(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{\mu}_k) \geq -\mathbf{K}_\alpha \eta_b(\boldsymbol{x}_k).
\end{aligned}
\tag{6.28}
$$

Las ganancias $\mathbf{Q}_c$ y $\mathbf{Q}_l$ representan los pesos para los errores de contorno y de arrastre, respectivamente. μ ajusta el compromiso para una mayor velocidad de progreso $v_{\hat{\theta}}$ para moverse lo más rápido posible a lo largo del camino, mientras que $\mathbf{Q_q}$ es la matriz de peso para el error de cuaternión. Finalmente, $\mathbf{R}$ penaliza el esfuerzo de control;

En el contexto de NMPCC, se introduce una función candidata de Lyapunov para asegurar la estabilidad del sistema mientras se minimiza el error a lo largo del camino. La función candidata de Lyapunov V considera tanto el error de contorno $\mathbf{e}_c(\hat{\theta}_k)$ como el error de arrastre $\mathbf{e}_l(\hat{\theta}_k)$, y se define como:

$$V = \frac{1}{2}\mathbf{e}_c^\top \mathbf{W}_c \mathbf{e}_c + \frac{1}{2}\mathbf{e}_l^\top \mathbf{W}_l \mathbf{e}_l,$$

donde $\mathbf{W}_c$ y $\mathbf{W}_l$ son matrices de ponderación definidas positivas para los errores de contorno y de arrastre, respectivamente.

La derivada temporal de V se expresa entonces como:

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{p}}\mathbf{v},$$

donde el gradiente de esta función $\frac{\partial V}{\partial \mathbf{p}}$ se calcula respecto al vector de posición $\mathbf{p}$, y $\mathbf{v}$ es el vector de velocidad, definido previamente.

Para imponer la condición de Lyapunov, se introduce una variable de holgura $\zeta \geq 0$:

$$\dot{V} \leq -c_3 V + \zeta.$$

La variable de holgura ζ introduce flexibilidad cuando las restricciones son demasiado estrictas, permitiendo que el sistema se mantenga factible. Para limitar su impacto, ζ se penaliza en la función de costo con el término $\rho\zeta^2$, donde $\rho > 0$ controla el grado de penalización. Esto asegura la factibilidad en el Problema de Control Óptimo (OCP) al tiempo que preserva la estabilidad. En aplicaciones en tiempo real, el uso de una variable de holgura es crucial para manejar incertidumbres y asegurar que el proceso de optimización permanezca factible, especialmente bajo restricciones computacionales estrictas.

La función de barrera está diseñada para asegurar que la distancia entre el UAV y el obstáculo sea mayor que el tamaño combinado de ambos, más un margen de seguridad. Esta función se expresa como:

$$h = \|\mathbf{p} - \mathbf{p}_{obs}\| - (r_{uav} + r_{obs} + \text{margin}),$$

donde $\mathbf{p}_{obs} = [x_{obs}, y_{obs}, z_{obs}]^T$ representa la posición del obstáculo. El término r_{uav} corresponde al radio del UAV, r_{obs} al radio del obstáculo, y la constante margin asegura una distancia adicional mínima para evitar colisiones.

6.5.2. Parametrización de la longitud de arco mediante el método de bisección

Para parametrizar la trayectoria deseada $\mathbf{p}_d(t)$ mediante la longitud de arco, utilizamos el *método de bisección* para determinar el tiempo correspondiente t_k para cada valor de longitud de arco θ_k. Dada una trayectoria continua $\mathbf{p}_d(t)$, la longitud de arco desde el punto inicial t_0 hasta cualquier punto t_k se da por la siguiente ecuación:

$$\theta_k = L(t_k) = \int_{t_0}^{t_k} \left\| \frac{d}{dt}\mathbf{p}_d(t) \right\| dt, \tag{6.29}$$

Dado que no existe una expresión explícita para t_k como función de θ_k, se emplea el método de bisección para encontrar numéricamente t_k

Algoritmo 2 Cálculo del Tiempo para θ_k Basado en la Longitud de Arco

Requiere: Longitud de arco deseada θ_k, intervalo inicial $[t_{\text{low}}, t_{\text{high}}]$, tolerancia ϵ.
Asegura: $t_k = t_{\text{mid}}$ tal que $L(t_k) \approx \theta_k$.
  while $|L(t_{\text{mid}}) - \theta_k| \geq \epsilon$ **hacer**
    Calcular el punto medio $t_{\text{mid}} = \frac{t_{\text{low}} + t_{\text{high}}}{2}$.
    Calcular $L(t_{\text{mid}}) = \int_{t_0}^{t_{\text{mid}}} \|\mathbf{p}'_d(t)\| \, dt$.
    if $L(t_{\text{mid}}) < \theta_k$ **then**
      Actualizar $t_{\text{low}} = t_{\text{mid}}$.
    else
      Actualizar $t_{\text{high}} = t_{\text{mid}}$.
    Fin if
  Fin whileRetornar $t_k = t_{\text{mid}}$

tal que la Ecuación 6.29 se satisfaga para el valor dado de θ_k. Para ello, inicializamos el algoritmo de bisección con un intervalo $[t_{\text{low}}, t_{\text{high}}]$, donde t_{low} y t_{high} son estimaciones que se espera contengan t_k. Típicamente, t_{low} se puede inicializar como t_0, el punto de inicio de la trayectoria, y t_{high} se elige en función de una estimación de dónde se alcanza la longitud de arco deseada θ_k.

El método de bisección, como se describe en el Algoritmo 2, refina iterativamente el intervalo $[t_{\text{low}}, t_{\text{high}}]$ para encontrar el tiempo t_k que corresponde a la longitud de arco deseada θ_k. Este proceso continúa hasta que la diferencia entre la longitud de arco calculada $L(t_{\text{mid}})$ y θ_k esté por debajo de la tolerancia especificada ϵ.

Una vez encontrado t_k, la posición correspondiente $\mathbf{p}_d(\theta_k)$ se obtiene como:

$$\mathbf{p}_d(\theta_k) = \mathbf{p}_d(t_k) = \begin{bmatrix} x_d(t_k) & y_d(t_k) & z_d(t_k) \end{bmatrix}^\mathsf{T}.$$

6.5.3. Configuración experimental

Realizamos los experimentos usando una estación PC con un AMD Ryzen 7 3700x y 16GB de RAM, utilizando CasADi con ACADOS para el control óptimo. El controlador se ejecutó a 30 Hz con un horizonte de predicción de 30 pasos (1 segundo). El UAV siguió una trayectoria en forma de ocho, parametrizada por longitud de arco, con una velocidad máxima de

progreso $v_{\theta_{\max}}$ de 6 m/s. El UAV, con un radio de 0.15 m correspondiente a un marco de 6 pulgadas [95], incluyó un margen de seguridad de 0.1 m. Los errores de contorno y de arrastre se ponderaron con $\mathbf{Q}_c = 3I_{3\times3}$ y $\mathbf{Q}_l = I_{3\times3}$, respectivamente. La velocidad de progreso fue regulada por una ganancia $\mu = 0{,}1$, el esfuerzo de control fue penalizado con $\mathbf{R} = \text{diag}[0{,}02, 200, 200, 200]$ y el error de actitud fue ponderado por $\mathbf{Q}_q = I_{3\times3}$. Se utilizaron la restricción de Lyapunov $\mathbf{W}_c = \mathbf{W}_l = I_{3\times3}$ y $\rho = 100$. Se aplicaron una ganancia de $\gamma = 0{,}9$ y $\mathbf{K}_\alpha = [20, 8]^\intercal$ para el obstáculo estático y $\mathbf{K}_\alpha = [20, 15]^\intercal$ para el obstáculo móvil. La trayectoria de referencia considerada fue: $x(t) = 4\sin(0{,}04 \cdot t) + 1$, $y(t) = 4\sin(0{,}08 \cdot t)$, y $z(t) = 2\sin(0{,}08 \cdot t) + 6$. Se requirió que el cuadricóptero completara la trayectoria experimental en una duración fija de 30 segundos.

6.5.4. Experimentación y resultados

El marco MPCC fue probado en simulaciones que involucraron obstáculos virtuales estáticos y móviles para evaluar sus capacidades de seguimiento de trayectorias y evasión de obstáculos. Durante la prueba, un obstáculo móvil se desplazó a lo largo de la misma trayectoria pero en dirección opuesta, aumentando la velocidad relativa entre el UAV y el obstáculo debido a sus movimientos opuestos. La Fig. 6.2 ilustra la trayectoria del UAV mientras navega alrededor de obstáculos estáticos y móviles, demostrando la efectividad del MPCC en minimizar los errores de contorno y arrastre mientras asegura un progreso constante a lo largo de la trayectoria deseada.

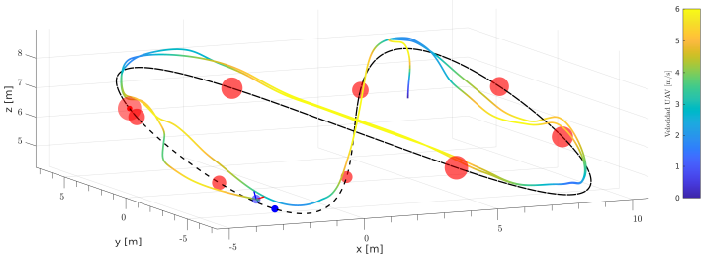


Figura 6.2: Trayectoria de vuelo del UAV con MPCC en presencia de obstáculos estáticos.

Los errores de contorno y de arrastre registrados durante el experimento se resumen en la Fig. 6.3, demostrando la efectividad del MPCC en mantener bajos valores de error, con errores de contorno instantáneos por debajo de $\|\mathbf{e}_c\| < 1{,}97$ m y errores de arrastre instantáneos por debajo de $\|\mathbf{e}_l\| < 1{,}87$ m, cuando hay obstáculos presentes. Se observa que durante las maniobras de evasión de obstáculos, el error de contorno es el más afectado, ya que el UAV ajusta su trayectoria para rodear el obstáculo.

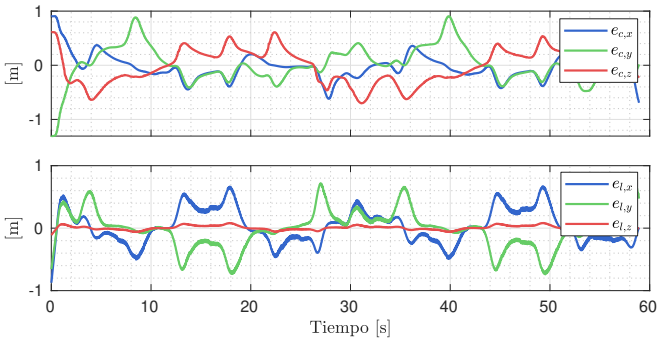


Figura 6.3: Errores de contorno y de arrastre durante el experimento

En la Fig. 6.4, se muestran las velocidades de progreso y la norma de la velocidad. Aunque ambas curvas parecen similares debido a la dirección mantenida, es importante notar que la velocidad de progreso es la proyección de la velocidad del sistema sobre el vector tangente de la referencia. Además, la velocidad de progreso cumple con las restricciones establecidas en el OCP, asegurando un avance controlado a lo largo de la trayectoria.

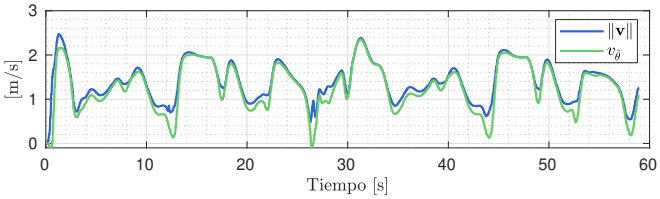


Figura 6.4: Velocidad instantánea del sistema y la velocidad de progreso.

En la Fig. 6.5, se muestran los valores combinados de ECBF (h_1 y h_2), demostrando su efectividad en la aplicación de restricciones de seguridad a lo largo de la trayectoria del UAV, especialmente alrededor de obstáculos estáticos y móviles.

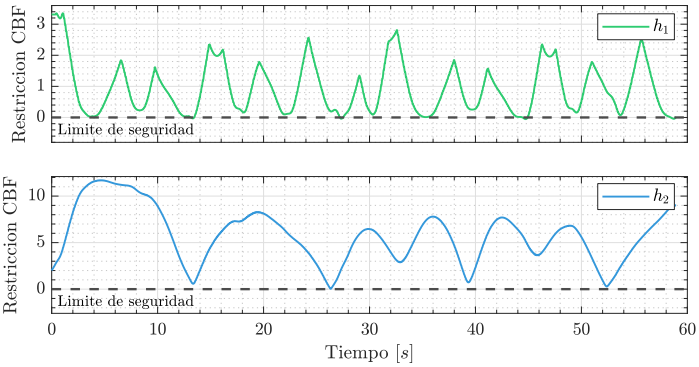


Figura 6.5: Restricciones de seguridad CBF.

Al asegurar que $h(x) > 0$ durante todo el experimento, el ECBF garantiza que el UAV evite colisiones y mantenga límites operacionales seguros durante el vuelo. La distancia mínima de seguridad entre los obstáculos se mantuvo consistentemente, con los valores de CBF permaneciendo positivos, lo que confirma que las medidas de seguridad se aplicaron de manera efectiva.

En la Fig. 6.6, la restricción de estabilidad ES-CLF asegura que el sistema permanezca estable. Se observan aumentos temporales en esta restricción cuando el UAV realiza maniobras correctivas, particularmente durante la evasión de obstáculos. Sin embargo, la inclusión de una variable de holgura permite violaciones mínimas cuando es necesario, asegurando que el optimizador se mantenga factible. Esto garantiza que el sistema permanezca operativo, y a pesar de estas desviaciones temporales, la métrica de estabilidad tiende a la convergencia cuando el UAV regresa a su trayectoria deseada, destacando la robustez del sistema y su capacidad para recuperar la estabilidad después de acciones correctivas.

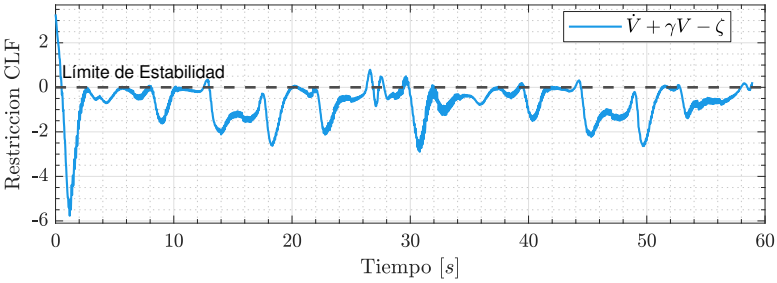


Figura 6.6: Restricciones de estabilidad CLF.

En la Fig. 6.7, se muestran las acciones de control, manteniéndose dentro de los límites establecidos por el OCP. Notablemente, en presencia de obstáculos, las acciones de control se ajustan de manera efectiva, asegurando la evasión de obstáculos sin violar las restricciones impuestas. Esto ilustra la capacidad del sistema para manejar escenarios complejos mientras mantiene la estabilidad de control.

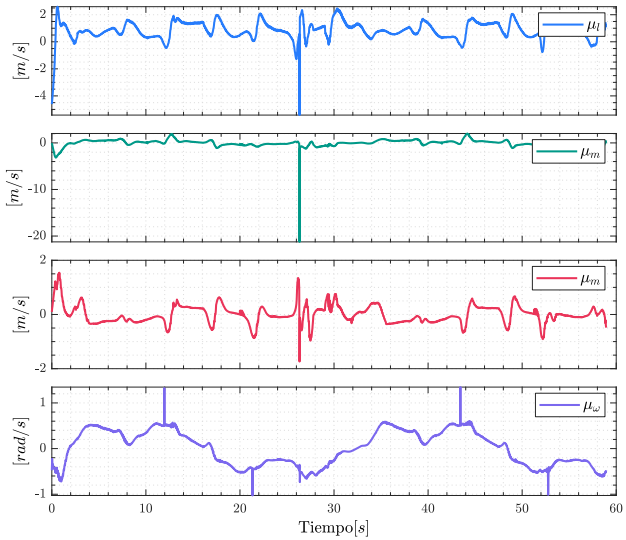


Figura 6.7: Acciones de control dentro de los límites del OCP.

6.6. Conclusión

El marco NMPCC proporciona una solución efectiva para seguir trayectorias deseadas al minimizar tanto los errores ortogonales como los tangenciales mientras se maximiza el progreso a lo largo del camino. Al integrar la geometría de la trayectoria con la dinámica del sistema, el NMPCC permite un seguimiento preciso y robusto de la trayectoria incluso en presencia de obstáculos a altas velocidades.

Los resultados de los análisis de ECLF y ECBF confirman que el marco NMPCC propuesto garantiza tanto estabilidad como seguridad durante las tareas de seguimiento de trayectorias del UAV. El trabajo futuro se centrará en extender este marco a sistemas multi-UAV y validar su desempeño en pruebas de vuelo en condiciones reales.

Además, el marco NMPCC incorpora una estrategia de control de actitud que utiliza el mapa logarítmico para proyectar cuaterniones en $\mathbb{R}^3$. Esto permite la minimización directa de errores de actitud en la función de costo, permitiendo la integración del álgebra de Lie con operaciones euclidianas estándar. Como resultado, el marco asegura una alineación precisa de la orientación del UAV con la trayectoria deseada, permitiendo manejar maniobras complejas de manera efectiva en el espacio geométrico.

CAPÍTULO 5

MPC de manipulador aéreo

7 MPC de manipulador aéreo

7.1. Introducción

Los capítulos anteriores desarrollaron distintas estrategias de Control Predictivo Basado en Modelos aplicadas a vehículos aéreos no tripulados, abordando desde esquemas nominales hasta variantes robustas y adaptativas, así como técnicas avanzadas de seguimiento de contorno. Como extensión natural de estas contribuciones, este capítulo se enfoca en el caso de los *manipuladores aéreos robóticos* (ARMs), sistemas que combinan un UAV con uno o más grados de libertad manipulativos para interactuar físicamente con el entorno.

Los ARMs han despertado un creciente interés en la literatura [96, 97], pues permiten ejecutar tareas que los UAVs convencionales no pueden realizar, tales como inspección activa [98, 99], manipulación estructural con herramientas [100] y transporte autónomo de objetos [101, 102]. Sin embargo, su uso práctico sigue siendo desafiante debido a la dinámica fuertemente acoplada entre el UAV y el brazo robótico, la subactuación inherente del sistema y la necesidad de mantener estabilidad durante operaciones de contacto o manipulación precisa.

Estas características convierten a los manipuladores aéreos en candidatos ideales para técnicas avanzadas de control como el MPC, que permite integrar de manera explícita:

- la cinemática y dinámica acoplada UAV–brazo,
- la redundancia del sistema para incorporar tareas secundarias,
- y restricciones físicas o operativas dentro de la optimización.

En este contexto, el MPC ofrece una herramienta poderosa para lograr seguimiento preciso de trayectoria del efector final mientras gestiona simultáneamente objetivos adicionales, tales como estabilización del UAV, minimización del esfuerzo de control o mantenimiento de configuraciones

internas deseadas. La capacidad del MPC para actualizar decisiones en tiempo real lo hace especialmente adecuado para ARMs, que operan en entornos con alta demanda dinámica y posibles perturbaciones externas.

Las contribuciones específicas de este capítulo son:

- **Aplicación del MPC en manipuladores aéreos:** Se implementa MPC para el seguimiento de trayectorias del efector final considerando la interacción acoplada UAV–manipulador, optimizando acciones de control en tiempo real en escenarios inciertos.

- **Aprovechamiento de la redundancia del sistema:** Se formula una función de costo que integra objetivos secundarios, permitiendo que el sistema gestione simultáneamente la estabilidad del UAV y la configuración del brazo sin comprometer la tarea principal.

- **Función de costo integral para tareas múltiples:** Se propone una estructura de costo que penaliza error de trayectoria, esfuerzo de control y desviaciones articulares, produciendo un comportamiento suave y robusto ante perturbaciones externas.

Estas contribuciones consolidan el uso del MPC como un marco unificado y robusto para el control de manipuladores aéreos, integrando tanto precisión en la trayectoria como objetivos secundarios mediante una estructura de optimización coherente con la complejidad del sistema.

7.2. Modelado del manipulador aéreo robótico

Antes de presentar las ecuaciones del modelo matemático, es conveniente resumir la notación empleada en este capítulo. La Tabla 7.1 recoge las principales variables, matrices y parámetros utilizados en la formulación cinemática y dinámica del manipulador aéreo, con el fin de facilitar la lectura y mantener consistencia en la representación matemática a lo largo del desarrollo.

Tabla 7.1: Resumen de variables utilizadas en el capítulo

Símbolo	Descripción
$\boldsymbol{\eta}$	Coordenadas generalizadas del UAV: posición (η_x, η_y, η_z) y yaw η_ψ
$\mathbf{q}_a$	Coordenadas articulares del brazo robótico: $[q_1, q_2, q_3]^\top$
$\mathbf{q}$	Estados internos completos: $[\boldsymbol{\eta}^\top \ \mathbf{q}_a^\top]^\top$
$\boldsymbol{h}$	Pose del efector final en el marco inercial
$\dot{\boldsymbol{h}}$	Velocidad del efector final
$\boldsymbol{\nu}$	Velocidades de maniobrabilidad del sistema: UAV + articulaciones
$\boldsymbol{\nu}_u$	Velocidades del UAV: $[\nu_l, \nu_m, \nu_n, \nu_\omega]^\top$
$\boldsymbol{\nu}_a$	Velocidades articulares: $[\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3]^\top$
$\boldsymbol{\nu}_d$	Velocidades de referencia del manipulador aéreo
$\mathbf{J}(\mathbf{q})$	Matriz Jacobiana del manipulador aéreo (4×7)
$\mathbf{o}$	Cuaternión de orientación del UAV
$\boldsymbol{\omega}$	Velocidades angulares del UAV
$\mathbf{M}(\mathbf{q})$	Matriz de inercia del sistema (7×7)
$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$	Matriz de Coriolis y fuerzas centrífugas
$\mathbf{g}(\mathbf{q})$	Vector gravitacional generalizado
${}^i\mathbf{R}_b$	Matriz de rotación de cuerpo a inercial
${}^b\mathbf{f}$	Fuerzas/torques en el marco cuerpo
$\boldsymbol{\tau}$	Torques en motores del UAV y manipulador
$\mathbf{A}_\tau$	Matriz de mapeo: torques $\rightarrow$ fuerzas generalizadas
$\mathbf{B}_\tau$	Matriz del actuador (dinámica motor)
$\mathbf{P}$	Matriz electromecánica (back-EMF/fricción)
$\mathbf{F}, \mathbf{H}$	Matrices de ganancias proporcional y derivativa del controlador interno
$\mathbf{S}(\mathbf{q}), \dot{\mathbf{S}}(\mathbf{q})$	Mapeo cinemático UAV–manipulador en espacio de velocidades
$\bar{\mathbf{M}}, \bar{\mathbf{C}}, \bar{\mathbf{g}}$	Matrices del modelo dinámico simplificado en espacio de velocidades
$\boldsymbol{\zeta}$	Vector de parámetros identificados (modelo simplificado)
$\mathbf{Y}(\mathbf{q}, \dot{\boldsymbol{\nu}}, \boldsymbol{\nu})$	Matriz regresora del modelo dinámico simplificado
$\mathbf{A}$	Matriz dinámica linealizada del manipulador aéreo obtenida con DMDc (7×7)
$\mathbf{B}$	Matriz de entradas asociada a las velocidades de referencia (7×7)
$\mathbf{x}$	Vector de estado extendido para MPC
$\boldsymbol{\mu}$	Entrada del controlador (señales aplicables al UAV)
$\boldsymbol{\nu}_d$	Velocidades de referencia proporcionadas al MPC
$\mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{W}$	Matrices de peso en la función de costo del MPC
α, β	Penalizaciones relativas para trayectoria y configuración interna

La precisión del simulador se basa en el modelo matemático utilizado para representar la dinámica del manipulador aéreo robótico. Este trabajo formula el modelo matemático utilizando el modelo de cinemática diferencial y dinámica del manipulador aéreo robótico, implementado en un vehículo aéreo comercial (Matrice-100) equipado con un brazo robótico de 3 grados de libertad (3DOF). Además, se desarrolló un modelo dinámico en el espacio de velocidades de referencia. Esta elección se debe al hecho de que la mayoría de los vehículos aéreos comerciales se controlan mediante señales de referencia de alto nivel, como los ángulos o las velocidades deseadas.

Los sistemas de coordenadas utilizados en este trabajo son el sistema inercial $\mathcal{I} : \{x_i, y_i, z_i\}$ con el eje vertical z_I apuntando hacia arriba, en dirección opuesta a la gravedad; el sistema de coordenadas del cuerpo $\mathcal{B} : \{x_b, y_b, z_b\}$ está unido al centro de masa del UAV (CoM); el sistema de coordenadas en el origen y el efector final del brazo robótico se expresan como $\mathcal{C} : \{x_c, y_c, z_c\}$ y $\mathcal{E} : \{x_e, y_e, z_e\}$, respectivamente, y se introducen para describir el movimiento del manipulador aéreo robótico (para más detalles, consulte la Fig. 7.1).

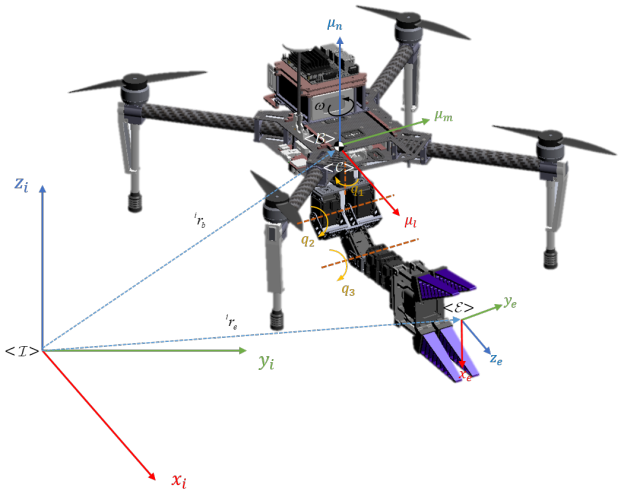


Figura 7.1: Sistema del manipuladores aéreos no tripulado

7.2.1. Modelado cinemático diferencial

Como consecuencia del controlador de vuelo de bajo nivel (PID de actitud) de los vehículos aéreos comerciales, este trabajo asume movimientos restringidos de la plataforma aérea, teniendo en cuenta que los ángulos de cabeceo (θ) y balanceo (ϕ) toman valores cercanos a cero $\phi \approx 0$ y $\theta \approx 0$. El vector de coordenadas generalizadas del UAV se define como $\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix}\eta_x & \eta_y & \eta_z & \eta_\psi\end{bmatrix}^\intercal \in \mathcal{R}^4$ con respecto a $< \mathcal{I} >$; el vector de coordenadas articulares del manipulador robótico es $\mathbf{q}_a = \begin{bmatrix}q_1 & q_2 & q_3\end{bmatrix}^\intercal \in \mathcal{R}^3$ y finalmente $\boldsymbol{h} = \begin{bmatrix}h_x & h_y & h_z & h_\psi\end{bmatrix}^\intercal \in \mathcal{R}^4$ es una representación de la pose del efector final en el sistema de coordenadas inercial $< \mathcal{I} >$.

Por lo tanto, la posición y orientación del efector final unido al manipulador aéreo robótico (ver Fig. 7.1) se pueden definir en detalle de la siguiente manera:

$$\begin{cases} h_x = \eta_x + c(\eta_\psi + q_1)l_3c(q_2+q_3) + c(\eta_\psi + q_1)l_2c(q_2) \\ h_y = \eta_y + s(\eta_\psi + q_1)l_3c(q_2+q_3) + s(\eta_\psi + q_1)l_2c(q_2) \\ h_z = \eta_z - l_1 - l_2s(q_2) - l_3s(q_2+q_3) \\ h_\psi = \eta_\psi + q_1 \end{cases} \tag{7.1}$$

donde $s = \sin(\cdot)$, $c = \cos(\cdot)$, $c(ab) = \cos(a+b)$ y $s(ab) = \sin(a+b)$.

La cinemática diferencial que relaciona las velocidades lineales y angulares del efector final con las velocidades de maniobrabilidad de la plataforma aérea y las velocidades de las articulaciones del brazo robótico se puede formular tomando la derivada temporal de la ecuación (7.1), lo

que resulta en (7.2).

$$\begin{cases} \dot{h}_x = \nu_l c(\eta_\psi) - \nu_m s(\eta_\psi) - s(\eta_\psi q_1)(l_3 c(q_2 q_3) + l_2 c(q_2))(\omega + \dot{q}_1) - \\ c(\eta_\psi q_1)(l_3 s(q_2 q_3) + l_2 s(q_2))\dot{q}_2 - l_3 c(\eta_\psi q_1) s(q_2 q_3)\dot{q}_3 \\ \\ \dot{h}_y = \nu_l s(\eta_\psi) + \nu_m c(\eta_\psi) - c(\eta_\psi q_1)(l_3 c(q_2 q_3) + l_2 c(q_2))(\omega + \dot{q}_1) - \\ s(\eta_\psi q_1)(l_3 s(q_2 q_3) + l_2 s(q_2))\dot{q}_2 - l_3 s(\eta_\psi q_1) s(q_2 q_3)\dot{q}_3 \\ \\ \dot{h}_z = \nu_n - (l_3 c(q_2 q_3) + l_2 c(q_2))\dot{q}_2 - l_3 c(q_2 q_3)\dot{q}_3 \\ \\ \dot{h}_\psi = \dot{q}_1 + \omega \end{cases} \tag{7.2}$$

donde $\omega := \dot{\eta}_\psi$; l_1, l_2, l_3 son las dimensiones de los enlaces 1, 2 y 3 del manipulador robótico, respectivamente. La información sobre los parámetros del sistema del manipulador aéreo robótico es la siguiente:

La cinemática diferencial de todo el sistema puede escribirse de manera compacta en forma matricial, definida como sigue:

$$\dot{\mathbf{h}} = \mathbf{J}(\mathbf{q}(t))\boldsymbol{\nu}(t) \tag{7.3}$$

donde $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}^\intercal & \mathbf{q}_a^\intercal \end{bmatrix}^\intercal \in \mathcal{R}^7$ y $\boldsymbol{\nu} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\nu}_u^\intercal & \boldsymbol{\nu}_a^\intercal \end{bmatrix}^\intercal \in \mathcal{R}^7$ son el vector generalizado de los estados internos y las velocidades de maniobrabilidad del manipulador aéreo robótico, donde las velocidades del UAV se presentan en $\boldsymbol{\nu}_u = \begin{bmatrix} \nu_l & \nu_m & \nu_n & \nu_\omega \end{bmatrix}^\intercal \in \mathcal{R}^4$, $\boldsymbol{\nu}_a = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 & \dot{q}_2 & \dot{q}_3 \end{bmatrix}^\intercal \in \mathcal{R}^3$ es el vector de velocidades de coordenadas de las articulaciones asociadas al brazo robótico; y $\dot{\boldsymbol{h}} = \begin{bmatrix} \dot{h}_x & \dot{h}_y & \dot{h}_z & \dot{h}_\psi \end{bmatrix}^\intercal \in \mathcal{R}^4$ es la velocidad de pose del efector final.

Finalmente, la matriz Jacobiana definida como $\mathbf{J}(\boldsymbol{q}) = \partial \boldsymbol{h}(\mathbf{q})/\partial \mathbf{q} \in \mathcal{R}^{4\times 7}$ permite un mapeo lineal entre las velocidades en el efector final y las velocidades generalizadas. La matriz Jacobiana puede ser formulada como sigue:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} c(q_\psi) & -s(q_\psi) & 0 & \mathbf{J}^{(1,4)} & \mathbf{J}^{(1,5)} & \mathbf{J}^{(1,6)} & \mathbf{J}^{(1,7)} \\ s(q_\psi) & c(q_\psi) & 0 & \mathbf{J}^{(2,4)} & \mathbf{J}^{(2,5)} & \mathbf{J}^{(2,6)} & \mathbf{J}^{(2,7)} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \mathbf{J}^{(3,6)} & \mathbf{J}^{(3,7)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{7.4}$$

donde:

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}^{(1,4)} &= -s(q_\psi q_1)(l_3 c(q_2 q_3) + l_2 c(q_2)) \\
\mathbf{J}^{(1,5)} &= \mathbf{J}^{(1,4)} \\
\mathbf{J}^{(1,6)} &= -c(q_\psi q_1)(l_3 s(q_2 q_3) + l_2\ s(q_2)) \\
\mathbf{J}^{(1,7)} &= -l_3 c(q_\psi q_1) s(q_2 q_3) \\
\mathbf{J}^{(2,4)} &= c(q_\psi q_1)(l_3 c(q_2 q_3) + l_2 c(q_2)) \\
\mathbf{J}^{(2,5)} &= \mathbf{J}^{(2,4)} \\
\mathbf{J}^{(2,6)} &= -s(q_\psi q_1)(l_3 s(q_2 q_3) + l_2 s(q_2)) \\
\mathbf{J}^{(2,7)} &= -l_3 s(q_\psi q_1) s(q_2 q_3) \\
\mathbf{J}^{(3,6)} &= -l_3 c(q_2 q_3) - l_2 c(q_2) \\
\mathbf{J}^{(3,7)} &= -l_3 c(q_2 q_3)
\end{aligned}$$

7.2.2. Modelo dinámico generalizado

Esta sección presenta el modelo dinámico del manipulador aéreo robótico, que garantiza el comportamiento adecuado de la plataforma de acceso abierto propuesta. El modelo dinámico de todo el sistema fue desarrollado considerando la formulación de Euler-Lagrange. El *Lagrangiano* del sistema puede formularse como $\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{U}$, definido por la energía cinética y potencial presentes en el manipulador aéreo robótico; así, la energía cinética total se puede formular de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\mathcal{T} =& \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^\intercal \sum_{n=1}^{4} \left[m_n \mathbf{J}_n^k(\mathbf{q})^\intercal \mathbf{J}_n^k(\mathbf{q}) \right] \dot{\mathbf{q}} \\
&+ \dot{\mathbf{q}}^\intercal \sum_{n=1}^{4} \left[\mathbf{J}_n^\omega(\mathbf{q})^\intercal \mathbf{R}_n(\mathbf{q})\, \mathbf{I}_n\, \boldsymbol{R}_n(\mathbf{q})^\intercal \mathbf{J}_n^\omega(\mathbf{q}) \right] \dot{\mathbf{q}}
\end{aligned} \tag{7.5}$$

donde las matrices $\mathbf{J}_n^k(\mathbf{q})$ y $\mathbf{J}_n^\omega(\mathbf{q})$ expresan la energía considerando las velocidades traslacionales y rotacionales; m_n y $\mathbf{I}_n$ representan la masa y la matriz de inercia de todo el sistema, considerando tanto la plataforma aérea como cada enlace de manera individual; finalmente, $\mathbf{R}_n(\mathbf{q})$ es una matriz de rotación. La energía cinética puede formularse de manera compacta como función de la coordenada generalizada $\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\eta}}^\intercal & \dot{\mathbf{q}}_a^\intercal \end{bmatrix}^\intercal \in \mathcal{R}^7$ definida como:

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^\intercal \mathbf{M}(\mathbf{q})\, \dot{\mathbf{q}} \tag{7.6}$$

donde $\mathbf{M}(\mathbf{q}) \in \mathcal{R}^{7\times7}$ es la matriz de masa e inercia que cumple con las siguientes propiedades: *(1) estrictamente simétrica* y *(2) definida positiva*.

Por otro lado, la energía potencial puede resumirse considerando la contribución de la plataforma aérea y la configuración interna de cada enlace del brazo robótico; la formulación se puede escribir como:

$$\mathcal{U} = \sum_{n=1}^{4} (m_n \mathbf{g}^\intercal \, {}^i\mathbf{r}_n) \tag{7.7}$$

donde $\mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & g \end{bmatrix}^\intercal$ es el vector de aceleración asociado a la gravedad g y ${}^i\mathbf{r}_n$ representa la ubicación del efector final considerando la plataforma aérea y la posición de los enlaces del brazo robótico.

Por lo tanto, el *Lagrangiano* asociado con el manipulador aéreo robótico puede formularse como:

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^\intercal \mathbf{M}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} - \sum_{n=1}^{4} (m_n \mathbf{g}^\intercal \, {}^i\mathbf{r}_n) \tag{7.8}$$

donde se utilizó la restricción de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} = \boldsymbol{\tau}$$

, para obtener el modelo dinámico. Esta sección desarrolla el modelo dinámico no lineal del manipulador aéreo robótico como sigue:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = {}^i\boldsymbol{f}(t) \tag{7.9}$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) - \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^\intercal \frac{\partial \mathbf{M}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}; \quad \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{q}}$$

donde ${}^i\boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} {}^if_x & {}^if_y & {}^if_z & \tau_\psi & \tau_{q_1} & \tau_{q_2} & \tau_{q_3} \end{bmatrix}^\intercal \in \mathcal{R}^7$ representa las fuerzas y torques generalizados aplicados al manipulador aéreo robótico asociados a $< \mathcal{I} >$; $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathcal{R}^{7\times7}$ es la matriz de Coriolis que incluye las fuerzas centrífugas y centrípetas presentes en todo el sistema, $\mathbf{g}(\mathbf{q}) \in \mathcal{R}^7$ es el vector de fuerza gravitacional generalizada. Finalmente, $\ddot{\mathbf{q}}$ y $\dot{\mathbf{q}}$ son el vector de aceleración y el de velocidad de las coordenadas generalizadas.

7.2.3. Modelo dinámico simplificado

En esta sección se presenta el modelo dinámico simplificado, considerando que las plataformas aéreas comerciales incluyen un controlador de vuelo de bajo nivel (PID de actitud) para mantener el sistema cerca del punto de equilibrio, con variaciones mínimas en los ángulos de cabeceo (θ) y balanceo (ϕ). Además, el manipulador robótico incorpora motores de corriente continua con controladores PID de bajo nivel, asegurando un seguimiento preciso de referencias angulares en cada junta.

Como resultado de los controladores de actitud, tanto la plataforma aérea como el brazo robótico pueden ser controlados utilizando velocidades de referencia lineales y angulares $\boldsymbol{v_d}$. Considerando esto, el modelo dinámico del manipulador aéreo debe incorporar estas velocidades de referencia como entradas al sistema.

La aceleración de las coordenadas generalizadas se puede formular como $\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{S}(\mathbf{q})\dot{\boldsymbol{\nu}} + \dot{\mathbf{S}}(\mathbf{q})\boldsymbol{\nu}$, donde $\dot{\boldsymbol{\nu}} = \begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{\nu}}_u^\intercal & \dot{\boldsymbol{\nu}}_a^\intercal\end{bmatrix}^\intercal$. El modelo dinámico, formulado anteriormente, se puede expresar de la siguiente manera:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\mathbf{S}(\mathbf{q})\dot{\boldsymbol{\nu}} + \mathbf{M}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{S}}(\mathbf{q})\boldsymbol{\nu} + \mathbf{C}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\mathbf{S}(\mathbf{q})\boldsymbol{\nu} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = {}^{i}\boldsymbol{f}(t) \quad (7.10)$$

Por otro lado, la fuerza y el torque generalizados del modelo dinámico, denotados como ${}^{i}\boldsymbol{f}(t)$, deben formularse en función de las velocidades de referencia $\boldsymbol{v_d}$. En consecuencia, estos vectores de fuerza y torque se expresan en el sistema de referencia de la estructura $< \mathcal{B} >$ adjunto al UAV, representado como ${}^{b}\boldsymbol{f}(t)$, y el resultado es el siguiente:

$$ {}^{i}\boldsymbol{f}(t) = {}^{i}\mathbf{R}_b(\mathbf{q})\, {}^{b}\boldsymbol{f}(t) \quad (7.11)$$

donde ${}^{i}\mathbf{R}_e(\mathbf{q})$ es una matriz que incluye la rotación desde el marco $< \mathcal{I} >$ a $< \mathcal{B} >$ y una matriz identidad relacionada con el vector de torque de cada motor en el brazo robótico.

El vector de fuerza y torque ${}^{b}\boldsymbol{f}$ es el resultado del torque en cada motor de la plataforma aérea y el brazo robótico, expresado como $\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix}\tau_{w1} & \tau_{w2} & \tau_{w3} & \tau_{w4} & \tau_{q_1} & \tau_{q_2} & \tau_{q_3}\end{bmatrix}^\intercal$, lo cual resulta en la siguiente formulación:

$$ {}^{b}\boldsymbol{f}(t) = \mathbf{A}_\tau \boldsymbol{\tau}(t) \quad (7.12)$$

donde $\mathbf{A}_\tau$ es una matriz que permite la transformación del torque interno de cada motor en el sistema completo $\boldsymbol{\tau}(t)$ a las fuerzas generalizadas ${}^{b}\boldsymbol{f}(t)$.

Considerando que los motores de la plataforma aérea y del manipulador robótico comparten las mismas características, el modelo del actuador de motor puede escribirse en forma matricial como sigue:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{B}_{\tau}\boldsymbol{\nu}_{\omega} - \mathbf{P}\boldsymbol{\omega} \tag{7.13}$$

donde $\boldsymbol{\nu}_{\omega} = \begin{bmatrix} V_{w_1} & V_{w_2} & V_{w_3} & V_{w_4} & V_{q_1} & V_{q_2} & V_{q_3} \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$ es el vector que incluye el voltaje presente en cada motor de la plataforma aérea y el brazo robótico; además, las velocidades angulares de cada motor se expresan como $\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_{u_1} & \omega_{u_2} & \omega_{u_3} & \omega_{u_4} & \omega_{q_1} & \omega_{q_2} & \omega_{q_3} \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$. Las características mecánicas de los motores de corriente continua en la plataforma aérea y el brazo robótico pueden resumirse mediante las matrices $\mathbf{B}_{\tau}$ y $\mathbf{P}$.

Las velocidades angulares de cada motor $\boldsymbol{\omega}$ deben formularse como una función de las velocidades generalizadas de todo el sistema $\boldsymbol{\nu}$. Este trabajo asume un mapeo lineal que se puede escribir en forma compacta como:

$$\boldsymbol{\nu} = \mathbf{E}\boldsymbol{\omega} \tag{7.14}$$

donde $\mathbf{E}$ incluye los valores que garantizan el mapeo definido anteriormente. Además, este trabajo toma en cuenta un mapeo lineal del voltaje requerido para cada motor en función del voltaje general producido para las velocidades de referencia. Este mapeo lineal se expresa de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{\nu}_s = \mathbf{D}\boldsymbol{\nu}_{\omega} \tag{7.15}$$

donde $\boldsymbol{\nu}_s = \begin{bmatrix} V_{\nu_l} & V_{\nu_m} & V_{\nu_n} & V_{\omega} & V_{q_1} & V_{q_2} & V_{q_3} \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$ representa el vector de voltajes correspondientes a las velocidades generalizadas del sistema, y $\mathbf{D}$ es una matriz constante que facilita el mapeo descrito anteriormente.

Finalmente, el controlador de bajo nivel, que garantiza el seguimiento de las velocidades de referencia del manipulador aéreo robótico, se puede formular en una forma compacta como:

$$\boldsymbol{\nu}_s = \mathbf{F}\,\boldsymbol{\nu}_{\mathbf{d}} - \mathbf{F}\boldsymbol{\nu} - \mathbf{H}\dot{\boldsymbol{\nu}} \tag{7.16}$$

donde $\boldsymbol{\nu}_{\mathbf{d}} = \begin{bmatrix} \nu_{ld} & \nu_{md} & \nu_{nd} & \nu_{\omega d} & \dot{q}_{1d} & \dot{q}_{2d} & \dot{q}_{3d} \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$ es el vector de velocidades deseadas, $\dot{\boldsymbol{\nu}} = \begin{bmatrix} \dot{\nu}_l & \dot{\nu}_m & \dot{\nu}_n & \dot{\omega} & \ddot{q}_1 & \ddot{q}_2 & \ddot{q}_3 \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$ es la aceleración de las velocidades generalizadas del sistema completo, y finalmente $\mathbf{F}$ y $\mathbf{H}$ son matrices de ganancia asociadas al error proporcional y derivativo.

Bajo las formulaciones presentadas anteriormente, es posible formular las fuerzas generalizadas del modelo dinámico de la siguiente manera:

$$ {}^{i}\boldsymbol{f}(t) = {}^{i}\,\mathbf{R}_e\mathbf{A}_\tau(\mathbf{B}_\tau\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{F}\,\boldsymbol{\nu}_\mathbf{d} - \mathbf{F}\boldsymbol{v} - \mathbf{H}\dot{\boldsymbol{\nu}}) - \mathbf{P}\mathbf{E}^{-1}\boldsymbol{\nu}) \tag{7.17} $$

Finalmente, al combinar (7.17) y (7.10) es posible formular el modelo dinámico de todo el sistema en el espacio de velocidades de referencia, el cual incluye el controlador de bajo nivel presentado en plataformas comerciales. Teniendo esto en cuenta, la formulación se puede escribir como:

$$ \bar{\mathbf{M}}(\mathbf{q})\dot{\boldsymbol{\nu}}(t) + \bar{\mathbf{C}}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\boldsymbol{\nu}(t) + \bar{\mathbf{g}}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\nu}_\mathbf{d}(t) \tag{7.18} $$

donde $\bar{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) = ({}^{i}\mathbf{R}_b\mathbf{A}_\tau\mathbf{B}_\tau(\mathbf{D})^{-1}\mathbf{F})^{-1}(\mathbf{M}(\mathbf{q})\mathbf{S} + {}^{i}\mathbf{R}_b\mathbf{A}_\tau\mathbf{H}) \in \mathcal{R}^{7\times7}$ es la nueva matriz de masa e inercia; $\bar{\mathbf{C}}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) = ({}^{i}\mathbf{R}_b\mathbf{A}_\tau\mathbf{B}_\tau(\mathbf{D})^{-1}\mathbf{F})^{-1}(\mathbf{M}\dot{\mathbf{S}} + \mathbf{C}\mathbf{S} - {}^{i}\mathbf{R}_b\mathbf{A}_\tau\mathbf{P}\mathbf{E}^{-1}) \in \mathcal{R}^{7\times7}$ es la nueva matriz de Coriolis y $\bar{\mathbf{g}}(\mathbf{q}) = {}^{i}\,\mathbf{R}_b\mathbf{A}_\tau\mathbf{B}_\tau(\mathbf{D})^{-1}\mathbf{g}(\mathbf{q})$ es el vector gravitacional del sistema completo. Las matrices mencionadas anteriormente incluyen los parámetros mecánicos, eléctricos y PD del manipulador aéreo robótico.

La aceleración de las coordenadas generalizadas utiliza la matriz $\mathbf{S}(\mathbf{q})$ y su derivada $\dot{\mathbf{S}}(\mathbf{q})$, definidas como:

$$ \mathbf{S}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} c(q_\psi) & -s(q_\psi) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s(q_\psi) & c(q_\psi) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{7.19} $$

$$ \dot{\mathbf{S}}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} -\omega s(q_\psi) & -\omega c(q_\psi) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \omega c(q_\psi) & -\omega c(q_\psi) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{7.20} $$

La matriz $\mathbf{A}_\tau$ permite el mapeo entre el vector de fuerzas y torques y el vector $\boldsymbol{\tau}$; la matriz se puede expresar de la siguiente manera:

$$\mathbf{A}_\tau = \begin{bmatrix} -K_1 & -K_1 & -K_1 & -K_1 & 0 & 0 & 0 \\ -K_1 & K_1 & K_1 & -K_1 & 0 & 0 & 0 \\ K_1 & K_1 & K_1 & K_1 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_1 & b_1 & b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{7.21}$$

El modelo de actuador de todo el sistema puede expresarse de forma compacta utilizando las matrices $\mathbf{B}_\tau$ y $\mathbf{P}$, que se definen de la siguiente manera:

$$\mathbf{B}_\tau = \begin{bmatrix} \frac{K_{ap}}{R_{ap}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{K_{ap}}{R_{ap}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{K_{ap}}{R_{ap}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{K_{ap}}{R_{ap}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{K_a}{R_a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{K_a}{R_a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{K_a}{R_a} \end{bmatrix} \tag{7.22}$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{K_{ap}K_{bp}}{R_{ap}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{K_{ap}K_{bp}}{R_{ap}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{K_{ap}K_{bp}}{R_{ap}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{K_{ap}K_{bp}}{R_{ap}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{K_aK_b}{R_a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{K_aK_b}{R_a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{K_aK_b}{R_a} \end{bmatrix} \tag{7.23}$$

La velocidad generalizada de todo el sistema $\boldsymbol{v}$ puede formularse como una función de las velocidades angulares de cada motor $\boldsymbol{\omega}$ utilizando la matriz $\mathbf{E}$, definida de la siguiente manera:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_1 & a_1 & a_1 & 0 & 0 & 0 \\ -a_2 & a_2 & a_2 & -a_2 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_3 & a_3 & a_3 & 0 & 0 & 0 \\ a_4 & -a_4 & a_4 & -a_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{7.24}$$

La asignación lineal entre el voltaje requerido en cada motor y el voltaje general producido para las velocidades de referencia puede implementarse utilizando la matriz $\mathbf{D}$, que se puede expresar de la siguiente manera:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \tag{7.25}$$

Las ganancias del controlador de velocidades de referencia pueden expresarse de manera compacta utilizando las matrices $\mathbf{F}$ y $\mathbf{H}$, que se pueden definir como:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} K_{p1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{p2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{p3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{p4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_p \end{bmatrix} \tag{7.26}$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} K_{d1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{d2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{d3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{d4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_d \end{bmatrix} \tag{7.27}$$

Además, para una explicación detallada de cada variable se enuncia a continuacion:

- m_{uav}: masa asociada con la plataforma aérea.
- m_1, m_2, m_3: masas de los enlaces 1, 2 y 3 del manipulador robótico, respectivamente.
- η_ψ: rotación angular de la plataforma aérea.
- K_1: factor de conversión entre el torque y las fuerzas.
- b_1: factor de conversión entre el torque y las fuerzas.
- K_{ap}: factor de conversión de torque en la plataforma aérea.
- K_{bp}: factor electromotriz de la plataforma aérea.
- R_{ap}: resistencia eléctrica de la plataforma aérea.
- K_a: factor de conversión de torque en el brazo robótico.
- K_b: factor electromotriz del brazo robótico.
- R_b: resistencia eléctrica del brazo robótico.
- a_1, a_2, a_3, a_4: factores de conversión de velocidades lineales a angulares.
- $K_{p1}, K_{p2}, K_{p3}, K_{p4}$: ganancias proporcionales asociadas con la plataforma aérea.
- K_p: ganancia proporcional asociada con el brazo robótico.
- $K_{d1}, K_{d2}, K_{d3}, K_{d4}$: ganancias derivativas asociadas con la plataforma aérea.
- K_d: ganancia derivativa asociada con el brazo robótico.
- I_{uav}: valor de inercia de la plataforma aérea.

7.2.4. Identificación y validación del modelo dinámico

Identificación del modelo dinámico simplificado

Aunque el modelo dinámico presentado anteriormente (7.18) podría basarse en valores proporcionados por empresas desarrolladoras de plataformas robóticas, en este trabajo se emplean técnicas de optimización en el procedimiento de identificación del modelo dinámico. Este enfoque asegura el comportamiento adecuado de la plataforma de acceso abierto propuesta.

Una característica esencial del modelo dinámico formulado en (7.18) es su representación lineal en el vector $\boldsymbol{\zeta}$, expresado de la siguiente manera:

$$\mathbf{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{v}}, \mathbf{v})\boldsymbol{\zeta} = \mathbf{v_d}(t), \tag{7.28}$$

donde $\boldsymbol{\zeta} = \begin{bmatrix}\zeta_1 & \zeta_2 & .. & \zeta_{32}\end{bmatrix}^{\intercal} \in \mathbf{R}^{32}$ representa una combinación compacta de los parámetros mecánicos, eléctricos y de control proporcional-derivativo (PD). Finalmente, $\mathbf{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{v}}, \mathbf{v})$ es una matriz de regresión que depende de los estados internos $\mathbf{q}$, las velocidades generales $\mathbf{v}$ y la aceleración del sistema $\dot{\mathbf{v}}$.

Este trabajo estima los valores del vector de parámetros desconocidos $\boldsymbol{\zeta}$ bajo la siguiente formulación:

$$\ell_m(\mathbf{q}_i, \mathbf{v}_i, \dot{\mathbf{v}}_i, \mathbf{v}_{\mathbf{d}i}, \boldsymbol{\zeta}) = (1-\alpha)\|\mathbf{v}_{\mathbf{d}i} - \mathbf{Y}(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{v}}_i, \mathbf{v}_i)\boldsymbol{\zeta}\|_2^2 + \alpha\|\boldsymbol{\zeta}\|_1 \quad (7.29)$$

que representa el error de costo de identificación, donde i es el instante de medición a lo largo del tiempo experimental y $\alpha \in [0, 1)$ es una variable auxiliar que garantiza el mínimo número de parámetros $\boldsymbol{\zeta}$ durante el proceso de identificación.

La función de costo a optimizar se puede escribir como:

$$V_m(\mathbf{q}_i, \mathbf{v}_i, \dot{\mathbf{v}}_i, \mathbf{v}_{\mathbf{d}i}, \boldsymbol{\zeta}) = \sum_{i=0}^{t_f} \ell_m(\mathbf{q}_i, \mathbf{v}_i, \dot{\mathbf{v}}_i, \mathbf{v}_{\mathbf{d}i}, \boldsymbol{\zeta}), \quad (7.30)$$

donde t_f es el número total de muestras experimentales usadas durante el procedimiento de identificación. A partir de la ecuación (7.30), este trabajo formula el problema de optimización como:

$$\min_{\boldsymbol{\zeta}} \quad V_m(\mathbf{q}_i, \mathbf{v}_i, \dot{\mathbf{v}}_i, \mathbf{v}_{\mathbf{d}i}, \boldsymbol{\zeta}) \quad (7.31)$$

La formulación presentada puede ser resuelta usando una amplia gama de algoritmos de optimización. En este trabajo, se emplea el método conocido de programación cuadrática secuencial (SQP), comúnmente utilizado en la mayoría de los solucionadores de optimización.

Los parámetros que minimizan el procedimiento de identificación para el manipulador robótico aéreo se encuentran en la Tabla 7.2.

Tabla 7.2: Parámetros de Identificación del Manipulador Aéreo $\boldsymbol{\zeta}$

$\zeta_1 = 0{,}76$	$\zeta_2 = 0{,}10$	$\zeta_3 = 0{,}15$	$\zeta_4 = 38{,}60$
$\zeta_5 = -0{,}25$	$\zeta_6 = 0{,}25$	$\zeta_7 = 0{,}008$	$\zeta_8 = 0{,}003$
$\zeta_9 = -0{,}06$	$\zeta_{10} = 0{,}60$	$\zeta_{11} = -0{,}26$	$\zeta_{12} = 28{,}6$
$\zeta_{13} = 0{,}09$	$\zeta_{14} = -0{,}016$	$\zeta_{15} = 0{,}2$	$\zeta_{16} = 0{,}076$
$\zeta_{17} = 0{,}019$	$\zeta_{18} = 0{,}05$	$\zeta_{19} = -0{,}40$	$\zeta_{20} = 0{,}66$
$\zeta_{21} = 0{,}02$	$\zeta_{22} = 3{,}10$	$\zeta_{23} = -0{,}064$	$\zeta_{24} = 0{,}06$
$\zeta_{25} = 2{,}74$	$\zeta_{26} = 0{,}496$	$\zeta_{27} = 0{,}01$	$\zeta_{28} = -0{,}491$
$\zeta_{29} = -0{,}867$	$\zeta_{30} = -15{,}8$	$\zeta_{31} = -13{,}34$	$\zeta_{32} = -0{,}802$

Más detalles y una representación física de estos parámetros se pueden consultar en la Tabla 7.3.

Tabla 7.3: Parámetros Empaquetados de Identificación del Sistema

Variable Simbólica	Parámetros
ζ_1	$(R_{ap}(m_1+m_2+m_3+m_{uav}-K_1K_{d1}))/(4K_1K_{ap}K_{p1})$
ζ_2	$-(K_{d2}R_{ap})/(4K_{ap}K_{p1})$
ζ_3	$(K_{d3}R_{ap})/(4K_{ap}K_{p1})$
ζ_4	$R_{ap}/(4K_1K_{ap}K_{p1})$
ζ_5	l_2m_2
ζ_6	l_2m_3
ζ_7	l_3m_3
ζ_8	K_1K_{d4}
ζ_9	$-(K_{d1}R_{ap})/(4K_{ap}K_{p2})$
ζ_{10}	$(R_{ap}(m_1+m_2+m_3+m_{uav}+K_1K_{d2}))/(4K_1K_{ap}K_{p2})$
ζ_{11}	$(K_{d3}R_{ap})/(4K_{ap}K_{p2})$
ζ_{12}	$R_{ap}/(4K_1K_{ap}K_{p2})$
ζ_{13}	$(K_{d1}R_{ap})/(4K_{ap}K_{p3})$
ζ_{14}	$(K_{d2}R_{ap})/(4K_{ap}K_{p3})$
ζ_{15}	$(R_{ap}(m_1+m_2+m_3+m_{uav}+K_1K_{d3}))/(4K_1K_{ap}K_{p3})$
ζ_{16}	$(K_{d4}R_{ap})/(4K_{ap}K_{p3})$
ζ_{17}	$-R_{ap}/(4K_1K_{ap}K_{p3})$
ζ_{18}	$R_{ap}/(4K_{ap}K_{p4}b_1)$
ζ_{19}	$K_{d1}b_1$
ζ_{20}	$K_{d2}b_1$
ζ_{21}	$(K_{d3}R_{ap})/(4K_{ap}K_{p4})$
ζ_{22}	$2I_{uav}-2K_{d4}b_1$
ζ_{23}	$l_2\zeta_5+l_2\zeta_6+l_3\zeta_7$
ζ_{24}	$R_a/(K_aK_p)$
ζ_{25}	K_d
ζ_{26}	$-(K_{bp}-4K_{p1}a_1)/(4K_{p1}a_1)$
ζ_{27}	$-(m_1+m_2+m_3+m_{uav})$
ζ_{28}	$-(K_{bp}-4K_{p2}a_1)/(4K_{p2}a_1)$
ζ_{29}	$-(K_{bp}-4K_{p3}a_3)/(4K_{p3}a_3)$
ζ_{30}	$(K_{ap}b_1(K_{bp}-4K_{p4}a_4))/(R_{ap}a_4)$
ζ_{31}	$(K_a(K_b-K_p))/R_a$
ζ_{32}	$-(K_b-K_p)/K_p$

Validación del modelo dinámico simplificado

Esta sección presenta los resultados de validación del modelo identificado formulado anteriormente, donde la formulación matemática asegura suficiente precisión para el simulador de plataforma abierta de manipuladores robóticos aéreos.

Además, los resultados del procedimiento de validación se muestran en la Fig. 7.2, donde $\mathbf{v_d} = \begin{bmatrix}\mu_{ld} & \mu_{md} & \mu_{nd} & \omega_d & \dot{q}_{1d} & \dot{q}_{2d} & \dot{q}_{3d}\end{bmatrix}^\intercal$ re-

presenta las velocidades deseadas para la plataforma aérea y el brazo robótico; las mediciones instantáneas se representan en el vector $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mu_l & \mu_m & \mu_n & \omega & \dot{q}_1 & \dot{q}_2 & \dot{q}_3 \end{bmatrix}^\mathsf{T}$ y finalmente, el modelo dinámico formulado y su evolución durante la validación se muestran en el vector $\mathbf{v}_m = \begin{bmatrix} \mu_{lm} & \mu_{mm} & \mu_{nm} & \omega_m & \dot{q}_{1m} & \dot{q}_{2m} & \dot{q}_{3m} \end{bmatrix}^\mathsf{T}$.

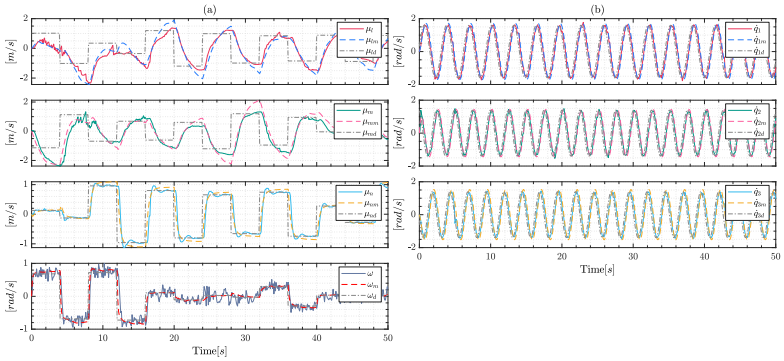


Figura 7.2: Procedimiento de validación del manipulador robótico aéreo: (a) muestra las señales de validación de la plataforma aérea y (b) las señales de validación asociadas al brazo robótico.

Los resultados del proceso de validación demuestran la precisión del modelo dinámico propuesto y la capacidad para simular el comportamiento del manipulador robótico aéreo en el mundo real. Además, el error de costo de identificación durante el procedimiento de validación reflejó un valor de $V_m(\mathbf{q}_i, \mathbf{v}_i, \dot{\mathbf{v}}_i, \mathbf{v}_{\mathbf{d}i}, \boldsymbol{\zeta}) = 10{,}8023$, lo cual evidencia la efectividad de la propuesta, que será utilizada en la plataforma de simulación.

7.2.5. DMDc para el manipulador robótico aéreo

Una de las complicaciones del modelo planteado anteriormente para la implementación de MPC son las altas linealidad, es por eso que se emplea una aproximación lineal para garantizar la implementación en tiempo real, esto se realiza mediante DMD en donde el modelo dinámico para el sistema de manipulador aéreo se representa en términos de la aceleración y un vector de entradas de control $\mathbf{u}(t)$. Esta formulación permite una implementación eficiente por DMDc para estudiar la evolución temporal

del sistema en escenarios de control predictivo y en entornos de simulación y experimentación.

La metodología de modelado DMDc permite obtener una aproximación lineal de la dinámica no lineal del manipulador aéreo, similar a lo presentado en la sección 3.8.1. La forma general de esta aproximación se define como:

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \mathbf{A}\boldsymbol{\nu} + \mathbf{B}_\tau \boldsymbol{\nu}_d \tag{7.32}$$

Para formular el sistema en términos de DMDc, se emplea el vector de velocidades generalizadas del sistema, $\boldsymbol{\nu}$, que captura el comportamiento dinámico del manipulador aéreo. Este comportamiento se expresa mediante la matriz de estado $\mathbf{A}$ y la matriz de control $\mathbf{B}_\tau$, asociadas a las velocidades de referencia $\boldsymbol{\nu}_d$, definidas de la siguiente forma:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -0{,}4662 & 0{,}0287 & -0{,}0096 & 0{,}0520 & -0{,}2731 & 0{,}3828 & -0{,}0839 \\ -0{,}0991 & -0{,}1861 & 0{,}5414 & -0{,}0649 & -0{,}2958 & 0{,}0016 & -0{,}0078 \\ 0{,}0052 & 0{,}0086 & -3{,}4996 & 0{,}0084 & -0{,}0062 & 0{,}0137 & 0{,}0093 \\ -0{,}0551 & 0{,}1256 & -0{,}7545 & -8{,}8799 & -0{,}0504 & -0{,}4081 & 0{,}2048 \\ 0{,}0887 & -0{,}0670 & -0{,}0913 & -0{,}0346 & -6{,}2092 & -0{,}2675 & 0{,}1461 \\ 0{,}2260 & -0{,}3115 & 1{,}1240 & 0{,}1200 & -0{,}0909 & -9{,}4262 & 0{,}9687 \\ -0{,}0797 & -0{,}1204 & 0{,}1032 & -0{,}0652 & -0{,}3551 & 0{,}4772 & -11{,}0373 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_\tau = \begin{bmatrix} 0{,}5969 & 0{,}0879 & -0{,}0662 & -0{,}0423 & 0{,}2227 & -0{,}3088 & 0{,}0355 \\ 0{,}0976 & 0{,}4041 & -0{,}5105 & 0{,}0698 & 0{,}2486 & -0{,}0069 & 0{,}0258 \\ -0{,}0136 & -0{,}0107 & 3{,}5092 & -0{,}0097 & 0{,}0080 & -0{,}0107 & -0{,}0112 \\ 0{,}0675 & -0{,}1475 & 0{,}8577 & 8{,}9287 & 0{,}1352 & 0{,}4226 & -0{,}1536 \\ -0{,}0657 & 0{,}0422 & -0{,}0572 & 0{,}0514 & 6{,}3038 & 0{,}3033 & -0{,}1579 \\ -0{,}1058 & 0{,}0743 & -0{,}8774 & -0{,}1278 & 0{,}2452 & 8{,}9981 & -0{,}9936 \\ -0{,}1820 & 0{,}0812 & -0{,}2088 & 0{,}0730 & 0{,}3007 & -0{,}5067 & 10{,}9660 \end{bmatrix}$$

Se puede observar de forma gráfica estas matrices en la figura 7.3, las cuales permiten describir el modelo dinámico de todo el sistema en términos de un sistema lineal aproximado. La metodología DMDc facilita el análisis de la dinámica compleja del manipulador aéreo y su integración en controladores predictivos, así como en otros algoritmos avanzados de control.

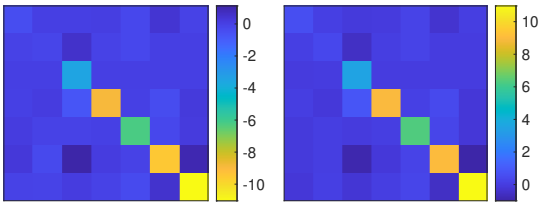


Figura 7.3: Matrices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}_\tau$ para DMDc del manipulador aéreo

7.3. MPC para el seguimiento de trayectorias

Se emplea la cinemática diferencial del efector anteriormente definida como:

$$\dot{\mathbf{h}} = \mathbf{J}(\mathbf{q}(t))\boldsymbol{\nu}(t), \tag{7.33}$$

donde:

- $\dot{\boldsymbol{h}} = \begin{bmatrix} \dot{h}_x & \dot{h}_y & \dot{h}_z & \dot{h}_\psi \end{bmatrix}^\intercal \in \mathcal{R}^4$ es la velocidad del efector final.
- $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}^\intercal & \mathbf{q}_a^\intercal \end{bmatrix}^\intercal = \begin{bmatrix} \eta_x & \eta_y & \eta_z & \eta_\psi & q_1 & q_2 & q_3 \end{bmatrix}^\intercal \in \mathcal{R}^7$ es el vector que define las posición y orientación simplificada del UAV, y las posición articular de brazo robótico de 3 DOF.
- $\boldsymbol{\nu} = \begin{bmatrix} \nu_l & \nu_m & \nu_n & \nu_\omega & \dot{q}_1 & \dot{q}_2 & \dot{q}_3 \end{bmatrix}^\intercal \in \mathcal{R}^7$ el vector que define las velocidades de maniobrabilidad del manipulador aéreo robótico.
- $\mathbf{J}(\boldsymbol{q}) \in \mathcal{R}^{4\times 7}$ es la matriz Jacobiana del sistema.

La cinemática rotacional simplificada del UAV esta dado por:

$$\dot{\mathbf{o}}(t) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -\boldsymbol{\omega}^\intercal(t) \\ \boldsymbol{\omega}(t) & \left[\boldsymbol{\omega}(t)\right]_\times \end{bmatrix} \mathbf{o}(t), \tag{7.34}$$

donde, $\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{\eta}_z \end{bmatrix}^\intercal$, y $\mathbf{o} = \begin{bmatrix} q_w & q_x & q_y & q_z \end{bmatrix}$ es el cuaternión que define la actitud simplificada del UAV.

La cinemática traslacional del UAV en el marco inercial esta dado por:

$$\dot{\boldsymbol{\rho}} = \mathbf{R}_z \boldsymbol{\nu}_{uav}, \tag{7.35}$$

donde, $\boldsymbol{\rho} = \begin{bmatrix}\eta_x & \eta_y & \eta_z\end{bmatrix}^\intercal$ el el vector de la posición del UAV en en marco de referencia inercial y $\boldsymbol{\nu}_{uav} = \begin{bmatrix}\nu_l & \nu_m & \nu_n\end{bmatrix}$ es que vector de define la velocidades lineales del UAV en en marco referencia del cuerpo. $\mathbf{R}_z$ es la matriz de rotación que incluye unicamente los estados de la plataforma aérea.

Por lo tanto, este trabajo combina los modelos matemáticos presentados en las ecuaciones (7.33), (7.34) y (7.35) para generar una representación generalizada de todo el sistema, resultando en:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\nu}_d(t)) \tag{7.36}$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\nu}_d) = \begin{bmatrix} \mathbf{J}(\mathbf{q})\boldsymbol{\nu} \\ \frac{1}{2}\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}(t))\mathbf{o}(t) \\ \mathbf{R}_z\boldsymbol{\nu}_{uav} \\ \dot{\mathbf{q}}_a \\ \mathbf{A}\boldsymbol{\nu} + \mathbf{B}\boldsymbol{\nu}_d \end{bmatrix},$$

donde $\mathbf{x} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{h}^\intercal & \boldsymbol{o}^\intercal & \boldsymbol{\rho}^\intercal & \mathbf{q}_a^\intercal & \dot{\boldsymbol{\nu}}^\intercal\end{bmatrix}^\intercal \in \mathcal{R}^{21}$ es el vector generalizado de todo el sistema y $\boldsymbol{\nu}_d \in \mathcal{R}^7$ es el vector de entrada del sistema que representa las velocidades de referencia para la plataforma aérea y el manipulador robótico.

Formulación del OCP

El MPC proporciona una estrategia eficaz para el seguimiento de trayectorias en el manipulador aéreo, optimizando el control y respetando las restricciones dinámicas del sistema. El objetivo del MPC en esta sección es minimizar un índice basado en el error de control de la trayectoria deseada y la configuración interna deseada del manipulador móvil. Esto es posible gracias a la redundancia del sistema. En este contexto, el problema de

control óptimo es:

$$
\begin{aligned}
\min_{\tilde{\boldsymbol{h}}(.),\boldsymbol{\mu}(.)} \quad & \alpha\tilde{\boldsymbol{h}}^{\intercal}(N)\mathbf{Q}\tilde{\boldsymbol{h}}(N) + \beta\tilde{\mathbf{q}}_a(N)^{\intercal}\mathbf{W}\tilde{\mathbf{q}}_a(N) + \\
& \int_{t=0}^{N} \left(\alpha\tilde{\boldsymbol{h}}^{\intercal}(t)\mathbf{Q}\tilde{\boldsymbol{h}}(t) + \boldsymbol{\mu}^{\intercal}(t)\mathbf{R}\boldsymbol{\mu}(t) + \beta\tilde{\mathbf{q}}_a(t)^{\intercal}\mathbf{W}\tilde{\mathbf{q}}_a(t)\right) dt \\
\text{sujeto a:} \quad & \dot{\boldsymbol{x}} = \mathbf{f}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{\nu}_{\mathbf{d}}(t)) \\
& \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 \\
& \boldsymbol{\nu}_d \in [\boldsymbol{\nu}_{d_{min}}, \boldsymbol{\nu}_{d_{max}}] \\
& \boldsymbol{\nu}_{\mathbf{d}}(t) \in \mathbb{U} \quad \forall\, t \in [0, N-1] \\
& \boldsymbol{x}(t) \in \mathbb{X} \quad \forall\, t \in [0, N]
\end{aligned}
\tag{7.37}
$$

Aquí el vector del error de posición del efector final es $\tilde{\mathbf{h}}(t) = [\mathbf{h_d}(t) - \mathbf{h}(t)]$, donde $\mathbf{h_d}(t) = [x_d\ y_d\ z_d]^{\intercal}$ es un vector de la trayectoria deseada del punto de interés del manipulador móvil, $\mathbf{h}(t)$ es un vector de los estados del manipulador móvil; $\tilde{\mathbf{q}}_{\mathbf{a}}(t) = [\mathbf{q}_{\mathbf{a}_d}(t) - \mathbf{q}_{\mathbf{a}}(t)]$ es un vector de los errores de la configuración interna del manipulador, $\mathbf{q}_{\mathbf{a}_d}(t)$ es un vector de la configuración interna deseada del manipulador y $\mathbf{q}_{\mathbf{a}}(t)$ es un vector de los estados de cada actuador.

La matriz $\mathbf{Q}$ es diagonal definida positiva que ponderará los errores de la ubicación del efector final, $\mathbf{R}$ es una matriz diagonal definida positiva que ponderará los errores de la configuración interna del manipulador.

El vector que representa los límites inferiores de los valores de control del manipulador móvil es $\boldsymbol{\nu}_{d_{min}}$, y un vector que representa los límites superiores del vector de control del manipulador móvil es $\boldsymbol{\nu}_{c_{max}}$.

Finalmente, α y β son escalares que determinan el grado de importancia entre el controlador primario de trayectoria y el controlador secundario de configuración interna.

7.4. Resultados y discusión

Este experimento consiste en el efector final siga trayectoria deseada mientras se intenta mantener una configuración interna deseada y se analiza el comportamiento del controlador con diferentes valores de α y β en la función objetivo propuesta. La trayectoria deseada y las configuraciones

internas deseadas están definidas en la Tabla 7.4. En este caso, se da mayor prioridad a la trayectoria deseada del manipulador, de modo que los errores de posición del manipulador móvil tienden a cero, mientras que existen errores en la configuración interna deseada.

Tabla 7.4: Trayectoria deseada y configuración interna deseada para el Experimento 1

Parámetros	**Valores**	**Parámetros**	**Valores**
x_d	$3{,}5\cos 0{,}05t + 1{,}75$	q_{d1}	0
y_d	$3{,}5\sin 0{,}05t + 1{,}75$	q_{d2}	1.0472
z_d	$0{,}15\sin 0{,}5t + 0{,}6$	q_{d3}	-0.698

Las ganancias en el OCP se definen en la Tabla 7.5, están diseñadas para priorizar el control de error en la trayectoria deseada por encima de la configuración interna deseada

Tabla 7.5: Ganancias propuestas para el Experimento 1

Parámetros	**Valores**
α	1
β	0,01
$\mathbf{Q}$	$diag[1\ 1\ 1]$
$\mathbf{R}$	$diag[0{,}5\ 1\ 1\ 1]$
$\mathbf{v}_{c\ min}$	$[-2{,}5\ -2{,}5\ -1\ -1\ -1]$
$\mathbf{v}_{c\ max}$	$[2{,}5\ 2{,}5\ 1\ 1\ 1]$

La Fig. 7.4 muestra el comportamiento del manipulador aereo, donde se observa claramente la evolución de la posición del efector final siguiendo la trayectoria deseada, de acuerdo con las ganancias propuestas.

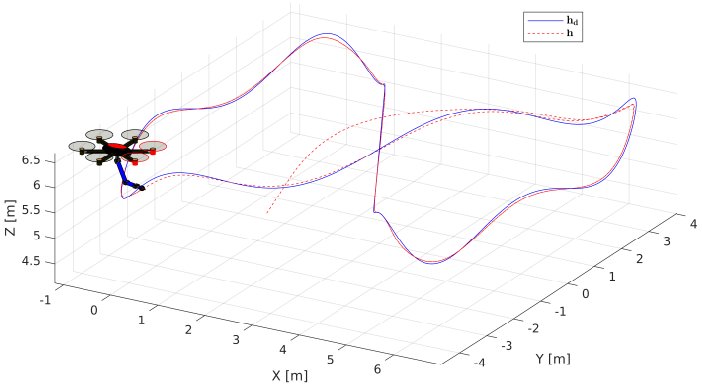


Figura 7.4: Comportamiento espacial del seguimiento de trayectoria del efector final

La Fig. 7.5 muestra la evolución de la posición del efector final en su seguimiento de la trayectoria de referencia deseada. Además, se observa la dinámica de los errores de control, donde se evidencia que estos errores convergen a cero y permanecen acotados, cumpliendo $\|\tilde{\boldsymbol{\rho}}\| < 0{,}21$.

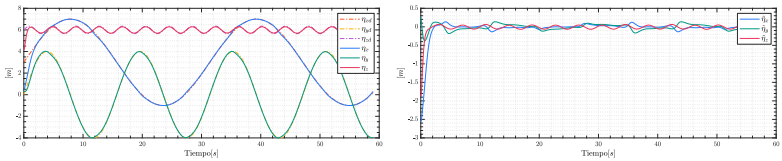


Figura 7.5: Comportamiento y errores de control en el manipulador aéreo

En la Fig. 7.6, se observa que la configuración interna de los eslabones cumple con el objetivo secundario planteado. Además, se evidencia que la restricción impuesta sobre el primer eslabón se mantiene dentro de los límites especificados. Los errores de control asociados a los objetivos secundarios también tienden a cero, mostrando un desempeño acorde a lo esperado.

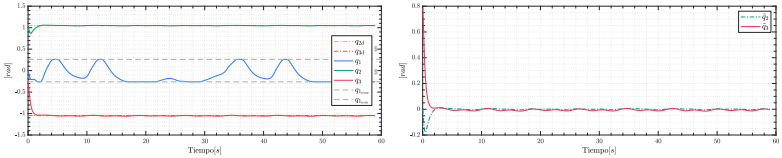


Figura 7.6: Configuración interna de los eslabones del manipulador aéreo

La Fig. 7.7 muestra la evolución del error de orientación en términos de cuaterniones, comparando la orientación actual del manipulador con la de referencia. Para una alineación perfecta, el error debería ser cercano a $[1, 0, 0, 0]$ o $[-1, 0, 0, 0]$, ambos representando un **cuaternión nulo**, que indica orientación sin rotación adicional.

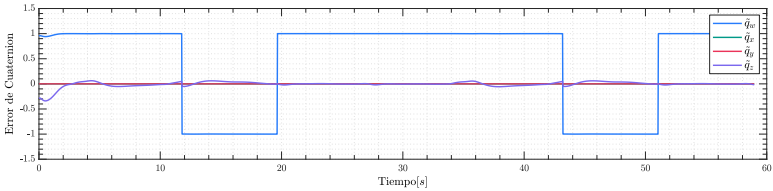


Figura 7.7: Errores de actitud en el manipulador aéreo

Cualquier desviación de estos valores sugiere la necesidad de una corrección angular, mientras que mantenerse cerca de ellos confirma un seguimiento preciso de la orientación de referencia.

Finalmente, la Fig. 7.8 muestra los valores de control óptimos aplicados al robot manipulador móvil durante el experimento, observándose cómo actúan los valores de control de acuerdo con las ganancias propuestas.

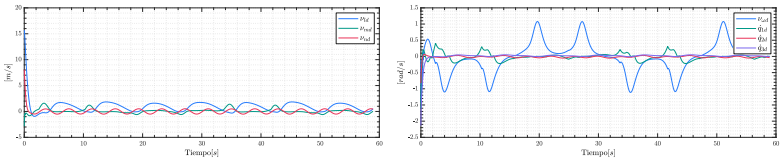


Figura 7.8: Acciones de control del manipulador aéreo

7.5. Conclusión

El análisis del desempeño del MPC en el manipulador aéreo demuestra la efectividad del control en el seguimiento de la trayectoria deseada, logrando minimizar tanto el error de posición como el de actitud. La evolución del error de orientación, expresado en términos de cuaterniones, muestra una cercanía constante a los valores $[1, 0, 0, 0]$ o $[-1, 0, 0, 0]$, lo cual refleja una alineación precisa y estable entre la orientación actual y la de referencia, satisfaciendo así el objetivo principal de seguimiento de orientación con errores mínimos.

Además, los objetivos secundarios, como la configuración interna de los eslabones y las restricciones de movimiento impuestas al primer eslabón, se cumplen satisfactoriamente a lo largo del tiempo. Esto se evidencia en la convergencia del error de los objetivos secundarios hacia cero, lo que garantiza que las restricciones definidas en el modelo se mantengan sin comprometer el rendimiento general del sistema. En resumen, el controlador predictivo basado en modelo permite un seguimiento robusto y preciso de la trayectoria y orientación deseadas, mientras cumple con las restricciones y objetivos secundarios impuestos en la configuración del manipulador aéreo.

8 Conclusiones

Conclusiones

La presente tesis aborda el desarrollo y evaluación de estrategias avanzadas de control predictivo aplicadas a cuadricópteros, enfocándose en la estabilidad, precisión y robustez necesarias para operar en entornos parcialmente estructurados y dinámicos. A través de la combinación de modelos híbridos que integran tanto principios teóricos como datos experimentales y la implementación de esquemas de control robustos y adaptativos, se logra una representación fiel de la dinámica del sistema y un control efectivo de sus movimientos.

El uso de MPC y sus extensiones, como el RA-MPC y MPCC, permite que el sistema se adapte a condiciones ambientales cambiantes y pueda seguir trayectorias complejas de forma precisa. Además, la expansión de estos enfoques a manipuladores aéreos demuestra la versatilidad y aplicabilidad del marco de control predictivo en sistemas multivariables con múltiples grados de libertad.

Los resultados obtenidos validan la efectividad de las técnicas propuestas, logrando una mejora en el rendimiento del sistema en escenarios de alta complejidad. Las conclusiones más importantes de este trabajo se pueden resumir de la siguiente manera:

Capítulo I: Introducción

La introducción establece la relevancia del control predictivo aplicado a cuadricópteros en entornos dinámicos, destacando los desafíos que plantea la necesidad de precisión, estabilidad y robustez frente a perturbaciones externas. Este capítulo justifica el enfoque y la metodología seleccionada, preparando el terreno para los desarrollos técnicos en los capítulos subsiguientes.

Capítulo II: Preliminares Matemáticos

Este capítulo sienta las bases matemáticas necesarias para el modelado y control de cuadricópteros, abordando temas clave como los marcos de coordenadas, ángulos de Euler, matrices de rotación y cuaterniones. La integración de estos conceptos es esencial para una representación precisa de la orientación y posición en el espacio tridimensional, facilitando el desarrollo de modelos de control complejos.

Capítulo III: Modelado Dinámico del Cuadricóptero

Aquí se define un modelo dinámico híbrido del cuadricóptero, utilizando tanto primeros principios como datos experimentales. Este enfoque híbrido permite capturar con precisión el comportamiento del sistema, proporcionando una base sólida para el diseño de estrategias de control avanzadas que se desarrollan en capítulos posteriores.

Capítulo IV: Control Predictivo basado en Modelo

En este capítulo, se explora la formulación del MPC como problema de control óptimo. Se destacan los métodos de optimización y la programación no lineal necesarios para la implementación de MPC en tiempo real. La aplicación de MPC permite al cuadricóptero seguir trayectorias planificadas con precisión, incluso bajo restricciones dinámicas complejas.

Capítulo V: MPC Robusto y Adaptativo

Este capítulo extiende el enfoque de MPC a un esquema robusto y adaptativo, diseñado para mejorar la respuesta del cuadricóptero ante perturbaciones externas y dinámicas no modeladas. Esta adaptación aumenta la robustez y estabilidad del sistema, permitiendo que el cuadricóptero se desempeñe adecuadamente en condiciones ambientales variables y entornos no estructurados.

Capítulo VI: MPC de contorno

El MPC de contorno permite al cuadricóptero seguir trayectorias complejas a altas velocidades minimizando errores de contorno y arrastre. La incorporación de funciones de barrera de control y Lyapunov garantiza la

seguridad y estabilidad del sistema en entornos dinámicos, mejorando su capacidad de adaptación a cambios rápidos en el entorno.

Capítulo VII: MPC de manipulador aéreo

Aquí se aborda la extensión del enfoque de control predictivo a un manipulador aéreo compuesto por un cuadricóptero y un brazo manipulador de tres grados de libertad. La formulación de este problema de control óptimo permite la coordinación de los objetivos primarios y secundarios, logrando precisión y flexibilidad en tareas de manipulación complejas.

Bibliografía

[1] Faiyaz Ahmed et al. *Recent Advances in Unmanned Aerial Vehicles: A Review*. Abr. de 2022.

[2] Kenzo Nonami et al. *Autonomous flying robots: Unmanned aerial vehicles and micro aerial vehicles*. Springer Japan, 2010, págs. 1-329. ISBN: 9784431538554.

[3] Farid Kendoul. "Survey of advances in guidance, navigation, and control of unmanned rotorcraft systems". En: *Journal of Field Robotics* 29.2 (mar. de 2012), págs. 315-378. ISSN: 1556-4967.

[4] B. Mu, K. Zhang e Y. Shi. "Integral Sliding Mode Flight Controller Design for a Quadrotor and the Application in a Heterogeneous Multi-Agent System". En: *IEEE Trans. Ind. Electron.* 64 (2017), págs. 9389-9398.

[5] X. Liang et al. "A novel energy-coupling-based hierarchical control approach for unmanned quadrotor transportation systems". En: *IEEE ASME Trans. Mechatronics* 24 (2019), págs. 248-259.

[6] L.X. Xu et al. "Backstepping Sliding-Mode and Cascade Active Disturbance Rejection Control for a Quadrotor UAV". En: *IEEE ASME Trans. Mechatronics* 25 (2020), págs. 2743-2753.

[7] Q. Lu, B. Ren y S. Parameswaran. "Uncertainty and Disturbance Estimator-Based Global Trajectory Tracking Control for a Quadrotor". En: *IEEE ASME Trans. Mechatronics* 25 (2020), págs. 1519-1530.

[8] M.E. Serrano, D.C. Gandolfo y G.J. Scaglia. "Trajectory tracking controller for unmanned helicopter under environmental disturbances". En: *ISA Trans.* 106 (2020), págs. 171-180.

[9] J. Ou et al. "Quadrotor Autonomous Navigation in Semi-Known Environments Based on Deep Reinforcement Learning". En: *Remote Sens.* 13 (2021), pág. 4330.

[10] Hui Xu et al. "LivestockR-CNN: A real-time object detection model for livestock". En: *Computers and Electronics in Agriculture* 177 (2020), pág. 105682.

[11] Andreas Bircher et al. "Three-dimensional mapping with a monocular endoscope". En: *IEEE Robotics and Automation Letters* 1.2 (2016), págs. 950-956.

[12] Andreas Bircher et al. "Receding horizon RRT with embedded optimization for online motion planning". En: *The International Journal of Robotics Research* 37.12 (2018), págs. 1530-1547.

[13] Giuseppe Loianno y Vijay Kumar. "Special issue on advances in autonomous aerial vehicles". En: *Autonomous Robots* 44.8 (2020), págs. 1243-1244.

[14] Vignesh Rajendran, Ivan Maza y Patrick Neumann. "Air-ground cooperation for package delivery: A review and opportunities". En: *Annual Reviews in Control* 49 (2020), págs. 265-284.

[15] L. Hanover y A. Hanover. "Performance analysis of quadrotors in outdoor environments". En: *Journal of Aerial Robotics* 7.1 (2022), págs. 45-59.

[16] Kartik Mohta et al. "Fast, autonomous flight in GPS-denied and cluttered environments". En: *Journal of Field Robotics* 35.1 (ene. de 2018), págs. 101-120. ISSN: 15564967.

[17] Philipp Foehn et al. "Agilicious: Open-source and open-hardware agile quadrotor for vision-based flight". En: *Science Robotics* 7.67 (jun. de 2022), pág. 2022. ISSN: 2470-9476.

[18] Alessandro Loquercio et al. "Learning high-speed flight in the wild". En: *Science Robotics* 6.53 (2021).

[19] Bartomeu Rubí, Ramon Pérez y Bernardo Morcego. "A Survey of Path Following Control Strategies for UAVs Focused on Quadrotors". En: *Journal of Intelligent and Robotic Systems: Theory and Applications* 98 (2 mayo de 2020), págs. 241-265. ISSN: 15730409.

[20] Luigi Di Puglia Pugliese, Francesca Guerriero y Giusy Macrina. "Using drones for parcels delivery process". En: *Procedia Manufacturing* 42 (2020). International Conference on Industry 4.0 and Smart Manufacturing (ISM 2019), págs. 488-497. ISSN: 2351-9789.

[21] Franco Torrente y Maria Sanchez. "Data-driven approaches for quadrotor control in real-world scenarios". En: *Journal of Intelligent & Robotic Systems* 102 (2021), págs. 547-564.

[22] Luis F. Recalde et al. "System Identification and Nonlinear Model Predictive Control with Collision Avoidance Applied in Hexacopters UAVs". En: *Sensors* 22 (13 jun. de 2022), pág. 4712. ISSN: 1424-8220.

[23] Mario Bicego y Alberto Rossi. "Nonlinear designs for quadrotor trajectory tracking in complex environments". En: *IEEE Transactions on Robotics* 36.4 (2020), págs. 948-962.

[24] Paul Foehn y Luis Schneider. "Time-optimal flight planning for quadrotors in cluttered environments". En: *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*. 2021, págs. 2148-2154.

[25] Mohammad Kamel y Taeyoung Lee. "Model-based system identification for quadrotors". En: *Proceedings of the American Control Conference (ACC)*. 2017, págs. 4366-4372.

[26] Philipp Foehn, Angel Romero y Davide Scaramuzza. "Time-Optimal Planning for Quadrotor Waypoint Flight". En: *Science Robotics* 6.56 (2021).

[27] Shiyuan Chen et al. "A Nonlinear Observer with Adaptive Gain for a Quadrotor UAV". En: *ISA Transactions* 64 (2016), págs. 332-340.

[28] Xiaotian Shen, Kaiyuan Zhang y Xin Zhang. "Singular Linearization Control for Quadrotors". En: *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems* (2022).

[29] Pedro Martins, Carlos Silvestre y António M Pascoal. “Feedback Control of Quadrotor Helicopters: A Review of Algorithms and Challenges”. En: *Annual Reviews in Control* 52 (2021), págs. 344-361.

[30] Rahul Kidambi y Vijay Kumar. “Robust Uncertainty-Aware Planning and Control for Vision-Based Navigation of Quadrotor UAVs in Unknown Environments”. En: *IEEE Transactions on Robotics* 37.4 (2021), págs. 1101-1116.

[31] Aditya Bhargavapuri, Charles Richter y Vijay Kumar. “Robust Maneuver Planning and Control of Quadrotors Under Wind Gusts and Modeling Errors”. En: *IEEE Transactions on Robotics* 35.4 (2019), págs. 926-943.

[32] Xuecheng Li et al. “Robust RISE-Based Control of Quadrotors Subject to Unknown Input Time-Delay”. En: *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 66.6 (2019), págs. 4796-4805.

[33] Erika Pliego-Jiménez et al. “Quaternion-based Vehicle Dynamics and Control of a Quadrotor Aircraft”. En: *Aerospace* 8.11 (2021), pág. 318.

[34] Van-Dung Nguyen y Steven L Waslander. “Modeling and Control of Quadrotor UAVs: A Survey of Recent Developments”. En: *International Journal of Control, Automation and Systems* 18.5 (2020), págs. 1101-1124.

[35] Jorge Francisco Acosta Núñez et al. “Energy-Saver Mobile Manipulator Based on Numerical Methods”. En: *Electronics* 8.10 (2019). ISSN: 2079-9292.

[36] Alejandro Ortiz y Maria Jimenez. “Three-dimensional purposes of quadrotors for inspection tasks”. En: *Journal of Unmanned Vehicle Systems* 9.3 (2021), págs. 275-289.

[37] Joel A.E. Andersson et al. “CasADi: a software framework for nonlinear optimization and optimal control”. En: *Mathematical Programming Computation* 11.1 (mar. de 2019), págs. 1-36. ISSN: 18672957.

[38] Sebastien Gros et al. “From linear to nonlinear MPC: bridging the gap via the real-time iteration”. En: *International Journal of Control* 93.1 (2020), págs. 62-80.

[39] Dong Wang et al. “Efficient Nonlinear Model Predictive Control for Quadrotor Trajectory Tracking: Algorithms and Experiment”. En: *IEEE Transactions on Cybernetics* 51.10 (2021), págs. 5057-5068. ISSN: 2168-2275.

[40] Björn Lindqvist, Sina Sharif Mansouri y George Nikolakopoulos. “Non-linear MPC based Navigation for Micro Aerial Vehicles in Constrained Environments”. En: *2020 European Control Conference (ECC)*. 2020, págs. 837-842.

[41] Cunjia Liu, Hao Lu y Wen-Hua Chen. “An explicit MPC for quadrotor trajectory tracking”. En: *2015 34th Chinese Control Conference (CCC)*. 2015, págs. 4055-4060.

[42] Rabab Benotsmane y József Vásárhelyi. “Towards Optimization of Energy Consumption of Tello Quad-Rotor with Mpc Model Implementation”. En: *Energies* 15.23 (2022). ISSN: 1996-1073.

[43] Bárbara Barros Carlos et al. “An Efficient Real-Time NMPC for Quadrotor Position Control under Communication Time-Delay”. En: *2020 16th International Conference on Control, Automation, Robotics and Vision (ICARCV)*. 2020, págs. 982-989.

[44] Bryan S. Guevara et al. “A Comparative Study between NMPC and Baseline Feedback Controllers for UAV Trajectory Tracking”. En: *Drones 2023, Vol. 7, Page 144* 7.2 (feb. de 2023), pág. 144. ISSN: 2504-446X.

[45] M. E. Kahn y B. Roth. “The Near-Minimum-Time Control Of Open-Loop Articulated Kinematic Chains”. En: *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* 93.3 (sep. de 1971), págs. 164-172. ISSN: 0022-0434.

[46] Steffan Lloyd, Rishad Irani y Mojtaba Ahmadi. “A numeric derivation for fast regressive modeling of manipulator dynamics”. En: *Mechanism and Machine Theory* 156 (2021), pág. 104149. ISSN: 0094-114X.

[47] Hao Zhang et al. “Online dynamic mode decomposition for time-varying systems”. En: *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems* 18 (3 sep. de 2019), págs. 1586-1609. ISSN: 15360040.

[48] E. L. Yip. “A Note on the Stability of Solving a Rank-p Modification of a Linear System by the Sherman–Morrison–Woodbury Formula”. En: *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing* 7.2 (1986), págs. 507-513.

[49] Steven L. Brunton y J. Nathan Kutz. “Data-Driven Science and Engineering: Machine Learning, Dynamical Systems, and Control”. En: *Data-Driven Science and Engineering: Machine Learning, Dynamical Systems, and Control* (ene. de 2019), págs. 1-472.

[50] Kadierdan Kaheman, J. Nathan Kutz y Steven L. Brunton. “SINDy-PI: A robust algorithm for parallel implicit sparse identification of nonlinear dynamics: SINDy-PI”. En: *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 476 (2242 oct. de 2020). ISSN: 14712946.

[51] Peng Zheng et al. “A Unified Framework for Sparse Relaxed Regularized Regression: SR3”. En: *IEEE Access* 7 (2019), págs. 1404-1423. ISSN: 21693536.

[52] Shaohui Yang. “A Trust-Region Method for Multiple Shooting Optimal Control”. Tesis de mtría. KTH, School of Electrical Engineering y Computer Science (EECS), 2022, pág. 50.

[53] Atheer L. Salih et al. “Modelling and PID controller design for a quadrotor unmanned air vehicle”. En: *2010 IEEE International Conference on Automation, Quality and Testing, Robotics (AQTR)*. Vol. 1. 2010, págs. 1-5.

[54] Changhong Fu et al. “Input Uncertainty Sensitivity Enhanced Nonsingleton Fuzzy Logic Controllers for Long-Term Navigation of Quadrotor UAVs”. En: *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics* 23 (2 abr. de 2018), págs. 725-734. ISSN: 10834435.

[55] Shafiqul Islam, Peter X. Liu y Abdulmotaleb El Saddik. “Robust control of four-rotor unmanned aerial vehicle with disturbance uncertainty”. En: *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 62 (3 mar. de 2015), págs. 1563-1571. ISSN: 02780046.

[56] Kewei Xia, Sangheon Lee y Hungsun Son. “Adaptive control for multi-rotor UAVs autonomous ship landing with mission planning”. En: *Aerospace Science and Technology* 96 (ene. de 2020), pág. 105549. ISSN: 12709638.

[57] D. E. Seborg, T. F. Edgar y S. L. Shah. “Adaptive control strategies for process control: A survey”. En: *AIChE Journal* 32.6 (1986), págs. 881-913.

[58] N. Koksal, H. An y B. Fidan. “Backstepping-based adaptive control of a quadrotor UAV with guaranteed tracking performance”. En: *ISA Transactions* 105 (oct. de 2020), págs. 98-110. ISSN: 00190578.

[59] Jean-Jacques E. Slotine y Weiping Li. “On the Adaptive Control of Robot Manipulators”. En: *The International Journal of Robotics Research* 6 (3 sep. de 1987), págs. 49-59. ISSN: 0278-3649.

[60] Sami Haddadin, Alessandro De Luca y Alin Albu-Schäffer. “Robot Collisions: A Survey on Detection, Isolation, and Identification”. En: *IEEE Transactions on Robotics* 33.6 (2017), págs. 1292-1312.

[61] Bryan S. Guevara et al. “A Comparative Study between NMPC and Baseline Feedback Controllers for UAV Trajectory Tracking”. En: *Drones* 7.2 (2023). ISSN: 2504-446X.

[62] Chenxu Ke, Kai-Yuan Cai y Quan Quan. “Uniform Fault-Tolerant Control of a Quadcopter With Rotor Failure”. En: *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics* 28.1 (2023), págs. 507-517.

[63] O. Michel. “Webots: Professional Mobile Robot Simulation”. En: *Journal of Advanced Robotics Systems* 1.1 (2004), págs. 39-42.

[64] Joel A.E. Andersson et al. “CasADi: a software framework for nonlinear optimization and optimal control”. En: *Mathematical Programming Computation* 11 (1 mar. de 2019), págs. 1-36. ISSN: 18672957.

[65] Yogesh Kumar, S. B. Roy y P. B. Sujit. “Barrier Lyapunov Function based Trajectory Tracking Controller for Autonomous Vehicles with Guaranteed Safety Bounds”. En: *2020 International Conference on Unmanned Aircraft Systems, ICUAS 2020* (sep. de 2020), págs. 722-728.

[66] Thomas Gurriet et al. “A Scalable Safety Critical Control Framework for Nonlinear Systems”. En: *IEEE Access* 8 (2020), págs. 187249-187275. ISSN: 21693536.

[67] Nan Gu et al. “Safety-Critical Containment Maneuvering of Underactuated Autonomous Surface Vehicles Based on Neurodynamic Optimization With Control Barrier Functions”. En: *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems* 34 (6 jun. de 2023), págs. 2882-2895. ISSN: 21622388.

[68] Angel Romero et al. “Model Predictive Contouring Control for Time-Optimal Quadrotor Flight”. En: *IEEE Transactions on Robotics* 38 (6 dic. de 2022), págs. 3340-3356. ISSN: 19410468.

[69] Angel Romero, Robert Penicka y Davide Scaramuzza. “Time-Optimal Online Replanning for Agile Quadrotor Flight”. En: *IEEE Robotics and Automation Letters* 7 (3 jul. de 2022), págs. 7730-7737. ISSN: 23773766.

[70] Denise Lam, Chris Manzie y Malcolm Good. “Model predictive contouring control”. En: *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control* (2010), págs. 6137-6142. ISSN: 25762370.

[71] Jianbin Xin et al. “Long Short-Term Memory-Based Multi-Robot Trajectory Planning: Learn from MPCC and Make It Better”. En: *Advanced Intelligent Systems* (2024), pág. 2300703. ISSN: 2640-4567.

[72] Denise Lam, Chris Manzie y Malcolm C. Good. “Model predictive contouring control for biaxial systems”. En: *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 21 (2 2013), págs. 552-559. ISSN: 10636536.

[73] Bruno Brito et al. “Model Predictive Contouring Control for Collision Avoidance in Unstructured Dynamic Environments”. En: *IEEE Robotics and Automation Letters* 4 (4 oct. de 2019), págs. 4459-4466. ISSN: 23773766.

[74] Maria Krinner et al. “MPCC++: Model Predictive Contouring Control for Time-Optimal Flight with Safety Constraints”. En: *Robotics: Science and Systems* (2024).

[75] Dong Wang et al. “MPCC-based Path Following Control for a Quadrotor with Collision Avoidance Guaranteed in Constrained Environments”. En: *IEEE International Symposium on Industrial Electronics* 2019-June (jun. de 2019), págs. 581-586.

[76] Zhixu Du et al. “Model Predictive Formation Tracking-Containment Control for Multi-UAVs With Obstacle Avoidance”. En: *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems* 54 (6 jun. de 2024), págs. 3404-3414. ISSN: 21682232.

[77] Zijia Niu, Xiaohu Jia y Wang Yao. “Communication-Free MPC-Based Neighbors Trajectory Prediction for Distributed Multi-UAV Motion Planning”. En: *IEEE Access* 10 (2022), págs. 13481-13489. ISSN: 21693536.

[78] Huaxing Huang et al. “Vision-based Distributed Multi-UAV Collision Avoidance via Deep Reinforcement Learning for Navigation”. En: *IEEE International Conference on Intelligent Robots and Systems* 2022-October (2022), págs. 13745-13752. ISSN: 21530866.

[79] Zhijun Wang, Tengfei Hu y Lijun Long. “Multi-UAV Safe Collaborative Transportation Based on Adaptive Control Barrier Function”. En: *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems* 53 (11 nov. de 2023), págs. 6975-6983. ISSN: 21682232.

[80] Aaron D. Ames et al. “Rapidly Exponentially Stabilizing Control Lyapunov Functions and Hybrid Zero Dynamics”. En: *IEEE Transactions on Automatic Control* 59.4 (2014), págs. 876-891.

[81] Aaron D. Ames et al. “Control barrier functions: Theory and applications”. En: *2019 18th European Control Conference, ECC 2019* (jun. de 2019), págs. 3420-3431.

[82] Kunal Garg et al. “Advances in the Theory of Control Barrier Functions: Addressing practical challenges in safe control synthesis for autonomous and robotic systems”. En: *Annual Reviews in Control* 57 (ene. de 2024), pág. 100945. ISSN: 1367-5788.

[83] Mrdjan Jankovic. “Robust control barrier functions for constrained stabilization of nonlinear systems”. En: *Automatica* 96 (oct. de 2018), págs. 359-367. ISSN: 0005-1098.

[84] Jason J. Choi et al. “Robust Control Barrier-Value Functions for Safety-Critical Control”. En: *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control* 2021-December (2021), págs. 6814-6821. ISSN: 25762370.

[85] Zewei Zheng et al. “Constrained Moving Path Following Control for UAV With Robust Control Barrier Function”. En: *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica* 10 (7 jul. de 2023), págs. 1557-1570. ISSN: 23299274.

[86] Du Q. Huynh. “Metrics for 3D rotations: Comparison and analysis”. En: *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 35 (2 oct. de 2009), págs. 155-164. ISSN: 09249907.

[87] Jiawei Tang et al. “GMPC: Geometric Model Predictive Control for Wheeled Mobile Robot Trajectory Tracking”. En: *IEEE Robotics and Automation Letters* 9 (5 mayo de 2024), págs. 4822-4829. ISSN: 23773766.

[88] Joan Solà, Jeremie Deray y Dinesh Atchuthan. *A micro Lie theory for state estimation in robotics*. 2021.

[89] Gokhan Alcan, Fares J. Abu-Dakka y Ville Kyrki. *Trajectory Optimization on Matrix Lie Groups with Differential Dynamic Programming and Nonlinear Constraints*. 2023.

[90] Robin Verschueren et al. “acados—a modular open-source framework for fast embedded optimal control”. En: *Mathematical Programming Computation* 14 (1 mar. de 2022), págs. 147-183. ISSN: 18672957.

[91] Joel A.E. Andersson et al. “CasADi: a software framework for nonlinear optimization and optimal control”. En: *Mathematical Programming Computation* 11 (1 mar. de 2019), págs. 1-36. ISSN: 18672957.

[92] Aaron D. Ames y Matthew Powell. “Towards the Unification of Locomotion and Manipulation through Control Lyapunov Functions and Quadratic Programs”. En: *Lecture Notes in Control and Information Sciences* 449 LNCIS (2013), págs. 219-240. ISSN: 1610-7411.

[93] Maria Vittoria Minniti et al. “Adaptive CLF-MPC with Application to Quadrupedal Robots”. En: *IEEE Robotics and Automation Letters* 7 (1 ene. de 2022), págs. 565-572. ISSN: 23773766.

[94] Brian E. Jackson, Kevin Tracy y Zachary Manchester. “Planning with Attitude”. En: *IEEE Robotics and Automation Letters* 6 (3 jul. de 2021), págs. 5658-5664. ISSN: 23773766.

[95] Philipp Foehn et al. “Agilicious: Open-source and open-hardware agile quadrotor for vision-based flight”. En: *Science Robotics* 7 (67 jun. de 2022). ISSN: 24709476.

[96] Hossein Bonyan Khamseh, Farrokh Janabi-Sharifi y Abdelkader Abdessameud. “Aerial manipulation—A literature survey”. En: *Robotics and Autonomous Systems* 107 (sep. de 2018), págs. 221-235. ISSN: 0921-8890.

[97] Fabio Ruggiero, Vincenzo Lippiello y Anibal Ollero. “Aerial manipulation: A literature review”. En: *IEEE Robotics and Automation Letters* 3.3 (jul. de 2018), págs. 1957-1964. ISSN: 23773766.

[98] Karen ; Bodie et al. “An Omnidirectional Aerial Manipulation Platform for Contact-Based Inspection”. En: *Robotics: Science and System XV* 15 (2019). Ed. por Antonio Bicchi, Hadas Kress-Gazit y Seth Hutchinson. ISSN: 2330-765X.

[99] Takahiro Ikeda et al. “Wall contact by octo-rotor UAV with one DoF manipulator for bridge inspection”. En: *2017 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*. 2017, págs. 5122-5127.

[100] Christos Papachristos, Kostas Alexis y Anthony Tzes. “Technical Activities Execution with a TiltRotor UAS employing Explicit Model Predictive Control”. En: *IFAC Proceedings Volumes* 47.3 (ene. de 2014), págs. 11036-11042. ISSN: 1474-6670.

[101] Frederico Augugliaro et al. “The flight assembled architecture installation: Cooperative contruction with flying machines”. En: *IEEE Control Systems* 34.4 (2014), págs. 46-64. ISSN: 1066033X.

[102] Chad C. Kessens et al. “Versatile aerial grasping using self-sealing suction”. En: *2016 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*. 2016, págs. 3249-3254.

Bryan Stefano GUEVARA BERMEO Control predictivo de Cuadricópteros en entornos parcialmente estructurados

ISBN: 978-631-90962-3-1