Universidad Nacional de San Juan
Facultad de Ingeniería
Instituto de Automática

CONTROL COORDINADO DE MANIPULADORES AÉREOS

Tesis Doctoral de
Christian Patricio CARVAJAL CABRERA

Temas de Automática
113

Control Coordinado de Manipuladores Aéreos

Tesis doctoral de

Christian Patricio Carvajal Cabrera

Aprobada por la
Facultad de Ingeniería de la
Universidad Nacional de San Juan

para el otorgamiento del grado académico de

Doctor en Ingeniería de Sistemas de Control

Dirección de tesis:	**Dr. Ing. Ricardo Carelli**	Instituto de Automática Universidad Nacional de San Juan - Argentina
	Dr. Ing. Flavio Roberti	Instituto de Automática Universidad Nacional de San Juan - Argentina
	Dr. Ing. Víctor Andaluz	Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE Quito - Ecuador
Jurado de tesis:	**Dr. Ing. Juan Ignacio Giribet**	Universidad de Buenos Aires Buenos Aires - Argentina
	Dr. Ing. Alexandre Brandão	Universidad Federal de Viçosa Viçosa, Minas Gerais - Brasil

Fecha de la defensa oral: 25 de noviembre de 2025

Control Coordinado de Manipuladores Aéreos

Christian Patricio Carvajal Cabrera

Tesis de Doctorado

Temas de Automática

Primera edición: 2025

Impreso en Argentina

Prohibida la reproducción parcial o total, en forma idéntica o modificada, por cualquier medio. Cualquier utilización debe ser previamente solicitada.

ISBN 978-631-90962-4-8
CDD 600

© 2025 Christian Patricio Carvajal Cabrera.
Hecho el depósito que marca la ley.



Dedicatoria

Este trabajo dedico a mi familia, en especial a mis padres, a mi hermano y a mi sobrina.

A mis queridos padres, por su ejemplo de esfuerzo y sabiduría, sobre todo por su apoyo incondicional y confianza en mis capacidades. A mi hermano, por su compañía, sus palabras de aliento y su solidaridad en cada etapa de este camino. Y a mi sobrina, por ser fuente de inspiración, alegría y esperanza para el futuro.

Todos ellos han sido pilares fundamentales durante esta etapa de mi formación personal y académica. Este logro es reflejo del valor de sus enseñanzas, del amor que me han brindado y del apoyo que nunca me ha faltado.

Agradecimientos

Al culminar esta etapa de formación profesional, expreso mi más profundo agradecimiento a todas las personas, instituciones, familiares y amigos que, de una u otra forma, me acompañaron a lo largo del camino. Su presencia fue fundamental para seguir adelante y alcanzar los objetivos trazados.

A mis padres, Patricio y Myriam, a mi hermano Renato, mi gratitud más sincera. Gracias por su amor incondicional, sus sacrificios silenciosos y por creer en mí incluso cuando yo mismo dudaba. Este trabajo también les pertenece.

Agradezco al Instituto de Automática de la Universidad Nacional de San Juan, Argentina, por haberme recibido con generosidad y brindado el entorno adecuado para desarrollar esta tesis. En especial, al Dr. Ricardo Carelli, quien era Director del Instituto al momento de mi ingreso, por su cercanía, orientación y constante apoyo. También al Dr. Flavio Roberti, actual Director, por su disposición durante la etapa final del trabajo.

A mis directores, Ricardo, Flavio y Víctor, les expreso mi más sincero reconocimiento. Su guía, paciencia y confianza enriquecieron no solo este trabajo, sino también mi formación. En particular, al Dr. Carelli, por su acompañamiento cercano y riguroso, y al Dr. Andaluz, por acogerme en el laboratorio ARSI y facilitar el desarrollo experimental de gran parte del proyecto. Trabajar junto a ustedes fue una experiencia valiosa y profundamente formativa.

Finalmente, agradezco al Servicio Alemán de Intercambio Académico (DAAD) por la beca otorgada, que hizo posible mi ingreso al programa de Doctorado. Más allá del apoyo económico, fue un impulso de confianza y compromiso.

Cada paso de este viaje estuvo acompañado por personas que caminaron a mi lado. A todos ustedes, gracias por formar parte de este capítulo que hoy concluye, pero que, en realidad, apenas comienza.

To be continued…

Resumen

Los ***Robots Manipuladores Aéreos*** constituyen un campo de investigación de alto interés científico y tecnológico, al combinar la capacidad de movilidad de un vehículo aéreo con la destreza y capacidad de manipulación de un brazo robótico. El estudio de estos sistemas plantea un desafío fundamental en el modelado y control coordinado de estructuras robóticas acopladas altamente no lineales, con redundancia cinemática y acoplamiento dinámico.

Esta tesis tiene un carácter predominantemente científico, orientado al avance del conocimiento en el modelado y control coordinado de un sistema acoplado formado por un brazo robótico de configuración antropomórfico y una plataforma aérea tipo hexarrotor. Se propone una arquitectura de control centrada en el extremo operativo, sustentada en modelos cinemáticos y dinámicos generalizados que permiten describir rigurosamente las restricciones y capacidades del sistema.

Se diseñan algoritmos de control que explotan la redundancia del sistema para ejecutar simultáneamente tareas primarias y secundarias, enfocadas en la optimización energética y maximización de manipulabilidad sin comprometer la estabilidad. Además, se implementa un esquema de control servo-visual bioinspirado, capaz de realizar seguimiento y captura de objetivos móviles y fijos, integrando sensores de percepción y adaptabilidad dinámica.

Todas las estrategias propuestas incorporan un análisis formal de estabilidad y robustez frente a perturbaciones, lo que respalda su validez teórica y desempeño bajo condiciones reales. Los resultados teóricos y experimentales respaldan la efectividad de la arquitectura propuesta y contribuyen al entendimiento de la interacción entre plataforma aérea y brazo robótico.

Control Coordinado de Manipuladores Aéreos

Tesis doctoral de

Christian Patricio Carvajal Cabrera

Aprobada por la
Facultad de Ingeniería de la
Universidad Nacional de San Juan

para el otorgamiento del grado académico de

Doctor en Ingeniería de Sistemas de Control

Dirección de tesis:	**Dr. Ing. Ricardo Carelli**	Instituto de Automática Universidad Nacional de San Juan - Argentina
	Dr. Ing. Flavio Roberti	Instituto de Automática Universidad Nacional de San Juan - Argentina
	Dr. Ing. Víctor Andaluz	Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE Quito - Ecuador
Jurado de tesis:	**Dr. Ing. Juan Ignacio Giribet**	Universidad de Buenos Aires Buenos Aires - Argentina
	Dr. Ing. Alexandre Brandão	Universidad Federal de Viçosa Viçosa, Minas Gerais - Brasil

Fecha de la defensa oral: 25 de noviembre de 2025

Control Coordinado de Manipuladores Aéreos

Christian Patricio Carvajal Cabrera

Tesis de Doctorado

Temas de Automática

Primera edición: 2025

Impreso en Argentina

Prohibida la reproducción parcial o total, en forma idéntica o modificada, por cualquier medio. Cualquier utilización debe ser previamente solicitada.

ISBN 978-631-90962-4-8
CDD 600

© 2025 Christian Patricio Carvajal Cabrera.
Hecho el depósito que marca la ley.



Dedicatoria

Este trabajo dedico a mi familia, en especial a mis padres, a mi hermano y a mi sobrina.

A mis queridos padres, por su ejemplo de esfuerzo y sabiduría, sobre todo por su apoyo incondicional y confianza en mis capacidades. A mi hermano, por su compañía, sus palabras de aliento y su solidaridad en cada etapa de este camino. Y a mi sobrina, por ser fuente de inspiración, alegría y esperanza para el futuro.

Todos ellos han sido pilares fundamentales durante esta etapa de mi formación personal y académica. Este logro es reflejo del valor de sus enseñanzas, del amor que me han brindado y del apoyo que nunca me ha faltado.

Agradecimientos

Al culminar esta etapa de formación profesional, expreso mi más profundo agradecimiento a todas las personas, instituciones, familiares y amigos que, de una u otra forma, me acompañaron a lo largo del camino. Su presencia fue fundamental para seguir adelante y alcanzar los objetivos trazados.

A mis padres, Patricio y Myriam, a mi hermano Renato, mi gratitud más sincera. Gracias por su amor incondicional, sus sacrificios silenciosos y por creer en mí incluso cuando yo mismo dudaba. Este trabajo también les pertenece.

Agradezco al Instituto de Automática de la Universidad Nacional de San Juan, Argentina, por haberme recibido con generosidad y brindado el entorno adecuado para desarrollar esta tesis. En especial, al Dr. Ricardo Carelli, quien era Director del Instituto al momento de mi ingreso, por su cercanía, orientación y constante apoyo. También al Dr. Flavio Roberti, actual Director, por su disposición durante la etapa final del trabajo.

A mis directores, Ricardo, Flavio y Víctor, les expreso mi más sincero reconocimiento. Su guía, paciencia y confianza enriquecieron no solo este trabajo, sino también mi formación. En particular, al Dr. Carelli, por su acompañamiento cercano y riguroso, y al Dr. Andaluz, por acogerme en el laboratorio ARSI y facilitar el desarrollo experimental de gran parte del proyecto. Trabajar junto a ustedes fue una experiencia valiosa y profundamente formativa.

Finalmente, agradezco al Servicio Alemán de Intercambio Académico (DAAD) por la beca otorgada, que hizo posible mi ingreso al programa de Doctorado. Más allá del apoyo económico, fue un impulso de confianza y compromiso.

Cada paso de este viaje estuvo acompañado por personas que caminaron a mi lado. A todos ustedes, gracias por formar parte de este capítulo que hoy concluye, pero que, en realidad, apenas comienza.

To be continued…

Abstract

Aerial Manipulator Robots represent a field of research of high scientific and technological interest, as they combine the mobility of an aerial vehicle with the dexterity and manipulation capability of a robotic arm. The study of such systems poses a fundamental challenge in the modeling and coordinated control of coupled robotic structures that are highly nonlinear, kinematically redundant, and dynamically coupled.

This thesis has a predominantly scientific character, oriented toward advancing the state of knowledge in the modeling and coordinated control of coupled aerial systems. A control architecture centered on the end-effector is proposed, supported by generalized kinematic and dynamic models that rigorously describe the constraints and capabilities of the system.

Control algorithms are designed to exploit the system's redundancy for the simultaneous execution of primary and secondary tasks, focusing on energy optimization and the maximization of manipulability without compromising stability. In addition, a bioinspired visual servo control scheme is implemented, capable of tracking and capturing both moving and stationary targets by integrating perception sensors and dynamic adaptability.

All proposed strategies incorporate a formal analysis of stability and robustness against disturbances, which supports their theoretical soundness and performance under real conditions. Theoretical and experimental results validate the effectiveness of the proposed architecture and contribute to a deeper understanding of the interaction between the aerial platform and the robotic arm.

Índice general

Resumen III

Abstract V

1. Introducción 1

1.1. Antecedentes 1

1.1.1. Robótica 1

1.1.2. Robótica de Servicio 3

1.1.3. Robóts Aéreos 4

1.1.4. Manipuladores Aéreos 5

1.2. Motivación 6

1.3. Estado del Arte 7

1.3.1. Manipuladores Aéreos 8

1.3.2. Modelo y Control 13
1.3.3. Consumo de Energía 15
1.4. Contribuciones 16
1.4.1. Modelos Matemáticos Acoplados 17
1.4.1.1. Cinemática Acoplada 17
1.4.1.2. Dinámica Acoplada 17
1.4.2. Estrategia de Ahorro Energético 19
1.4.3. Control No Lineal Unificado en Cascada 20
1.4.3.1. Control Cinemático No Lineal Unificado . . . 20
1.4.3.2. Control de Compensación Dinámica 21
1.4.4. Control Servo-Visual Bioinspirado 21
1.5. Objetivos 23
1.5.1. Objetivo General 23
1.5.2. Objetivos Específicos 24
1.6. Difusión de los aportes de investigación 24
1.6.1. Publicaciones en revistas indexadas 25
1.6.2. Participación en congresos y jornadas científicas 26
1.7. Estructura de la Tesis 27

2. Modelo de Robots **29**
2.1. Introducción 29
2.2. Plataforma Aérea 30
2.2.1. Configuración Cinemática de un Robot Aéreo 30
2.2.2. Caso de Estudio 32
2.2.2.1. Cinemática Directa 33
2.2.2.2. Coordenadas Actuadas del Hexarrotor 34

2.2.2.3. Cinemática Diferencial 34
2.3. Brazo Robótico 36
2.3.1. Configuración Cinemática de un Brazo Robótico 36
2.3.2. Caso de Estudio 38
2.3.2.1. Cinemática Directa 38
2.3.2.2. Cinemática Diferencial 40
2.4. Manipulador Aéreo 40
2.4.1. Caso de Estudio 42
2.4.1.1. Cinemática Directa 43
2.4.1.2. Cinemática Diferencial 45
2.5. Dinámica del Manipulador Aéreo 47
2.5.1. Newton-Euler 48
2.5.2. Euler-Lagrange 48
2.5.3. Tipos de Modelos Dinámicos 48
2.5.3.1. Dinámica Inversa 49
2.5.3.2. Dinámica Directa 49
2.5.4. Caso de Estudio 49
2.5.4.1. Cinemática de Traslación de Cuerpos Rígidos 49
2.5.4.2. Ecuaciones de Euler-Lagrange 51
2.5.4.3. Ecuaciones de Movimiento 54
2.5.4.4. Modelo Dinámico Extendido 55
2.5.4.5. Modelo Dinámico en Función a Velocidades . 57
2.5.4.6. Modelo Dinámico Bajo Incertidumbres 62
2.5.4.7. Propiedades del Modelo Dinámico 63
2.5.4.8. Identificación Paramétrica 63

2.5.4.9. Modelo Dinámico Parametrizado 64
2.6. Modelo de Proyección de Cámara 65
2.6.1. Vision Estéreo 67

3. Control Energéticamente Eficiente para Manipuladores Aéreos 71
3.1. Introducción 71
3.2. Formulación del Problema 73
3.3. Consideraciones del Modelo Cinemático 78
3.4. Propuesta del Controlador 79
3.4.1. Esquema de Control 82
3.4.1.1. Controlador 82
3.4.1.2. Acción de Control para el Seguimiento de Camino 85
3.4.1.3. Acción de Control en el Espacio Nulo 87
3.4.2. Estrategia de Ahorro de Energía 87
3.4.2.1. Configuración 1: Movimiento en el eje-Z . . . 89
3.4.2.2. Configuración 2: Movimientos en el plano-XY 91
3.4.2.3. Configuración 3: Movimiento en el espacio-XYZ 92
3.5. Análisis de Estabilidad 93
3.5.1. Estabilidad de la Orientación en el Seguimiento de Camino 94
3.5.2. Estabilidad de la Posición de Seguimiento de Camino . . 95
3.6. Análisis de Robustez 96
3.7. Resultados Experimentales 98
3.7.1. Descripción de la Experimentación 99
3.7.1.1. Cálculo del Consumo de Energía 99
3.7.2. Controlador Estándar 100
3.7.3. Ajuste de Parámetros 101

3.7.4. Resultados Experimentales (Configuración 1) 101
3.7.4.1. Análisis Configuración 1 107
3.7.5. Resultados Experimentales (Configuración 2) 108
3.7.5.1. Análisis Configuración 2 114
3.7.6. Resultados Experimentales (Configuración 3) 115
3.7.6.1. Análisis Configuración 3 121
3.7.7. Análisis General 122

4. Control Multitarea con Compensación Dinámica 123
4.1. Introducción 123
4.2. Formulación del Problema 126
4.3. Problemas de Control de Movimiento 127
4.3.1. Control de Posición 129
4.3.2. Seguimiento de Trayectoria 129
4.3.3. Seguimiento de Camino 130
4.4. Esquema de Control 133
4.4.1. Controlador Cinemático 133
4.4.2. Controlador Dinámico 133
4.5. Control Cinemático No Lineal Unificado 135
4.5.1. Diseño del Controlador 135
4.5.2. Análisis de Estabilidad 139
4.5.2.1. Caso 1: Control de Seguimiento de Trayectoria 139
4.5.2.2. Caso 2: Control de Posición 140
4.5.2.3. Caso 3: Seguimiento de Camino 141
4.6. Control de Compensación Dinámica 144
4.6.1. Diseño del Controlador 145

4.6.2. Análisis de Estabilidad 146
4.6.3. Análisis de Robustez 147
4.7. Resultados Experimentales 151
4.7.1. Pruebas Experimentales del Control de Posición 151
4.7.2. Experimento de Seguimiento de Trayectoria 155
4.7.2.1. Primer Experimento 155
4.7.2.2. Segundo Experimento 160
4.7.3. Experimento de Seguimiento de Camino 164
4.7.4. Análisis de Resultados 170
4.8. Estrategia Energética y Dinámica 171
4.8.1. Esquema de Control 171
4.8.2. Resultados Experimentales 173
4.8.3. Análisis de Resultados 178

5. Control Servo-Visual Bioinspirado **181**
5.1. Introducción 181
5.2. Formulación del Problema 183
5.2.1. Etapas del Agarre Aéreo Bioinspirado 187
5.2.1.1. Identificación o Búsqueda (T1) 187
5.2.1.2. Aproximación al Objetivo (T2) 187
5.2.1.3. Agarre (T3) 187
5.2.1.4. Transporte (T4) 187
5.3. Configuración Cinemática de la Cámara 188
5.3.1. Jacobiano Aumentado 191
5.4. Control Servo-Visual con Objetivos Secundarios 192
5.4.1. Control Cinemático no Lineal Unificado 193

5.4.1.1. Acción de Control Primaria 193
5.4.1.2. Acción de Control Secundaria 194
5.4.2. Objetivos de Control 195
5.4.2.1. T1 y T4: Búsqueda y Transporte 195
5.4.2.2. T2: Aproximación al Objetivo 197
5.4.2.3. T3: Agarre Aéreo del Objetivo 201
5.4.3. Estabilidad Cinemática 203
5.4.4. Compensación Dinámica 204
5.4.4.1. Estabilidad Dinámica 205
5.4.5. Análisis de Robustez 206
5.5. Resultados Experimentales 208
5.5.1. Orientación del Objetivo 210
5.5.2. Simulación y Ajuste de Parámetros 211
5.5.3. Objetivo Estático 216
5.5.4. Objetivo con Trayectoria Lineal 221
5.5.5. Objetivo con Trayectoria Variante 226

6. Conclusiones **233**
6.1. Conclusiones del Capítulo II 234
6.2. Conclusiones del Capítulo III 234
6.3. Conclusiones del Capítulo IV 235
6.4. Conclusiones del Capítulo V 236
6.5. Conclusión general 238

Apéndices **239**

A. Robot Manipulador Aéreo **241**

A.1. Introducción 241
A.2. Hardware 243
A.2.1. Plataforma Aérea 243
A.2.2. Brazo Robótico de 3DOF 244
A.2.3. Sistema de Energía 245
A.2.4. Computador a Bordo 247
A.2.5. Sistema de Visión 248
A.3. Software 250
A.3.1. Robot Operating System (ROS) 251
A.3.2. Arquitectura del Robot Manipulador Aéreo 251
A.3.2.1. Sistema Visual 254
A.3.2.2. Estado del Sistema 256
A.3.2.3. Sistema de Control del Brazo Robótico 256
A.3.2.4. Sistema de Control del Matrice 600Pro 258
A.3.2.5. Sistema de Tele Operación 258
A.3.2.6. Sistema de Control Autónomo 261
A.3.2.7. Sistema de Control Manual 263
A.3.3. Nodos y Tópicos de ROS del Robot 263
A.4. Nota final sobre la plataforma experimental 265

B. Redundancia en Robótica **267**

B.1. Tipos de Redundancia 267
B.2. Ventajas de la Redundancia 268
B.3. Sistemas Redundantes 268
B.4. Solución de un Sistema Redundante 270
B.4.1. Solución Particular 270

B.4.2. Solución General 270

C. Manipulabilidad **273**

C.1. Índice de Manipulabilidad 273

C.2. Brazo Robótico de 3DOF 274

C.2.1. Cinemática Directa 275

C.2.2. Cinemática Diferencial 275

C.2.3. Análisis de la Manipulabilidad 276

C.3. Manipulador Aéreo 278

C.3.1. Análisis de la Manipulabilidad 279

C.4. Elipse de Manipulabilidad 281

D. Propiedades del Modelo Dinámico **285**

D.1. Propiedad de la Matriz $\bar{\mathbf{M}}(\mathbf{q})$ 285

D.2. Propiedad de la Matriz $\bar{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ 286

D.3. Antisimetría (Skew-symetry) 287

D.4. Linealidad en los parámetros dinámicos 287

D.5. No linealidad 287

E. Ecuaciones del Modelo Dinámico **289**

E.1. Modelo Dinámico en Función a Torques 289

E.1.1. Matriz de Masas o de Inercia 289

E.1.2. Matriz de Fuerza Centrípetas y de Coriolis 293

E.1.3. Vector de Gravedad 297

E.2. Modelo Dinámico en Función a Velocidades de Referencia . . . 298

E.2.1. Matriz de Masa o de Inercia 298

E.2.2. Vector de de Fuerzas Centrípetas y de Coriolis 302

E.2.3. Vector de Gravedad 307

F. Identificación y Validación del Modelo Dinámico 309

F.1. Proceso de Identificación y Validación 309

F.1.1. Proceso en Línea 310

F.1.2. Proceso Fuera de Línea 310

F.2. Validación del Modelo Dinámico 311

F.3. Parámetros del Modelo Dinámico 314

Bibliografía 315

Índice de figuras

1.1. Robots Industriales. 2
1.2. Robots de Servicio. 4
1.3. Manipuladores aéreos. 6
1.4. Manipuladores aéreos para agarre y transporte de objetos. . . . 9
1.5. Manipuladores aéreos para interacción física con el medio. . . . 11
1.6. Manipuladores aéreos con brazos robóticos de múltiples DoFs. . 13

2.1. Configuración cinemática del UAV en el sistema de referencia fijo $\{\mathcal{F}_w\}$. 31
2.2. Brazo robótico de tres grados de libertad 3 DoF. 38
2.3. Configuración cinemática del manipulador aéreo en el sistema de referencia fijo. 42
2.4. Dinamica de un robot. 48

2.5. Parámetros dinámicos de un manipulador aéreo. 50
2.6. Modelo de cámara pinhole. 66
2.7. Geometría epipolar para visión estéreo. 67
2.8. Plano de geometría epipolar. 68

3.1. Problema de seguimiento de camino. 80
3.2. Esquema del controlador propuesto para el seguimiento de camino y esquema de control interno del robot que recibe comandos de velocidad. 84
3.3. Configuración 1 (eje-Z). 90
3.4. Configuración 2 (plano-XY). 91
3.5. Configuración 3 (espacio-XYZ). 92
3.6. Robot para pruebas experimentales en el entorno real. 99
3.7. Movimiento ejecutado por el robot con el controlador propuesto. 103
3.8. Movimiento ejecutado por el robot con el controlador estándar. 103
3.9. Errores producidos con el controlador propuesto. 104
3.10. Errores producidos con el controlador estándar. 104
3.11. Módulos de los errores de control producidos con los dos controladores ρ. 105
3.12. Variación de las articulaciones del brazo robóticos con ambos controladores. 106
3.13. Potencia consumida en los experimentos ejecutados para la Configuración 1 con ambos controladores. 106
3.14. Variación del índice de manipulabilidad con ambos controladores. 107
3.15. Velocidad deseada v_d para el seguimiento de camino con ambos controladores. 107
3.16. Movimiento ejecutado por el robot con el controlador propuesto. 110
3.17. Movimiento ejecutado por el robot con el controlador estándar. 110

3.18. Errores producidos con el controlador propuesto. 111
3.19. Errores producidos con el controlador estándar. 111
3.20. Módulos de los errores de control producidos con los dos controladores ρ. 112
3.21. Potencia consumida en los experimentos ejecutados para la Configuración 2 con ambos controladores. 112
3.22. Variación de las articulaciones del brazo robóticos con ambos controladores. 113
3.23. Variación de la manipulabilidad con ambos controladores. . . . 114
3.24. Velocidad deseada v_d para ambos controladores. 114
3.25. Evolución del extremo operativo con el controlador propuesto en el espacio-XYZ y sobre el plano-XY. 117
3.26. Evolución del extremo operativo con el controlador estándar en el espacio-XYZ y sobre el plano-XY. 117
3.27. Errores producidos con el controlador propuesto. 118
3.28. Errores producidos con el controlador estándar. 118
3.29. Módulo de los errores de control con ambos controladores ρ. . . 119
3.30. Variación de la manipulabilidad con ambos controladores. . . . 119
3.31. Velocidad deseada v_d para el seguimiento de camino con ambos controladores. 120
3.32. Potencia consumida en los experimentos ejecutados para la Configuración 3 con ambos controladores. 120
3.33. Variación de las articulaciones del brazo robótico registradas durante el experimento con el controlador propuesto y el controlador estándar. 121

4.1. Esquema Multicapa. 128
4.2. Problema de control de posición del manipulador aéreo. 130
4.3. Problema de seguimiento de trayectoria del manipulador aéreo. 131

4.4. Problema de seguimiento de camino del manipulador aéreo. . . 132

4.5. Esquema de control en cascada. 134

4.6. Movimiento del manipulador aéreo para posicionar el extremo operativo en la posición y orientación deseada. 153

4.7. Evolución de la posición y orientación del extremo operativo durante el experimento para la condición inicial de $\mathbf{q_4}(t_0)$. . . . 154

4.8. Errores de posición y orientación del extremo operativo para $\mathbf{q_4}(t_0)$. 154

4.9. Evolución de las articulaciones del brazo robótico para el experimento con condición inicial de $\mathbf{q_4}(t_0)$. 155

4.10. Movimiento realizado del manipulador aéreo durante el experimento de seguimiento de trayectoria. 157

4.11. Errores de posición y orientación del extremo operativo durante el experimento de seguimiento de trayectoria. 158

4.12. Evolución de las articulaciones del brazo robótico durante el experimento de seguimiento de trayectoria. 158

4.13. Errores de las velocidades del manipulador aéreo. 159

4.14. Comportamiento de la potencia durante el experimento (SD sin dinámica, CD con dinámica). 159

4.15. Evolución del extremo operativo sin compensación dinámica (a, b, c) y con compensación dinámica (d, e, f). 161

4.16. Norma del error de control ρ. 162

4.17. Error de orientación del extremo operativo $\tilde{o}_r$. 162

4.18. Errores de velocidad del hexarrotor ($\tilde{\mathbf{v}}_\mathbf{u}$). 162

4.19. Errores de velocidad de las articulaciones del brazo robótico ($\tilde{\mathbf{v}}_\mathbf{a}$). 163

4.20. Análisis comparativo del desempeño del control NDC vs. WDC. 163

4.21. Evolución del extremo operativo durante el experimento de seguimiento de camino sin compensación dinámica (a, b, c) y con compensación dinámica (d, e, f). 166

4.22. Errores de posición del extremo operativo del manipulador aéreo. 167
4.23. Norma del error de control ρ. 168
4.24. Error de orientación del extremo operativo $\tilde{o}_r$. 168
4.25. Errores de velocidad del hexarrotor. 168
4.26. Errores de las velocidad de las articulaciones del brazo robótico. 169
4.27. Consumo de potencia durante el experimento. 169
4.28. Consumo de corriente durante el experimento. 169
4.29. Esquema de control en cascada para el ahorro de energía. 171
4.30. Movimiento estroboscópico del comportamiento del manipulador aéreo para el (E.1) con **NSND** y **WSWD** durante la experimentación. 174
4.31. Comportamiento del error de posición y error orientación del extremo operativo en cada caso de control. 175
4.32. Análisis del comportamiento del error de control para los diferentes casos del experimento. 175
4.33. Comportamiento de la velocidad deseada en función a cada estrategia aplicada en el experimento (E.1). 176
4.34. Comportamiento del índice de manipulabilidad para cada configuración de control en el experimento (E.1). 177
4.35. Análisis de potencia y consumo de energía para los diferentes esquemas de control para (E.1). 178
4.36. Consumo energético con (E.1) y (E.2) obtenido con las estrategias **NSND** y **WSWD**. 178

5.1. Estrategia de agarre aéreo de un águila [177]. 185
5.2. Etapas para el agarre aéreo bioinspirado para un manipulador aéreo. 186
5.3. Interpretación cinemática de la configuración Aerial-Eye-to-Hand. 188
5.4. Esquema en cascada propuesto para el controlador servo-visual bioinspirado. 192

5.5. Búsqueda y transporte del objetivo. 195

5.6. Formación propuesta para la aproximación al objetivo de interés. 197

5.7. Representación del objetivo a capturar y del extremo operativo proyectados en el plano imagen. 200

5.8. Estrategia de agarre aéreo bioinspirado para un manipulador aéreo 201

5.9. Sistemas robóticos empleados para los experimentos. 209

5.10. Estrategia para determinar la orientación del objetivo en tierra. 210

5.12. Etapa T2 y T3 del agarre aéreo. 212

5.11. Movimiento estroboscópico recreado con datos obtenidos del experimento simulado del agarre aéreo con el objetivo en movimiento. 213

5.13. Evolución de los errores de posición del extremo operativo. . . . 214

5.14. Comportamiento de los errores de control. 214

5.15. Comportamiento de los parámetros de la formación deseada del extremo operativo respecto al objetivo. 215

5.16. Velocidades estimadas del objetivo. 215

5.17. Posición del extremo operativo y del objetivo en el plano imagen. 216

5.18. Movimiento estroboscópico recreado con datos reales obtenidos del experimento con el manipulador aéreo durante el experimento de agarre aéreo del objetivo fijo. 218

5.19. Evolución de los errores de posición del extremo operativo durante el experimento con el objetivo fijo. 219

5.20. Evolución de los errores de las articulaciones del brazo robótico. 219

5.21. Norma del error de posición y orientación del extremo operativo producidos en el experimento del agarre aéreo de un objetivo estático. 219

5.22. Etapas del experimento realizando para el agarre aéreo del objetivo estático. 220

5.23. Evolución del objetivo y del extremo operativo en el plano imagen $\{\mathcal{F}_{\mathrm{I}}\}$ durante el experimento de agarre aéreo del objetivo estático en tierra. 220

5.25. Evolución de los errores de posición del extremo operativo en el experimento de agarre aéreo del objetivo en movimiento. 221

5.24. Movimiento estroboscópico recreado con datos reales obtenidos del experimento con el manipulador aéreo durante el experimento de agarre aéreo con el objetivo en movimiento. 222

5.26. Evolución de los errores de las articulaciones del brazo robótico en el experimento de agarre aéreo del objetivo en movimiento. . 223

5.27. Errores de posición y orientación del extremo operativo producidos en el experimento realizado. 223

5.28. Etapas del experimento realizado del agarre aéreo del objetivo en movimiento cuadro a cuadro. 224

5.29. Evolución del objetivo en el plano imagen conjuntamente con la evolución del extremo operativo. 225

5.30. Módulo de la velocidad destinada del objetivo en movimiento respecto a al sistema de referencia fijo $\{\mathcal{F}_{\mathrm{w}}\}$. 225

5.31. Velocidades estimadas del objetivo respecto a $\{\mathcal{F}_{\mathrm{w}}\}$. 226

5.32. Movimiento estroboscópico recreado con datos reales obtenidos del experimento de agarre aéreo con el objetivo en movimiento. 227

5.33. Evolución de los errores de posición del extremo operativo en el experimento de agarre aéreo del objetivo en movimiento. 228

5.34. Evolución de los errores de las articulaciones del brazo robótico durante el experimento de agarre aéreo del objetivo en movimiento. 228

5.35. Errores de posición y orientación del extremo operativo. 229

5.36. Trayectoria del objetivo y extremo operativo en $\{\mathcal{F}_{\mathrm{I}}\}$. 230

5.37. Etapas del experimento realizado del agarre aéreo del objetivo en movimiento cuadro a cuadro. 230

5.38. Velocidades estimadas del objetivo en $\{\mathcal{F}_{\mathrm{w}}\}$. 231

A.1. Esquema del hardware del robot manipulador aéreo. 242

A.2. Hexarrotor Matrice 600Pro utilizado como plataforma aérea para el manipulador aéreo [191]. 244

A.3. Modelo CAD del brazo robótico d 3DOF para el manipulador aéreo. 245

A.4. Sistema de energía del robot manipulador aéreo. 247

A.5. Computador a bordo del robot manipulador aéreo. 248

A.6. Cámaras de profundidad y de tracking instaladas en el robot. . . 249

A.7. Esquema de la arquitectura del software. 250

A.8. Arquitectura del software ROS del robot manipulador aéreo. . . 253

A.9. Nodos y tópicos de ROS correspondientes al sistema de visión. . 256

A.10. Nodo y tópicos de ROS correspondientes al brazo robótico. . . . 257

A.11. Nodos y tópicos activos de ROS del Matrice 600Pro. 260

A.12. Nodo y tópicos de ROS del dispositivo para teleoperación. . . . 261

A.13. Video que captura y trasmite el robot mediante el nodo de ROS para realimentación visual. 263

A.14. Nodos y tópicos de ROS del robot manipulador aéreo 264

A.15. Robot Manipulador Aéreo. 265

B.1. Representación del mapeo lineal entre espacios mediante el Jacobiano (**J**). 269

C.1. Brazo robótico de 3 grados de libertad. 274

C.2. Indice de manipulabilidad respecto a la variación de cada articulación del brazo robótico. 276

C.3. Comportamiento del índice de manipulabilidad respecto a las articulaciones q_1 y q_2 del sistema. 277

C.4. Brazo robótico de 4 grados de libertad. 278

C.5. Indice de manipulabilidad respecto a cuatro articulaciones del manipular aéreo. 279

C.6. Comportamiento del índice de manipulabilidad del manipulador aéreo respecto a q_1 y q_2. 280

C.7. Elipse de manipulabilidad en configuración óptima. 282

C.8. Elipse de manipulabilidad para dos configuraciones del brazo robótico. 283

F.1. Proceso en línea (On-Line). 310

F.2. Proceso fuera de línea (Off-Line). 310

F.3. Velocidades del hexarrotor. 311

F.4. Velocidades de las articulaciones del brazo robótico. 312

F.5. Velocidades del hexarrotor ante señales de tipo escalón. 313

F.6. Velocidades del brazo robótico ante señales de tipo escalón. . . . 313

Índice de tablas

2.1. Parámetros de D-H del brazo robótico de 3 DoF 39

3.1. Parámetros de control (Configuración 1) 102

3.2. Comparación de los resultados experimentales para la Configuración 1. 108

3.3. Parámetros de control (Configuración 2) 109

3.4. Comparación de los resultados experimentales para la Configuración 2. 115

3.5. Parámetros de control (Configuración 3) 116

3.6. Comparación de los resultados experimentales para la Configuración 3. 122

4.1. Evolución del error de control $\tilde{r}_i\,(k)$ en el instante de tiempo k . 140

4.2. Evolución del error de control $\tilde{\mu}_i\,(k)$ en el instante de tiempo k. 147

4.3. Evolución del vector error de velocidad $\tilde{\boldsymbol{\mu}}(k)$ en el instante de tiempo k 148

4.4. Parámetros del controlador de posición. 152

4.5. Parámetros del controlador se seguimiento de trayectoria. . . . 156

4.6. Parámetros del controlador de seguimiento de camino. 164

4.7. Resultados obtenidos de los experimentos. 179

5.1. Parámetros del controlador bioinspirado. 211

A.1. Características de la plataforma aérea Matrice 600Pro 243

A.2. Parámetros del brazo robótico de 3DOF 246

A.3. Tópicos generados por la cámara de Tracking. 254

A.4. Tópicos generados por la cámara de Profundidad. 255

A.5. Tópicos relacionados con el control del brazo robótico. 257

A.6. Tópicos generados del Matrice 600Pro. 259

A.7. Códigos ejemplo para el control autónomo del manipulador aéreo. 262

C.1. Valores de las articulaciones de máxima manipulabilidad del brazo robótico de 3DOF 277

C.2. Rangos recomendados para q_1 y q_2 que garantizan una alta manipulabilidad. 280

F.1. Parámetros identificados y validados del modelo dinámico en función a velocidades de referencia 314

CAPÍTULO 1

Introducción

1.1. Antecedentes

1.1.1. Robótica

La robótica es el conjunto de conocimientos teóricos y prácticos que involucra el diseño y la fabricación de robots para usos prácticos. La robótica enlaza múltiples disciplinas como: la informática, electrónica, mecánica, matemática, control, entre otras disciplinas que permiten la construcción y control de robots con la capacidad de funcionar de forma autónoma o semiautónoma, además de que realicen trabajos que resulten repetitivos o peligrosos para el ser humano [1, 2]. En definitiva, la robótica ayuda en el entorno brindando seguridad y calidad. Tomando en cuenta la funcionalidad del robot, existen dos tipos de robots que actualmente son de mucha importancia dentro del campo de la robótica; estos son: los robots industriales y los robots de servicio.



(a) Robot Ready2 spot KUKA industrial para soldadura [3].



(b) Robot YUMI industrial de doble brazo marca ABB [4].



(c) Robot articulado industrial RV-FR marca Mitsubishi [5].

Figura 1.1: Robots Industriales.

La robótica industrial es la tecnología que permite automatizar procesos en entornos industriales. Los robots más utilizados para la industria son los conocidos manipuladores robóticos, que van desde tamaños pequeños hasta varios metros de altura. Este tipo de robots se caracteriza por realizar tareas repetitivas preprogramadas, tiene la capacidad de trabajar con elementos de gran tamaño y peso, por lo tanto, necesita de medidas de seguridad estrictas con el fin de evitar accidentes dentro del campo laboral: vallado, cerramiento o bloqueo de acceso, entre otros [6]. La Figura 1.1 muestra algunos tipos de robots industriales.

1.1.2. Robótica de Servicio

La robótica de servicio es empleada para uso profesional y personal. Un robot de servicio se define como un robot que trabaja de forma autónoma o parcialmente autónoma para el servicio del bienestar de los seres humanos, excluyendo operaciones manufactureras (Definición ISO TC 184/SC2). Los robots de servicio poseen muchas aplicaciones: i) para el servicio del ser humano, en protección, asistencia médica, entretenimiento y seguridad; ii) servicio a equipos en mantenimiento, reparación y limpieza; iii) funciones autónomas en vigilancia, transporte y manipulación de objetos, adquisición de datos, monitoreo e inspección. Entre las principales diferencias de un robot de servicio y un robot industrial se destacan: la locomoción, que dota al robot de la capacidad de desplazarse en diferentes medios; el aspecto físico de un robot de servicio, a diferencia de los industriales, en general es de tamaño y peso más reducidoss; los robots de servicio no están diseñados para realizar tareas que son repetitivas con cargas elevadas. Por lo tanto, los robots de servicio tiene la capacidad de tomar decisiones de forma autónoma, evitar obstáculos durante la ejecución de la tarea, transportar objetos de un lugar hacia otro de forma segura, reconocer e identificar a los humanos para evitar accidentes; es decir, este tipo de robots cuenta con la capacidad de interactuar con los seres humanos [7, 8]. En función de la gran demanda que presentan los robots de servicio, la tecnología ha permitido cada vez mejorar el desempeño y la arquitectura interna y externa de los robots, incorporando la ciencia de la inteligencia artificial, sistemas de visión, computación adaptativa y, sobre todo, controladores que permiten mejorar la eficiencia en la ejecución de tareas, aumentando el grado de autonomía y el rango de trabajo de este tipo de robots [9].

En la actualidad existen múltiples tipos de robots de servicio que atienden grandes necesidades de los seres humanos; entre estos tenemos: robots domésticos, que se encargan de las tareas cotidianas en el hogar, como aspiradoras, robots de vigilancia interna, robots de cocina, entre otros; robots para la exploración, que prácticamente son robots móviles utilizados para la inspección y rastreo en entornos de alto riesgo [10]; robots de asistencia médica, como son las prótesis robóticas y los robots que se usan para asistencia a los cirujanos [11]; los robots militares, que ayudan en el apoyo de operaciones militares. Este tipo de robots puede presentar diferentes morfologías según su aplicación: existen robots aéreos para vigilancia, robots para la carga de equipamiento militar, robots de espionaje, entre otros [12]. Algunos tipos de robots de servicio se presentan en la Figura 1.2.



(a) Robot Toyota T-HR3 para asistencia en hogar [13].



(b) Robot Da Vinci, primer robot cirujano [14].



(c) Vehículo terrestre cuadrúpedo no tripulado (Q-UGV) [15].

Figura 1.2: Robots de Servicio.

1.1.3. Robóts Aéreos

Los vehículos aéreos no tripulados (VANTs) o Unmanned Aerial Vehicles por sus siglas en inglés (UAVs) han generado increíbles avances tecnológicos en temas de navegación autónoma, percepción, obtención de mapas, evasión de obstáculos y la autolocalización [16, 17, 18]. Temas que han sido de gran ayuda para que los robots no se limiten en cuanto al espacio de trabajo en la ejecución de tareas como: inspección [19], transporte de carga a zonas inaccesibles [20], agricultura de precisión [21], vigilancia [22], mapeo y modelado 3D [23], monitoreo de ríos o lagos y tareas de alto riesgo para las personas [24]. Existen diversas alternativas que permiten a los UAVs realizar tareas activas como la carga y el transporte de objetos. Inicialmente, el transporte de objetos con plataformas aéreas se realiza

mediante el uso de cuerdas flexibles montadas en la parte inferior; por ejemplo, [25] propone el control de un cuadrirrotor con cuerda para trasladar objetos de forma autónoma, evitando colisionar con obstáculos durante la ejecución de la tarea del UAV; en [26] proponen algo algo más sofisticado, que permite trasladar objetos sujetos de una cuerda por medio de dos UAVs. Este tipo de propuesta permite trasladar objetos de mayor tamaño a grandes distancias y en menor tiempo que los robots móviles; sin embargo, se necesita de dos robots aéreos para cumplir con esta tarea. Existen otras propuestas desarrolladas que permiten a los vehículos aéreos realizar tareas de transporte que conllevan grandes distancias y presentan difícil acceso para los robots móviles terrestres, como en [27, 28]. Las diferentes formas de transportar cargas con los UAVs contemplan varias limitantes, entre ellas: el peso y tamaño de la carga, tamaño del robot, autonomía y espacio de trabajo. Por lo tanto, no están en capacidad de desarrollar tareas que demanden mayor complejidad y precisión. La solución a estas limitaciones es la incorporación de uno o más grados de libertad a las plataformas aéreas. Este tipo de robots son conocidos como **Manipuladores Aéreos**.

1.1.4. Manipuladores Aéreos

Un manipulador aéreo es típicamente un vehículo aéreo no tripulado (UAV) que lleva montado en su estructura uno o varios brazos robóticos de diferentes grados de libertad (DoF), los cuales representan la cantidad de movimientos independientes que el brazo puede realizar, como giros, desplazamientos y rotaciones en diversos ejes. Este tipo de robots permiten transportar y manipular objetos con mayor precisión dada la cantidad de redundancia que presenta el sistema robótico, ya que combina la capacidad de manipulación de un brazo robótico de base fija con la movilidad de una plataforma aérea [29, 30, 31].

Para la construcción de un manipulador aéreo, es aconsejable que el brazo robótico esté cerca del centro de masa de la plataforma aérea, esto con el propósito de evitar cambios grandes en la dinámica por la modificación de los momentos de inercia que se generan cuando el brazo robótico realiza movimientos [32, 33]. La complejidad de implementar y controlar este tipo de robots está en función al tipo de brazo robótico que se acople al fuselaje de la plataforma aérea. Esto debido a que al aumentar grados de libertad, aumenta tamaño, peso y sobre todo aumenta los efectos dinámicos que produce el brazo robótico. Algunos ejemplos de manipuladores aéreos se pueden observar en la Figura 1.3.



(a) Manipulador aéreo CORE [34].



(b) Manipulador aéreo dual [35].



(c) Manipuladores aéreos existentes

Figura 1.3: Manipuladores aéreos.

1.2. Motivación

La motivación para esta tesis se basa en la necesidad de mejorar el control y la funcionalidad de los robots aéreos, que hoy en día se limitan principalmente a realizar tareas activas, como la manipulación y agarre de objetos. A pesar de que existen distintos tipos de robots aéreos, tales como los de ala fija, ala rotativa, planeadores y globos, todos cuentan con la limitación de no poder interactuar físicamente con su entorno. Sin embargo, al combinar un robot aéreo con un brazo robótico, surgen los manipuladores aéreos, estos robots cuentan con la capacidad de vuelo y de manipulación, abriendo nuevas posibilidades para tareas más complejas y diversas en diferentes sectores como el rescate, la industria, la logística y la inspección.

El movimiento de un robot manipulador aéreo está comandado por algoritmos o esquemas de control que aseguran que los actuadores de todo el sistema se muevan de forma coordinada para cumplir la tarea deseada. Para que estos esquemas de control funcionen de manera eficiente, se requiere un entendimiento profundo de los modelos cinemáticos y dinámicos que describen el comporta-

miento completo del sistema. Es crucial tener en cuenta las características de la estructura mecánica, los actuadores y los sensores del manipulador aéreo, lo que hace necesario realizar una modelación precisa del sistema. Aunque se han desarrollado modelos cinemáticos para manipuladores aéreos, estos han sido principalmente aplicados a escenarios de bajas velocidades y cargas ligeras, lo que limita su aplicabilidad en situaciones de alta velocidad y cargas pesadas.

Uno de los grandes desafíos que enfrentan los manipuladores aéreos es el control de las dinámicas acopladas entre la plataforma aérea y el brazo robótico. Estas dinámicas complejas dificultan la tarea de controlar el sistema de forma unificada, ya que es necesario mantener tanto la estabilidad de vuelo de la plataforma aérea como la precisión en la manipulación y agarre de objetos. Además, la autonomía del robot para realizar tareas sin la intervención humana es una prioridad, pero sigue siendo un desafío técnico significativo. Estos obstáculos marcan la necesidad de desarrollar esquemas avanzados de control que puedan optimizar tanto el rendimiento del manipulador aéreo como su capacidad para operar de forma autónoma y eficiente en una variedad de entornos dinámicos.

Superar estos desafíos no solo tiene un gran aporte desde el punto de vista académico, sino que también tiene un impacto directo en aplicaciones prácticas. Al mejorar el control y la capacidad de los manipuladores aéreos, es posible generar nuevas tecnologías que refuercen su impacto en sectores clave como la robótica de servicio, en la industria, la inspección de infraestructuras, el rescate en áreas de difícil acceso y muchas otras áreas. En última instancia, esta tesis busca contribuir a la evolución de la robótica aérea, desarrollando soluciones innovadoras que permitirán a estos robots llevar a cabo tareas complejas de manera autónoma, precisa y eficiente.

1.3. Estado del Arte

Inicialmente, el transporte de objetos con plataformas aéreas se realiza mediante el uso de cuerdas flexibles montadas en la parte inferior; por ejemplo [25] propone el control de un cuadrirrotor con cuerda para trasladar objetos de forma autónoma, evitando colisionar con obstáculos durante la ejecución de la tarea del UAV. En [26, 36] proponen algo algo más sofisticado, que permite trasladar objetos sujetos de una cuerda por medio de dos UAVs. Este tipo de propuesta permite trasladar objetos de mayor tamaño a grandes distancias y con menor tiempo que

los robots móviles terrestres, sin embargo, se necesita de dos robots aéreos para cumplir con esta tarea. Las diferentes formas de trasportar cargas con los UAVs contemplan varias limitantes, entre ellas, el peso y tamaño de la carga, el tamaño del robot, autonomía y espacio de trabajo. Además, no están en condiciones de realizar tareas de manipulación sobre el entorno. La solución a estas limitaciones es la incorporación de uno o más grados de libertad a las plataformas aéreas. Este tipo de robots son conocidos como Manipuladores Aéreos.

1.3.1. Manipuladores Aéreos

Los primeros manipuladores aéreos, estaban conformados por plataformas de uno o varios rotores, contaban con una garra o sistema que permita sujetar de forma autónoma objetos. En el año 2011 en [37] desarrollan un robot para agarrar objetos y posteriormente pasar a vuelo con la carga. La plataforma aérea empleada es un helicóptero de radiocontrol (T-Rex 600) y el mecanismo de agarre está instalado en la parte inferior del helicóptero cercano al tren de aterrizaje. Para sujetar cargas la aeronave se aproxima al objeto y cierra la garra para cargar el objeto. El control para mantener la estabilidad del sistema con carga lo hacen mediante un controlador tipo PID.

En [38] analizan la estabilidad del sistema, mediante el modelo dinámico del helicóptero agregan la variación del momento de inercia que produce la carga sobre la plataforma. Por medio de esta variación controlan el balance del helicóptero manteniendo el centro de gravedad en equilibrio, es decir, el objetivo es mantener estable el helicóptero de forma horizontal (Figura 1.4a). De igual forma, la misma metodología para agarre aéreo se implementa en [39]. Aborda la mecánica, el diseño y el control del agarre aéreo. Utilizan el modelo dinámico de un cuerpo rígido y posteriormente estiman parámetros inerciales cuando el robot agarra el objeto. El control está enfocado en asignar las acciones de control para mantener el centro de gravedad en equilibrio y se estiman los parámetros para determinar la posición del centro de gravedad del sistema con la carga. En este tipo de sistema no existe mayor complejidad en realizar el control, ya que la garra permanece fija y únicamente existe cambio de masa del sistema al momento de llevar el objeto (Figura 1.4b).

Años más tarde los métodos de agarre evolucionan, incorporando un grado más de libertad a la plataforma aérea para agarrar objetos a altas velocidades [40]. El sistema está inspirado en la caza aérea de presas. Está conformado por

Micro Unmanned Aerial Vehicle (MAV) de tipo cuadrirrotor y un gripper de tipo garra con un grado de libertad. Utilizan el modelo simplificado de la plataforma tomando en cuenta la dinámica acoplada con el gripper. El modelo simplificado del sistema únicamente considera el desplazamiento sobre el plano X-Z, ya que el agarre lo hace de forma frontal y cierta altura del objeto. Por lo tanto, controlan la altura, el desplazamiento frontal y agregan el control del ángulo deseado de cabeceo del cuadrirrotor (Figura 1.4c). Esta implementación permite agarrar objetos a mayor velocidad sin tener la necesidad de posarse sobre el objeto de interés como los descritos anteriormente.



(a) Manipulador aéreo Yale para transporte [37].



(b) Manipulador aéreo para agarre y transporte [39].



(c) Agarre inspirado en las aves [40].

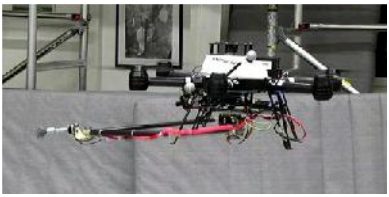
Figura 1.4: Manipuladores aéreos para agarre y transporte de objetos.

Los sistemas que contemplan garras para sujetar objetos tienen como limitante el manipular objetos con mayor libertad. Es por ello que, para mejorar esta limitación, se incorpora más grados de libertad a la plataforma aérea. Sin embrago, al extender los grados de libertad aumenta la complejidad de obtener el modelo y sobre todo su dinámica se vuelve más compleja. La complejidad de controlar y desarrollar un manipulador aéreo evoluciona en función al tipo de brazo robótico que se incorpore en la plataforma aérea. Por ejemplo, en [41] diseñan un sistema con un manipulador de tipo paralelo. La plataforma aérea es el hexarrotor

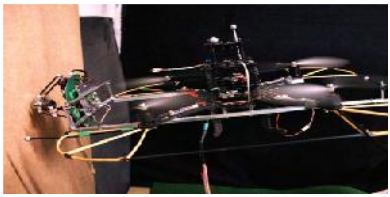
ASTEC NEO, el UAV es capaz de llevar hasta 1 Kg de carga útil (Figura 1.5a). Esto permite instalar un brazo robótico tipo paralelo de bajo peso. Presentan el modelo cinemático del manipulador aéreo considerando de forma conjunta todo el sistema. Además, obtienen el modelo dinámico del robot de forma conjunta con el manipulador tipo paralelo. Los resultados experimentales consisten en comparar la posición estimada del extremo operativo con el medido por un sistema de visión. La predicción de los estados del UAV es por medio de un filtro extendido de Kalman (EKF); y la medición es realizada por un sensor de posición (Vicon). Para validar el modelo dinámico lo realizan mediante la estimación de las fuerzas sobre el UAV y de igual forma para los torques del manipulador. El torque es obtenido de forma indirecta a través de la medición de corriente de los motores. Este tipo de manipulador aéreo tiene un amplio espacio de trabajo sobre el plano al poseer un manipulador tipo paralelo. Sin embargo, para lograr desplazamientos en el eje hay que incluir el movimiento del UAV para lograr interactuar en el espacio.

Otro tipo de manipulador aéreo que permite la interacción con el medio, son aquellos que cuentan con un brazo robótico que permite detectar fuerza y mediante esto se agrega la interacción con el espacio de trabajo para tareas de contacto físico (tareas activas). En [42] desarrollan un manipulador aéreo con un brazo robótico de 3 DoF que permite la interacción con el medio a determinada altura. El extremo operativo cuenta con un sensor para determinar el contacto físico con superficies. Establecen el modelo dinámico simplificado, conjuntamente con el brazo robótico. Plantean un control en cascada para la actitud del sistema y la posición lateral. El controlador está basado en la pasividad (Figura 1.5b). De igual manera, en [43] presentan un manipulador aéreo para tareas de inspección por contacto físico en superficies, el extremo operativo posee un sensor de fuerza A 6-axis Force/Torque sensor) y el brazo robótico esta instalado en la parte superior de la plataforma aérea. El control implementado es de tipo PID que controla los ángulos de navegación del sistema (roll, pitch y yaw) el manipulador se pueden ver en la (Figura 1.5c). En [44] presentan un manipulador con el mismo sistema. El brazo robótico está instalado en la parte superior del UAV. Para estimar la fuerza de contacto lo hacen a través de la medición de corriente, los autores plantean un control de fuerza para la interacción con el medio. El modelo dinámico del sistema está en función a fuerzas y torques (Figura 1.5d). Así como estos tipos de manipuladores existen otros que pueden interactuar con superficies [45].

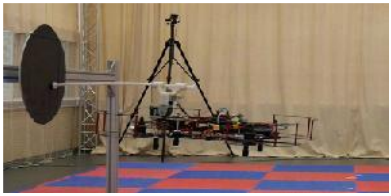
Como se pueden ver según la tarea a ejecutar, pueden existir diferentes tipos de manipuladores aéreos para agarre o interacción con el medio. Ahora, con el



(a) Manipulador aéreo con hexacóptero ASCTEC NEO [40].



(b) Manipulador aéreo con cuadrirrotor AscTec Pelican [42].



(c) Multirrotor con brazo robótico conformado de 1 DoF [43].



(d) Cuadrirrotor Lumenier QAV400 con manipulador de 1 DoF [44].

Figura 1.5: Manipuladores aéreos para interacción física con el medio.

objetivo de realizar tareas mucho más complejas que conlleve agarre, interacción con el medio y manipulación de objetos, es decir, sean capaces de realizar tareas activas y pasivas, cuentan con brazos robóticos de múltiples DoFs, e incluso existen trabajos que involucran sistemas con más de un brazo robótico sobre la plataforma área. En [46] diseñan un manipulador aéreo con un brazo robótico de 5 DoF colocado en la parte inferior del UAV. Estudian la dinámica en dos fases, la primera cuando el brazo robótico se encuentra en reposo, en otras palabras, únicamente en vuelo libre sin realizar movimientos del brazo robótico; y el segundo estudio es cuando el brazo se encuentra en movimiento durante la tarea. El control se realiza de forma separada, es decir, la plataforma aérea tiene su propio control de actitud y posición, mientras que el brazo robótico tiene su propio control ya que es un brazo con servos de la marca Dynamixel e internamente incorporan controladores PIDs para fijar la posición deseada. Comparan los ángulos de navegación del sistema cuando el brazo se mantiene estable y cuando el brazo robótico realiza algún movimiento. Los autores no establecen ningún modelo para realizar el control, únicamente realizan comparaciones del comportamiento del sistema (Figura 1.6a). En [47] realizan pruebas de

un manipulador aéreo con un brazo robótico de 6 DoF. Los autores obtienen el modelo cinemático del sistema en conjunto (Figura 1.6b). El modelo dinámico lo obtienen a través de la metodología de Newton-Euler. La dinámica del sistema está considerada por partes, definen el modelo dinámico de la plataforma aérea y utilizan un modelo simplificado para el brazo robótico, en conclusión, el modelo dinámico acoplado no está definido. Proponen un control servo-visual con la configuración cámara a mano y realizan pruebas experimentales en un entorno de laboratorio totalmente controlado. En [48] presentan un manipulador aéreo guiado por visión estéreo para fijar objetivos. El sistema cuenta con una plataforma aérea de tipo hexarrotor (AscTec NEO). Diseñan un brazo robótico planar de 4 DoF (Figura 1.6c). Proponen el modelo cinemático del sistema para realizar el control de la posición del extremo operativo y la orientación del hexarrotor. La configuración del brazo es fija en toda la tarea. Los autores no consideran el modelo dinámico del sistema, únicamente trabajan con la cinemática.

La ubicación del brazo robótico en la plataforma aérea puede ser colocado no solo en la parte inferior del UAV, existen manipuladores aéreos que cuentan con el brazo robótico ubicado en la parte superior de la plataforma aérea. En [49] desarrollan un sistema con un brazo robótico de 4 DoF ubicado en la parte superior de la aeronave (Figura 1.6d). Es empleado en tareas de contacto para la inspección de las superficies de puentes, el objetivo es medir las grietas y deflexiones de las vigas. Esta configuración permite que la aeronave se posicione por debajo del puente, mientras que el brazo robótico realiza la tarea de inspección. El manipulador aéreo está conformado por un octarrotor, definen la dinámica del sistema de forma conjunta, mediante un modelo reducido del brazo robótico.

Para tareas en que la plataforma aérea puede tener impacto u obstáculos en el camino para llegar al objetivo final, se plantea manipuladores aéreos con alto rango de alcance del extremo operativo, es decir, el brazo robótico cuenta con eslabones extendidos, como es el caso de [50]. Los autores emplean este tipo de manipulador aéreo ya que las hélices del UAV pueden llegar a colisionar, esto restringe la aplicación de los manipuladores aéreos. Los autores desarrollan un brazo con 2 DoF y proponen un control por fuerza (Figura 1.6e). Presentan el modelo cinemático del sistema que representa la posición del extremo operativo y el modelo dinámico que desarrollan los autores es de forma conjunta, el sistema UAV más el brazo robótico. La metodología empleada es de Euler-Lagrange para obtener un modelo en función a fuerzas y torques que actúan sobre el robot. Los comandos de referencia de control son generados por un operador externo que inyecta velocidades de referencia y fuerza. Por otro lado, en [51] presentan un

manipulador aéreo para la inspección y mantenimiento en tuberías extensas dentro de industrias de petróleo o de gas, industrias químicas, y entre otras industrias que cuentan con tuberías (Figura 1.6f). El robot está diseñado para desplazarse y aterrizar sobre las tuberías. El control implementado es realizado por partes entre la plataforma aérea y el manipulador. En [30] los autores presntan a evolución de los manipuladores aéreos, desde los primeros multirrotores con brazos simples hasta plataformas totalmente actuadas con percepción y planificación avanzada. Destaca los avances en control, interacción física y cooperación multirrobot, y señala como retos futuros la autonomía, precisión, seguridad y eficiencia energética de estos sistemas, en este se puede observar las varias aplicaciones y los resultados existentes sobre este tipo de sistema robóticos.



(a) Manipulador aéreo CSAM [46].



(b) Manipulador Aéreo con brazo de 6 DoF [47].



(c) Manipulador aéreo CARMA [48].



(d) Manipulador aéreo para la inspección de puentes [49].



(e) Manipulador aéreo de largo alcance con articulación flexible [50].



(f) Manipulador aéreo rodante para inspección de tuberías [51].

Figura 1.6: Manipuladores aéreos con brazos robóticos de múltiples DoFs.

1.3.2. Modelo y Control

Con el objetivo de llevar a cabo diferentes tareas con robots manipuladores aéreos, se han diseñado controladores que son comúnmente estudiados desde una perspectiva general, empleando la cinemática y dinámica que conforma la configuración del robot. Dependiendo del tipo de control requerido, el robot

puede ser estudiado de forma conjunta (brazo robótico más vehículo aéreo) o de forma independiente (brazo robótico y vehículo aéreo), donde los puntos de interés son dependientes de este tipo de análisis. En [52] emplean el control para posicionar el extremo operativo del robot, la posición del efector final está determinada por el cálculo de la cinemática del brazo robótico de 6 DoF, mediante la cinemática inversa del brazo obtienen los valores de las articulaciones para llegar a la posición deseada. Posteriormente realizan el control con dinámica para generar los torques de control para el sistema. El modelo cinemático del robot es obtenido de forma independiente, es decir, no se considera como un solo sistema la plataforma aérea y el brazo robótico. En [53] presentan el modelo cinemático de un manipulador aéreo con un brazo robótico de 7 DoF. El modelo cinemático define la posición y orientación del extremo operativo. Los autores obtienen el Jacobiano del sistema total que relaciona las velocidades del espacio de trabajo con las velocidades del sistema. Además, el modelo dinámico del sistema lo hacen de similar forma que en [54], donde, consideran el modelo dinámico con el centro de masa desplazado en función de la posición del brazo robótico. Por lo tanto, emplean la dinámica acoplada del sistema total. Proponen un controlador robusto para la plataforma aérea, mientras que para el brazo robótico se lo hace mediante cinemática inversa por medio de un control de posición tipo PID (Proporcional Integral Derivativo). Por otro lado, en [55] proponen el uso del manipulador aéreo con el objetivo de abrir y cerrar objetos de tipo cajón. El análisis que desarrollan los autores es de forma combinada entre el UAV y el brazo robótico para manipular el objeto que se desplaza en dirección única. El control implementado en el sistema es directamente sobre el modelo dinámico del robot. Para retroalimentar el lazo de control miden la posición del robot y estiman las velocidades en función a la posición del robot.

El modelo dinámico y cinemático de robots manipuladores aéreos están estudiados en [29]. Presentan esquemas de control y métodos para el desarrollo de modelos cinemáticos y dinámicos de manipuladores aéreos. Sin embargo, los autores trabajan al modelo dinámico en función a fuerzas y torques que interfieren sobre el sistema. Presentan múltiples trabajos y aplicaciones de los manipuladores aéreos. De igual forma en [56] presentan dos metodologías para el desarrollo de modelos dinámicos de diferentes configuraciones de los manipuladores aéreos: i) modelo dinámico por la metodología de Newton-Euler; y ii) modelo dinámico por la metodología de Euler-Lagrange. Lo modelos obtenidos están de igual manera expresados en fuerzas y torques que interfieren en el sistema completo, consideran el acoplamiento dinámico de los robots para cada

tipo de formulación. Los aportes más importantes al campo de investigación de sistemas de manipuladores aéreos con capacidad de manipulación avanzada para la inspección y el mantenimiento industrial se han hecho en proyectos como AEROARMS [57] y AEROWORKS [58], que son proyectos financiados por la Comunidad Europea. En [59] presentan un análisis exhaustivo de tipos de modelo y control de manipuladores aéreos. Los trabajos comparados presentan los modelos dinámicos en función a fuerzas y torques, pero no en función a velocidades de referencia. Sin embargo, en el análisis que realizan los autores es de gran importancia al comparar el enfoque de modelado, enfoque de control, tipo de aplicación y tarea de manipulación.

Como se pueden ver las aplicaciones de los robots aéreos cubren múltiples campos y cuentan con gran adaptabilidad al ambiente en el que desarrolla la tarea gracias a la configuración del manipulador aéreo con uno o más brazos robóticos [31, 60, 61, 62]. Este tipo de sistemas gracias a la combinación de dos sistemas robóticos, cuenta con mayor redundancia en comparación a los sistemas robóticos existentes. Mediante la redundancia del sistema es posible generar varios objetivos de control, por lo tanto, un robot manipulador aéreo puede cumplir varios objetivos de control dependiendo el número de grados de libertad que posea el brazo robótico. Generalmente el brazo robótico es colocado cerca del centro de masa de la plataforma aérea, con el propósito de evitar cambios significativos en la dinámica por la modificación de los momentos de inercia que se generan cuando el brazo realiza movimientos para cumplir con el objetivo [63].

1.3.3. Consumo de Energía

La autonomía de los robots depende de la energía requerida para ejecutar sus movimientos, especialmente en tareas que demandan alta precisión. Aunque hay estudios sobre eficiencia energética en robots aéreos, el consumo de energía en manipuladores aéreos no ha sido ampliamente investigado. En la literatura existen algunas propuestos para mejorar la eficiencia energética, tales como:

1. **Optimización de hardware:** Usar materiales ligeros y componentes más pequeños para reducir el peso [64].
2. **Locomoción multimodal:** Combinar diferentes formas de locomoción para evitar el consumo constante de energía de los motores [65, 66].

3. **Optimización de algoritmos de control:** Minimizar el consumo energético a través de trayectorias y controles eficientes [67, 68, 69].

El gasto energético en los robots aéreos es crucial porque afecta directamente su autonomía, tiempo de vuelo y eficiencia operativa. Un consumo elevado limita la duración de las misiones, especialmente en aplicaciones que requieren precisión. Optimizar el uso de energía es esencial para mejorar el rendimiento y ampliar las capacidades de estos sistemas.

1.4. Contribuciones

El uso de robots manipuladores aéreos ha cobrado gran relevancia en aplicaciones que requieren de la capacidad de agarre y la capacidad de interacción con el entorno, como en inspección remota, mantenimiento industrial y asistencia en desastres. Sin embargo, el control coordinado de este tipo de sistemas robóticos representa un gran desafío debido a su alta no linealidad, acoplamiento dinámico y la necesidad del trabajo conjunto entre el brazo robótico y la plataforma aérea. El enfoque general de este trabajo se centra en el control del extremo operativo, considerando al robot como un solo sistema (robot aéreo + brazo robótico). El controlar un sistema multi-robot como un único sistema acoplado es crucial para garantizar una operación coordinada y eficiente, entendiendo dicha coordinación como la integración conjunta de los movimientos de la plataforma aérea y del brazo robótico. Esta integración permite combinar la capacidad de desplazamiento de la plataforma aérea, con la precisión del brazo robótico para agarre y manipulación de objetos.

En este contexto, esta tesis doctoral presenta avances fundamentales en el control coordinado de manipuladores aéreos, abordando limitaciones presentes respecto a los enfoques tradicionales y proponiendo soluciones innovadoras que mejoran el desempeño, la eficiencia energética y la precisión en la manipulación de objetos con el uso de robots Manipuladores Aéreos (MA). Las principales contribuciones de esta investigación son las siguientes:

1.4.1. Modelos Matemáticos Acoplados

Uno de los principales desafíos en el control de robots manipuladores aéreos se enfoque en la correcta representación de su modelo matemático.

1.4.1.1. Cinemática Acoplada

Se presenta la formulación matemática que describe la relación entre las coordenadas articulares del manipulador (plataforma aérea + brazo robótico) y la posición y orientación del extremo operativo en el espacio de trabajo. En esta tesis doctoral, se propone un modelo cinemático directo, donde se establece al extremo operativo del robot como punto de interés a controlar en lugar del centro de masa de la plataforma aérea. Mediante esto, se obtiene una mejor representación del comportamiento del sistema en tareas de manipulación, facilitando el desarrollo de estrategias de control más efectivas. Tomando en cuenta el acoplamiento entre la cinemática de la plataforma aérea y la del brazo robótico, lo que implica una transformación adicional desde el marco de referencia del hexarrotor hasta el extremo operativo del brazo robótico.

A partir de la cinemática directa, se obtiene la cinemática diferencial, que representa la relación entre las velocidades de las articulaciones y la velocidad del extremo operativo. La relación se describe por medio de la matriz Jacobiana, que en este caso tiene dimensión $m \times n$, donde $m > n$, lo que indica que es un sistema altamente redundante, es decir, el número total de grados de libertad del sistema robótico m (plataforma aérea + brazo) es mayor que las dimensiones del espacio de trabajo del extremo operativo n. El modelo presentado proporciona la suficiente información para la implementación de estrategias de control basadas en la cinemática del sistema, asegurando precisión en la ejecución de tareas y el trabajo coordinado entre la plataforma aérea y brazo robótico.

1.4.1.2. Dinámica Acoplada en Función a Velocidades

El aporte fundamental en modelación de manipuladores aéreos es la formulación matemática de un modelo dinámico acoplado basado en la metodología de Euler-Lagrange, el cual se diferencia de los modelos tradicionales al estar expresado en términos de velocidades de referencia en lugar de fuerzas y torques.

El modelo considera el acoplamiento dinámico entre la plataforma aérea y el brazo robótico, lo cual es esencial para lograr una descripción precisa y efectiva del comportamiento conjunto del sistema (plataforma aérea + brazo robótico), en comparación con los enfoques que tratan ambos subsistemas de forma independiente (plataforma aérea y brazo robótico). Al ser un modelo acoplado, permite describir cómo los movimientos del brazo robótico afectan la estabilidad y el control de la plataforma aérea, y viceversa, cómo las acciones de la plataforma aérea influyen en la operación precisa del brazo robótico. Dado que el brazo robótico está montado en la plataforma aérea, sus movimientos afectan directamente su comportamiento, modificando tanto su posición como su trayectoria. A su vez, la plataforma aérea influye en los movimientos del brazo robótico, ya que debe mantener su estabilidad (equilibrio) mientras ejecuta una tarea con el extremo operativo. El acoplamiento dinámico es descrito mediante ecuaciones que capturan las interacciones entre las fuerzas, torques y momentos de ambos subsistemas, asegurando el trabajo coordinado para alcanzar los objetivos deseados de la tarea.

A diferencia de los modelos tradicionales, donde las ecuaciones dinámicas se expresan en términos de fuerzas y torques, este modelo describe la evolución del manipulador aéreo en función de velocidades de referencia, lo que permite definir el comportamiento dinámico del sistema sin la necesidad de calcular explícitamente estas variables. Además, como la mayoría de los controladores trabajan directamente con velocidades deseadas, este enfoque se adapta mejor a los esquemas de control modernos, evitando la necesidad de estimar fuerzas externas o dinámicas internas complejas, reduciendo la dependencia de sensores adicionales y simplificando el diseño de controladores.

Ademas, esta representación resulta ser clave, ya que facilita la simulación y validación de controladores. Dicho de otro modo, al tener la dinámica del robot en términos de velocidades, la integración numérica del sistema se vuelve más eficiente y estable, permitiendo simulaciones semejantes al comportamiento real del robot en entornos de simulación. Esto facilita la ejecución de pruebas previas a la experimentación real, optimizando parámetros de control y ajustando con mayor precisión el comportamiento del manipulador aéreo antes de su despliegue en un entorno real.

1.4.2. Estrategia de Ahorro Energético

Dado que los robots manipuladores aéreos suelen trabajar en entornos donde la eficiencia energética es crucial, resulta clave optimizar su consumo energético con el propósito de maximizar su autonomía. Además, a diferencia de los robots manipuladores móviles terrestres, estos sistemas robóticos deben mantenerse en el aire mientras ejecutan las tareas asignadas, lo que genera un alto consumo energético ocasionado por el esfuerzo continuo que tiene que realizar el robot. En efecto, una gestión eficiente del consumo energético es esencial para prolongar el tiempo de operación y mejorar la viabilidad de aplicaciones en inspección, rescate, mantenimiento industrial y otras tareas en entornos de difícil acceso.

En consecuencia, otro aporte de este trabajo es una estrategia innovadora enfocada a la optimización del consumo energético para robots manipuladores aéreos, la estrategia aprovecha la característica que poseen estos robots que es su alta redundancia. Esta característica permite definir y cumplir con diversas configuraciones internas que permitan optimizar el uso de los actuadores sin afectar la tarea principal del robot. Como el sistema cuenta con más grados de libertad de los estrictamente necesarios para ejecutar una tarea específica, es posible redistribuir el esfuerzo entre la plataforma aérea y el brazo robótico, reduciendo la carga energética de la plataforma sin comprometer la precisión ni el desempeño del manipulador aéreo para ejecutar tareas.

La estrategia de control propuesta está diseñada en función de la naturaleza de la tarea, en otras palabras, se define matemáticamente configuraciones deseadas para el robot en función de la tarea a ejecutar. Una configuración para tareas que requieren movimientos en el eje-Z, donde se prioriza el uso del brazo robótico para ejecutar los desplazamientos verticales, evitando la necesidad de ajustar la altitud de la plataforma aérea y reduciendo el consumo energético asociado a la generación de sustentación adicional. Para movimientos sobre el plano-XY, donde el brazo robótico realice desplazamientos laterales y longitudinales sin alterar la posición de la plataforma aérea, disminuyendo así el esfuerzo requerido para su estabilización. Por último, para los movimientos en el espacio XYZ, la plataforma aérea y el brazo robótico trabajan de manera conjunta y eficiente en los desplazamientos tridimensionales.

La estrategia garantiza que la redistribución del esfuerzo entre ambos subsistemas minimice el consumo de energía sin afectar el desempeño de la tarea principal. Al reducir la carga energética sobre la plataforma, se facilita la ejecución de tareas

prolongadas, aumentando la autonomía del robot.

1.4.3. Control No Lineal Unificado en Cascada

En el control de manipuladores aéreos, se han desarrollado diversas propuestas para abordar los problemas asociados con el control de movimiento. Los métodos tradicionales suelen centrarse solo en la cinemática del robot o se enfocan de manera separada en la dinámica de la plataforma aérea y el brazo robótico. Sin embargo, los controladores en cascada han demostrado ser una solución eficaz en sistemas robóticos complejos, ya que permiten descomponer el control en dos bloques, uno para el control cinemático y otro para el controlo con dinámica. La segmentación de estos enfoques permite un manejo más eficiente de la interacción entre los subsistemas, donde el control cinemático se encarga de gestionar las tareas específicas del manipulador aéreo para el control de movimiento, mientras que el control dinámico se dedica a compensar las perturbaciones así como también las fuerzas y momentos que afectan al sistema. De esta manera, ambos esquemas trabajan de forma conjunta para garantizar un control preciso y estable, optimizando la ejecución de las tareas sin comprometer el rendimiento del manipulador aéreo.

Por lo tanto, en esta tesis se presenta un esquema de control unificado en cascada para manipuladores aéreos, el cual está conformado por dos bloques:

1. Control Cinemático No Lineal Unificado.
2. Control de Compensación Dinámica en Cascada.

1.4.3.1. Control Cinemático No Lineal Unificado

El control cinemático no lineal se encarga de generar las velocidades de referencia necesarias para posicionar y orientar el extremo operativo del manipulador aéreo. El control cinemático no lineal permite resolver los tres problemas de control de movimiento por medio de una única ley de control, en otras palabras, una ley de control unificada que permite cumplir con el control de posición, el control de seguimiento de trayectorias y el control de seguimiento de camino del robot manipulador aéreo; todo esto mediante la modificación de las referencias de entrada del controlador. Por otro lado, como el robot resulta ser un

sistema altamente redundante, el esquema propuesto permite integrar objetivos secundarios de control, como el caso del ahorro de energía, la maximización de manipulabilidad del brazo robótico, evitar que el brazo robótico entre en configuraciones de singularidad, evasión de obstáculos, la distribución eficiente de esfuerzos en los actuadores, ente otros objetivos de control.

1.4.3.2. Control de Compensación Dinámica en Cascada

El control de compensación dinámica en cascada permite compensar la dinámica del robot en tiempo real, asegurando la estabilidad y precisión durante la ejecución de los movimientos generados por el control cinemático no lineal. Este compensador dinámico opera como un segundo nivel de control, ajusta las señales de control en función de las perturbaciones inducidas por el entorno y por las fuerzas y torques que se generan por la interacción entre la plataforma aérea y el brazo robótico, permitiendo ajustar en tiempo real la señal de referencia para que los actuadores logren mantener la estabilidad del sistema, incluso bajo condiciones dinámicas complejas. De este modo, garantiza que el manipulador aéreo no solo cumpla con las tareas cinemáticas, sino que también responda adecuadamente a las variaciones del entorno, mejorando la precisión del movimiento y asegurando un control estable durante toda la operación.

Cabe destacar que, para el desarrollo del esquema de control propuesto, se emplea la teoría de métodos numéricos avanzados, lo que permite una solución eficiente de las ecuaciones de control en tiempo real, facilitando una integración estable del sistema, reduciendo la carga computacional y mejorando la precisión de las respuestas del manipulador aéreo. Gracias a esta aproximación, el esquema propuesto se adapta a diversas arquitecturas de control y facilita su implementación en hardware.

1.4.4. Control Servo-Visual Bioinspirado

El control servo visual para agarre y manipulación de objetos mediante robots aéreos es un enfoque innovador que combina la percepción visual con técnicas avanzadas de control para lograr una interacción precisa y eficiente con objetos en un entorno real. Este tipo de control permite que el robot aéreo utilice cámaras o sensores visuales para identificar y seguir objetivos, ajustando sus movimientos en tiempo real para realizar tareas de agarre y/o manipulación con alta precisión.

En función de esto, se presenta un innovador esquema de control Servo Visual Biológicamente Inspirado en el comportamiento de las aves para agarrar a sus objetivos.

Como se tiene conocimiento, el método de caza usado por las aves de rapiña presenta grandes ventajas como su alta precisión y adaptabilidad, dado que estos animales mantienen un control preciso y estable al atrapar presas incluso en entornos turbulentos. Un robot aéreo con control bioinspirado puede lograr un desempeño similar en condiciones de vuelo dinámicas o inestables, como vientos fuertes o movimientos impredecibles del objetivo. Además, este enfoque adopta las características optimizadas de las aves, particularmente en su capacidad para realizar movimientos precisos y coordinados con sus garras durante la captura y manipulación de presas. Los aspectos clave de esta contribución se centran en:

- Control servo visual basado en un sistema de visión artificial avanzada, que permite al robot manipulador aéreo detectar, buscar y calcular las posiciones de los objetivos en tiempo real. Una vez que el objetivo ha sido identificado y seguido, el sistema de control ajusta las señales de maniobrabilidad del robot de forma autónoma para asegurar un agarre preciso y eficiente, tal como lo haría el mecanismo de las garras de un águila. La combinación de visión computacional y control del manipulador no solo mejora la exactitud, sino que también facilita la manipulación autónoma de objetos en situaciones donde la percepción visual es crucial, como en entornos no estructurados o con información sensorial limitada.

- El robot es capaz de realizar ajustes en tiempo real según la retroalimentación visual que recibe del entorno. Esto le permite reaccionar de manera eficiente ante perturbaciones inesperadas o cambios en la posición del objetivo. Al igual que un águila ajusta su vuelo y fuerza de agarre mientras captura su presa, el robot ajusta constantemente su comportamiento, garantizando estabilidad y control durante la manipulación.

- Dado que el robot realiza movimientos complejos mientras mantiene su equilibrio, el sistema de control optimiza la interacción entre la visión, la dinámica del vuelo y el agarre. Esto permite que el robot mantenga la estabilidad en condiciones de vuelo dinámicas, como cambios en la altitud, vientos o movimientos inestables de los objetos que está manipulando.

- Por último, este método biológico inspirado no solo optimiza la precisión

y la flexibilidad en la manipulación de objetos, sino que también incorpora un enfoque eficiente en términos de consumo energético. Las aves, como las rapaces, son un excelente ejemplo de optimización energética en la naturaleza. Su capacidad para realizar vuelos prolongados, maniobras complejas y agarres precisos se logra sin desperdiciar energía. Esto se debe a sus adaptaciones evolutivas que permiten un uso eficiente de los recursos energéticos, especialmente durante procesos de caza y captura. El robot aéreo al igual que las aves, debe ser capaz de ejecutar maniobras complejas de agarre y manipulación sin un consumo energético excesivo. La clave radica en el diseño de un sistema de control que permita realizar estos movimientos de manera eficiente, minimizando el uso de energía durante el proceso de captura y manipulación de objetos.

Además, al utilizar un esquema de control en cascada, donde el control cinemático y dinámico se gestionan de forma independiente pero coordinada entre sí, se facilita la compensación de perturbaciones y se reduce la necesidad de ajustar constantemente los parámetros del sistema. Esto también contribuye a una mayor eficiencia energética, ya que permite que el robot mantenga un control preciso sin realizar ajustes innecesarios que consuman más recursos.

En conjunto, estas contribuciones representan un avance significativo en el campo del control de manipuladores aéreos, proporcionando soluciones prácticas y eficientes para aplicaciones en la industria 4.0, robótica de servicio, logística, inspección y rescate, entre otras. La combinación de control cinemático, control dinámico, eficiencia energética y técnicas de control servo visual posiciona esta investigación como un referente en el desarrollo de sistemas robóticos aéreos autónomos y precisos.

1.5. Objetivos

1.5.1. Objetivo General

Disponer de estrategias y algoritmos de control avanzado en base al modelo cinemático y al modelo dinámico de un robot manipulador aéreo, con uso de diversos sensores, que permitan resolver problemas de navegación autónoma cumpliendo objetivos primarios y secundarios de control enfatizando en la efi-

ciencia energética. El robot manipulador aéreo es considerando como un solo sistema acoplado entre la plataforma aérea de ala rotativa y un brazo robótico.

1.5.2. Objetivos Específicos

- Obtener los modelos cinemático y dinámico de un robot manipulador aéreo que represente las características y restricciones de movimiento, conformado por un UAV y un brazo robótico a fin de implementar algoritmos de control avanzado, que sea apto para el diseño de controladores.

- Disponer de estructuras y algoritmos de control basados en los modelos cinemático y dinámico del robot manipulador aéreo, para ejecutar tareas autónomas de control de posición, seguimiento de trayectorias y seguimiento de caminos definidas en espacios de trabajo parcialmente estructurados. Las estructuras de control deberán contemplar el problema de ahorro de energía y control de redundancia del sistema robótico, con su respectivo análisis de estabilidad y robustez del comportamiento de los errores de control.

- Obtener un esquema de control servo visual con configuración cámara en mano para un robot manipulador aéreo, con el propósito de ejecutar tareas autónomas de seguimiento de objetivos en espacio de trabajo parcialmente estructurado de tres dimensiones.

- Obtener la validación experimental de los esquemas de control propuestos a nivel de laboratorio, con el robot manipulador aéreo disponible en el laboratorio de investigación de Automatización Robótica y Sistemas Inteligentes ARSI.

1.6. Difusión de los aportes de investigación

Los resultados obtenidos a lo largo del desarrollo de esta tesis doctoral han sido difundidos mediante publicaciones en revistas científicas indexadas y congresos internacionales de alto reconocimiento en las áreas de robótica y control. Estas contribuciones han permitido validar experimentalmente los desarrollos teóricos

propuestos, así como posicionar los avances alcanzados dentro del estado del arte actual. La difusión de los aportes ha tenido como objetivo principal fortalecer el intercambio académico, fomentar la replicabilidad de los resultados y promover la colaboración en futuras líneas de investigación sobre el control de manipuladores aéreos.

1.6.1. Publicaciones en revistas indexadas

- **Carvajal, C. P.**, Andaluz, V. H., Roberti, F., Varela-Aldás, J., & Carelli, R. (2025). *Servo-Visual Bio-Inspired Control for Aerial Target Grasping with an Aerial Manipulator in Aerial-Eye-To-Hand Configuration*. Nonlinear Dynamics, (*revisión*).
- **Carvajal, C. P.**, Andaluz, V. H., Chicaiza, F., Roberti, F., Varela-Aldás, J., & Carelli, R. (2025). *Teleoperation of Aerial Manipulators with Passivity-Based Haptic Feedback Activated by Vision*. In *Proceedings of the 2025 IEEE International Conference on Advanced Robotics (ICAR 2025)*, San Juan, Argentina. (Aceptado).
- **Carvajal, C. P.**, Andaluz, V. H., Roberti, F., Palacios-Navarro, G., & Carelli, R. (2024). *Multitask Control of Aerial Manipulator Robots with Dynamic Compensation Based on Numerical Methods*. Robotics and Autonomous Systems, 173, 104614.
- **Carvajal, C. P.**, Andaluz, V. H., Varela-Aldás, J., Roberti, F., Del-Valle-Soto, C., & Carelli, R. (2024). *Visual servoing using sliding-mode control with dynamic compensation for UAVs' tracking of moving targets*. Drones, **8**(12), 730.
- **Carvajal, C. P.**, Andaluz, V. H., Roberti, F., & Carelli, R. (2022). *Path-following control for aerial manipulators robots with priority on energy saving*. Control Engineering Practice, 131, 105401.
- **Carvajal, C. P.**, Andaluz, V. H., Roberti, F., & Carelli, R. (2022). *Control Desacoplado de Robots Manipuladores Aéreos para Seguimiento de Caminos*. En *XI Jornadas Argentinas de Robótica (JAR 2022)*.
- **Carvajal, C. P.**, Andaluz, V. H., Roberti, F., & Carelli, R. (2021). *Implementación y Control de un Manipulador Aéreo*. En *XVIII Reunión de Trabajo en*

Procesamiento de la Información y Control (RPIC 2021).

- **Carvajal, C. P.**, Andaluz, V. H., Roberti, F., & Carelli, R. (2020). *Optimal Trajectory Tracking Control for a UAV Based on Linearized Dynamic Error*. Trends in Artificial Intelligence Theory and Applications. Artificial Intelligence Practices, Lecture Notes in Computer Science, 12144, 83–96.

- Recalde, L. F., Guevara, B. S., **Carvajal, C. P.**, Andaluz, V. H., Varela-Aldás, J., & Gandolfo, D.C. (2022). *System Identification and Nonlinear Model Predictive Control with Collision Avoidance Applied in Hexacopters UAVs*. Sensors, 22, 4712.

- Pantusín, F. J., **Carvajal, C. P.**, Ortiz, J. S., & Andaluz, V. (2024). *Virtual teleoperation system for mobile manipulator robots focused on object transport and manipulation*. Technologies, **12**(9), 146.

- Andaluz, V. H., **Carvajal, C. P.**, Granizo, J., Varela-Aldas, J., Proaño, L. E., & Pérez, D. (2022). *OMNIBEE: Autonomous Omnidirectional Robot for Service Robotics Applications*. En X.-S. Yang, S. Sherratt, N. Dey, & A. Joshi (Eds.), Proceedings of the Seventh International Congress on Information and Communication Technology (pp. 389–400). Lecture Notes in Networks and Systems, vol. 464. Springer, Singapore.

1.6.2. Participación en congresos y jornadas científicas

- **III Congreso de Ciencias Exactas Aplicadas a la Ingeniería – 2022**, Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE, sede Latacunga, 2022. La conferencia presentada tuvo por título *"Modelación matemática de robots aéreos y diseño de controladores basado en métodos numéricos"*.

- **XI Jornadas Argentinas de Robótica (JAR 2022)**. En el congreso se presentó el artículo *"Control Desacoplado de Robots Manipuladores Aéreos para Seguimiento de Caminos"*.

- **Evento de difusión científica ESPE Investiga - 2021**. Departamento de Eléctrica y Electrónica de la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE, sede Latacunga. La conferencia presentada tuvo por título *"Sistema Colaborativo de Robots Manipuladores Aéreos"*

- **XVIII Reunión de Trabajo en Procesamiento de la Información y Control (RPIC 2021)**. En este congreso se presentó el trabajo titulado *"Implementación y Control de un Manipulador Aéreo"*.

1.7. Estructura de la Tesis

La presente tesis se encuentra organizada en cinco capítulos principales y un conjunto de apéndices que respaldan el desarrollo técnico y experimental del trabajo. A continuación, se describe brevemente el contenido de cada capítulo y apéndice:

- Capítulo 1 – ***Introducción:*** Presenta el contexto general de la investigación, incluyendo los antecedentes, la motivación, los objetivos y la justificación del estudio. Se establece la relevancia del uso de manipuladores aéreos en tareas complejas, así como la necesidad de controladores eficientes para mejorar su desempeño.

- Capítulo 2 – ***Modelo de Robots:*** Se desarrolla el modelo cinemático del hexarrorro, del brazo robótico y del manipulador aéreo considerando como punto de control el extremo operativo del robot. Se obtiene la cinemática directa y la cinemática diferencial, abordando la redundancia cinemática y su implicancia en el control.

- Capítulo 3 – ***Control para Manipuladores Aéreos con Prioridad en el Ahorro de Energía:*** Se propone un esquema de control cinemático que aprovecha la redundancia del sistema para lograr el seguimiento de caminos mientras se optimiza el consumo energético. Se presentan validaciones experimentales que demuestran la efectividad del esquema de control propuesto.

- Capítulo 4 – ***Control Multitarea con Compensación Dinámica Basado en Métodos Numéricos:*** Se desarrolla un controlador multitarea con compensación dinámica para mejorar la precisión en la ejecución de tareas de posicionamiento, seguimiento de trayectoria y seguimiento de caminos. El esquema se fundamenta en la utilización del modelo dinámico del robot discretizado.

- Capítulo 5 – ***Control Servo-Visual Bioinspirado para el Agarre Aéreo de Objetivos en Movimiento:*** Se diseña e implementa un esquema de control servo-visual basado en percepción visual, orientado al seguimiento y captura de objetivos móviles bioinspirado en la técnica de agarre aéreo de las aves de rapiña.

- **Conclusiones:** Resume los principales hallazgos y aportes de la investigación, y propone futuras líneas de trabajo enfocadas en mejorar la robustez y el control autónomo de los manipuladores aéreos (MA).

Apéndices

- Apéndice A – ***Robot Manipulador Aéreo:*** Detalla el diseño, construcción e integración de la plataforma robótica utilizada para la validación experimental de los esquemas de control propuestos en esta tesis doctoral.

- Apéndice B – ***Redundancia en Robótica:*** Explica los tipos de redundancia y su importancia en el diseño de controladores.

- Apéndice C – ***Análisis de Manipulabilidad:*** Describe el análisis de manipulabiidad del Manipulador Aéreo, con el objetivo de identificar el rango de configuraciones articulares que permiten ejecutar tareas optimizando la capacidad de movimiento del brazo robótico. Este análisis permite evitar configuraciones cercanas a la singularidad y mejorar el rendimiento del sistema en escenarios con restricciones cinemáticas.

- Apéndice D – ***Propiedades del Modelo Dinámico:*** Presenta las propiedades fundamentales del modelo dinámico.

- Apéndice E – ***Modelo Dinámico Completo:*** Expone las ecuaciones completas del modelo dinámico en función de fuerzas y torques, y en función a velocidades de referencia, incluyendo la estructura matricial y vectorial de cada modelo.

- Apéndice F – ***Identificación y Validación Dinámica:*** Explica el procedimiento experimental de identificación de parámetros y validación del modelo dinámico del sistema en condiciones reales.

CAPÍTULO 2

Modelo de Robots

2.1. Introducción

El control de movimiento de un robot es un conjunto de algoritmos y técnicas utilizados para ejecutar los movimientos de las partes que lo constituyen, como sus articulaciones, motores y actuadores. A través del esquema de control, se garantiza que el robot realice la tarea deseada de manera precisa y segura. Para diseñar el control de movimiento del extremo operativo de un robot, es indispensable realizar un análisis detallado de las características del robot, tales como la estructura mecánica, los actuadores, los sensores, las restricciones de movimiento, los límites de las articulaciones, entre otras características, que definen su comportamiento. Este análisis tiene como objetivo la obtención de ecuaciones matemáticas que describen dicho comportamiento, las cuales constituyen el modelo del robot. Por lo tanto, obtener el modelo de un robot manipulador aéreo es un requisito fundamental para desarrollar esquemas de control de movimiento que permitan ejecutar tareas con precisión a través del efector final del robot.

En este capítulo, presentamos el modelo cinemático de un manipulador aéreo, donde el punto de interés a controlar es el extremo operativo. Es decir, se considera al robot como un único sistema compuesto por una plataforma aérea y un brazo robótico. Además, proponemos un nuevo modelo dinámico para un robot manipulador aéreo que, a diferencia de trabajos anteriores o modelos tradicionales, emplea velocidades de referencia como señales de control para el sistema [70, 71]. Este enfoque es comúnmente utilizado en robots comerciales. Asimismo, el modelo dinámico presenta una estructura adecuada para el diseño de diversas estrategias de control basadas en la dinámica.

El capítulo se organiza en seis secciones. En la segunda sección, se presenta el modelo cinemático de una plataforma aérea. La tercera sección se presenta el modelo cinemático de un brazo robótico. La cuarta sección se presenta el modelo cinemático completo del manipulador aéreo. En la quinta sección, se propone un nuevo modelo dinámico para el sistema del manipulador aéreo, el cual emplea velocidades de referencia como señales de control. Por último, en la sexta sección, se introduce el modelo de proyección de una cámara de visión, enfocado en aplicaciones de control visual.

2.2. Plataforma Aérea

Una plataforma aérea o UAV (Unmanned Aerial Vehicle) es un vehículo aéreo no tripulado que puede volar de manera autónoma, semi-autónoma o tele-dirigida. Estas plataformas están equipadas con una variedad de sensores y tecnologías que les permiten realizar diversas tareas. Su principal característica es que no cuenta con restricciones de movimiento, es decir, se puede desplazar en el espacio tridimensional sin problema alguno.

2.2.1. Configuración Cinemática de un Robot Aéreo

Dado que un robot aéreo se desplaza en el espacio tridimensional, en la Figura 2.1 se presenta un esquema de la configuración del robot aéreo. Sea $\mathcal{F}_{\mathrm{w}} = \{\mathcal{W}, X, Y, Z\}$ el marco referencial fijo del robot aéreo, donde $\mathcal{W}$ es el origen del

sistema de referencia; y $\mathcal{F}_{\mathrm{u}} = \{\mathcal{U}, X_F, Y_L, Z_E\}$ como el sistema de referencia móvil de la plataforma aérea, donde el origen del marco de referencia móvil $\mathcal{U}$ está ubicado en el centro de masa del robot aéreo.

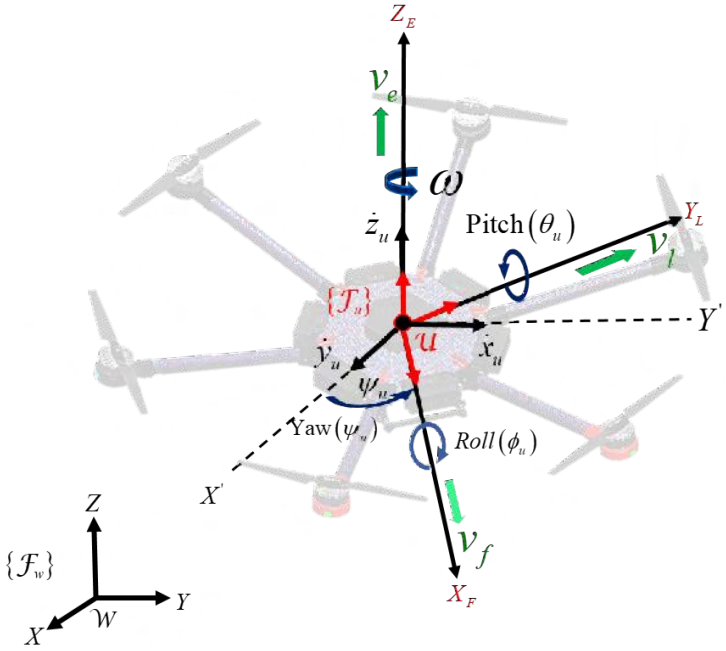


Figura 2.1: Configuración cinemática del UAV en el sistema de referencia fijo $\{\mathcal{F}_{\mathrm{w}}\}$.

Por tanto, se define al vector $\mathbf{p_u}\,(t) \in \mathbb{R}^{m_{pu}}$ como la posición de la plataforma aérea respecto al origen del sistema de referencia fijo, con $m_{pu} = 3$, conformado por:

$$\mathbf{p_u}\,(t) = \begin{bmatrix} x_u\,(t) \\ y_u\,(t) \\ z_u\,(t) \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

También se define el vector $\mathbf{o_u}\,(t) \in \mathbb{R}^{m_{ou}}$ que describe la rotación del UAV con respecto al sistema de referencia fijo, donde, $m_{ou} = 3$ y está representado por los ángulos de navegación de alabeo o rolido (Roll ϕ_u), cabeceo (Pitch θ_u) y de

guiñada (Yaw ψ_u), conocidos también como los ángulos de euler, de tal forma que:

$$\mathbf{o_u}\left(t\right) = \begin{bmatrix} \phi_u\left(t\right) \\ \theta_u\left(t\right) \\ \psi_u\left(t\right) \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

La matriz de rotación que representa el movimiento alrededor de los ejes del sistema de referencia fijo $\{\mathcal{F}_{\mathrm{w}}\}$ es obtenida a través de los ángulos de navegación del robot. Ahora, sea $\mathbf{R_x}(\phi_u) \in SO(3)$, la matriz de rotación alrededor del eje-X definida como:

$$\mathbf{R_x}(\phi_u) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\left(\phi_u\right) & -\sin\left(\phi_u\right) \\ 0 & \sin\left(\phi_u\right) & \cos\left(\phi_u\right) \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

$\mathbf{R_y}(\theta_u) \in SO(3)$ la matriz de rotación alrededor del eje-Y definida por:

$$\mathbf{R_y}(\theta_u) = \begin{bmatrix} \cos\left(\theta_u\right) & 0 & \sin\left(\theta_u\right) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\left(\theta_u\right) & 0 & \cos\left(\theta_u\right) \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

y $\mathbf{R_z}(\psi_u) \in SO(3)$ la matriz de rotación alrededor del eje-Z dada por:

$$\mathbf{R_z}(\psi_u) = \begin{bmatrix} \cos\left(\psi_u\right) & -\sin\left(\psi_u\right) & 0 \\ \sin\left(\psi_u\right) & \cos\left(\psi_u\right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

Entonces, la matriz de transformación entre el marco referencial fijo $\{\mathcal{F}_{\mathrm{w}}\}$ y el marco referencial móvil de la plataforma aérea $\{\mathcal{F}_{\mathrm{u}}\}$ está determinada por $\mathbf{R_u}\left(\varphi_u\right) = \mathbf{R_z}\left(\psi_u\right)\mathbf{R_y}\left(\theta_u\right)\mathbf{R_x}(\phi_u)$, por lo tanto, se obtiene:

$$\mathbf{R_u}\left(\varphi_u\right) = \begin{bmatrix} c_{\psi_u}c_{\theta_u} & c_{\psi_u}s_{\theta_u}s_{\phi_u} - s_{\psi_u}c_{\phi_u} & c_{\psi_u}s_{\theta_u}c_{\phi_u} + s_{\psi_u}s_{\phi_u} \\ s_{\psi_u}c_{\theta_u} & s_{\psi_u}s_{\theta_u}s_{\phi_u} + c_{\psi_u}c_{\phi_u} & s_{\psi_u}s_{\theta_u}c_{\phi_u} - c_{\psi_u}s_{\phi_u} \\ -s_{\theta_u} & c_{\theta_u}s_{\phi_u} & c_{\theta_u}c_{\phi_u} \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

Las abreviaciones usadas en la Ecuación (2.6) representan a $c_\alpha = \cos\left(\alpha\right)$ y $s_\alpha = \sin\left(\alpha\right)$.

2.2.2. Caso de Estudio

Las coordenadas operacionales de un robot aéreo se refieren al vector que se utiliza para detallar la posición y orientación del punto de interés a controlar del

robot en el sistema de referencia fijo $\{\mathcal{F}_{\mathrm{w}}\}$. Estas coordenadas operacionales o punto de interés están definidas en función a las coordenadas independientes del robot $\mathbf{q_u}$. El punto de interés a controlar puede ser uno de los siguientes:

- La ubicación del centro de masa del robot.
- La posición de un sensor ubicado sobre el robot.
- Posición arbitraria dependiente de la tarea a realizar.

Estos ejemplos permiten especificar claramente el punto de control del robot en función de la aplicación o tarea que se desea ejecutar.

Observación 1 *Considerando el punto de interés a controlar el centro de masa del robot, en consecuencia, las coordenadas de operación del robot están ubicadas en $\{\mathcal{F}_{\mathrm{u}}\}$, por tanto, las coordenadas independientes del sistema coinciden con las coordenadas operacionales.*

2.2.2.1. Cinemática Directa

La cinemática directa describe las coordenadas operacionales del robot, tanto en posición como en orientación, en el sistema de referencia fijo $\{\mathcal{F}_{\mathrm{w}}\}$, en función de sus articulaciones $\mathbf{q_u}$ (coordenadas independientes).
Sea $\mathbf{q_u} \in \mathbb{R}^4$ el vector de coordenadas independientes, definido como:

$$\mathbf{q_u}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{p_u}(t) \\ \psi_u(t)) \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

donde, $\mathbf{p_u}(t) \in \mathbb{R}^3$ es el vector de posición del centro de masa de la plataforma aérea dentro del sistema de referencia fijo $\{\mathcal{F}_{\mathrm{w}}\}$; y $\psi_u(t)$ representa la rotación (Yaw) del robot alrededor del eje-Z. Entonces, el vector de coordenadas operacionales se define como:

$$\mathbf{q_u}\,(t) = \begin{bmatrix} x_u\,(t) \\ y_u\,(t) \\ z_u\,(t) \\ \psi_u\,(t) \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

2.2.2.2. Coordenadas Actuadas y Directamente Actuadas del Hexarrotor

En el presente caso de estudio, el hexarrotor cuenta por coordenadas independientes $\mathbf{q_u} = \begin{bmatrix} x_u & y_u & z_u & \psi_u \end{bmatrix}^\intercal$, posición y guiñada en $\{\mathcal{F}_\mathrm{w}\}$; mientras que las señales para realizar el control son las ***velocidades de maniobrabilidad*** del cuerpo $\mathbf{v_u} = \begin{bmatrix} v_f & v_l & v_e & \omega \end{bmatrix}^\intercal$ en $\{\mathcal{F}_\mathrm{u}\}$. Con esta interfaz de control, z_u y ψ_u son variables ***directamente actuadas*** porque $\dot{z}_u = v_e$ y $\dot{\psi}_u = \omega$ dependen directamente de las entradas de control. Mientras que, x_u e y_u son ***indirectamente actuadas***, pues sus derivadas se generan a partir de las velocidades longitudinal y lateral definidas en el marco móvil del hexarrotor y se proyectan al marco inercial mediante $\mathbf{R_z}(\psi_u)$, como se muestra en la Ecuación (2.18).

2.2.2.3. Cinemática Diferencial

La cinemática diferencial relaciona las velocidades de maniobrabilidad del robot con las velocidades del punto de operación, o velocidades de las coordenadas operacionales. Ahora, sea $\dot{\mathbf{q}}_\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^4$ el vector de velocidades del punto de operación del UAV en $\{\mathcal{F}_\mathrm{w}\}$. El cual es obtenido mediante la derivada temporal de Ecuación (2.7):

$$\dot{\mathbf{q}}_\mathbf{u}(t) = \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \mathbf{p_u}(t) \\ \psi_u(t)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}_\mathbf{u}(t) \\ \dot{\psi}_u(t)) \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

donde, $\dot{\mathbf{p}}_\mathbf{u}(t)$ es la velocidad lineal del punto de operacion del robot, dado por:

$$\dot{\mathbf{p}}_\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_u(t) \\ \dot{y}_u(t) \\ \dot{z}_u(t) \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

donde, $\dot{x}_u(t)$, $\dot{y}_u(t)$ y $\dot{z}_u(t)$ son las velocidades lineales del UAV en los ejes X-Y-Z, respectivamente, en el sistema de referencia fijo $\{\mathcal{F}_\mathrm{w}\}$; y $\omega(t)$ es la velocidad angular del robot alrededor del eje-Z. Por lo tanto,

$$\dot{\mathbf{q}}_\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_u(t) \\ \dot{y}_u(t) \\ \dot{z}_u(t) \\ \dot{\psi}_u(t) \end{bmatrix} \tag{2.11}$$

El robot aéreo empleado en este trabajo cuenta con cuatro velocidades de maniobrabilidad que permiten al robot desplazarse en el espacio de trabajo. Donde, tres son velocidades lineales y una es velocidad angular. Con el objetivo de representar la velocidad lineal del punto de operación de la plataforma aérea $\dot{\mathbf{p}}_{\mathbf{u}}(t)$ en función de las velocidades lineales de maniobrabilidad (velocidades en el sistema de referencia móvil $\{\mathcal{F}_{\mathrm{u}}\}$) se utiliza la siguiente expresión:

$$\dot{\mathbf{p}}_{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{R}\left(\varphi_u\right) \begin{bmatrix} v_f \\ v_l \\ v_e \end{bmatrix} \tag{2.12}$$

donde, $\mathbf{R}\left(\varphi_u\right)$ es la matriz de rotación del marco móvil respecto al marco fijo definida en la Ecuación (2.6). Mientras que la velocidad de rotación resulta:

$$\dot{\psi}_u(t) = \omega(t) \tag{2.13}$$

Por lo tanto, el vector de velocidad del punto de operación del UAV está dado por:

$$\dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{u}}(t) = \overbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{R}\left(\varphi_u\right) & \mathbf{0}_{3\times 1} \\ \mathbf{0}_{1\times 3} & 1 \end{bmatrix}}^{\mathbf{J}_{\mathbf{u}}(\varphi_u)} \mathbf{v}_{\mathbf{u}}\left(t\right) \tag{2.14}$$

donde, $\mathbf{J}_{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ es la matriz jacobiana del sistema que representa el mapeo de las velocidades de maniobrabilidad del robot a las velocidades del punto de operación, tal que $\mathbf{J}_{\mathbf{u}} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$; y $\mathbf{v}_{\mathbf{u}}\left(t\right) \in \mathbb{R}^4$ es el vector de velocidades de maniobrabilidad de la plataforma aérea en el sistema de referencia móvil, conformado por:

$$\mathbf{v}_{\mathbf{u}}\left(t\right) = \begin{bmatrix} v_f\left(t\right) \\ v_l\left(t\right) \\ v_e\left(t\right) \\ \omega\left(t\right) \end{bmatrix} \tag{2.15}$$

donde, $v_f(t)$ es la velocidad frontal de desplazamiento del robot; $v_l(t)$ es la velocidad de desplazamiento lateral; $v_e(t)$ es la velocidad de desplazamiento vertical; y $\omega(t)$ es la velocidad angular de rotación del robot alrededor del eje-Z.

Suposición 2.2.1 *En el proceso para obtener el modelo cinemático diferencial del robot aéreo, se considera que el robot trabaja a velocidades bajas. Por lo tanto, la*

variación de los ángulos de cabeceo (Pitch θ) y rolido (Roll ϕ) son aproximadamente cero: $\theta \approx 0$ y $\phi \approx 0$.

Por lo anteriormente mencionado, se concluye que las matrices de rotación $\mathbf{R_x}(\phi_u) = \mathbf{R_y}(\theta_u) = \mathbf{I}$ resultan ser matrices identidad. De este modo, la relación entre el marco referencial $\{\mathcal{F}_\mathrm{u}\}$ y $\{\mathcal{F}_\mathrm{w}\}$ depende únicamente de la orientación de guiñada (Yaw ψ_u). Entonces, la matriz de rotación ${}^{\mathbf{w}}\mathbf{R_u}(\varphi_u)$ se expresa en forma aproximada como:

$$ {}^{\mathbf{w}}\mathbf{R_u}(\varphi_u) = \mathbf{R_z}(\psi_u) \tag{2.16} $$

Finalmente, el modelo cinemático diferencial del robot aéreo de la Ecuación (2.14) escrito de forma compacta está dado por:

$$ \dot{\mathbf{q}}_\mathbf{u}(t) = \mathbf{J_u}(\psi_u)\mathbf{v_u}(t) \tag{2.17} $$

tal que,

$$ \begin{bmatrix} \dot{x}_u(t) \\ \dot{y}_u(t) \\ \dot{z}_u(t) \\ \dot{\psi}_u(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 & 0 \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_f(t) \\ v_l(t) \\ v_e(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} \tag{2.18} $$

2.3. Brazo Robótico

Un brazo robótico es un sistema mecánico diseñado para replicar la funcionalidad de un brazo humano, permitiendo movimientos precisos y controlados en múltiples ejes.

2.3.1. Configuración Cinemática de un Brazo Robótico

La configuración de un brazo robótico se define a través del vector $\mathbf{q_a} \in \mathbb{R}^{n_a}$, donde n_a es el número de coordenadas independientes. Estas coordenadas también denominadas como coordenadas generalizadas del brazo robótico, caracterizan los valores de las diferentes articulaciones que conforman el robot. Pueden ser ángulos de rotación para las articulaciones de revolución y distancias en el caso de las articulaciones prismáticas. El vector de configuración del brazo robótico

está compuesto por $\mathbf{q_a} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \dots & q_{n_a} \end{bmatrix}^\intercal$, y pertenece al espacio de configuración del brazo robótico, denotado por $\mathcal{N}_a$.

Ahora, la posición y orientación del extremo operativo de un brazo robótico está determinada por una función que depende de las n_a articulaciones que conforman el brazo robótico (coordenadas generalizadas). El vector que define esta posición y orientación se representa como $\mathbf{r_a} \in \mathbb{R}^{m_a}$ y se define como $\mathbf{r_a} = \begin{bmatrix} r_{a_1} & r_{a_2} & \dots & r_{a_{m_a}} \end{bmatrix}^\intercal$. Aquí, m_a es el número de coordenadas del punto de operación del brazo robótico. Este conjunto de coordenadas define el espacio operativo del robot, que se denota por $\mathcal{M}_a$. Por lo tanto, la cinemática directa que define la posición y orientación del extremo operativo en función de las articulaciones del brazo robótico se expresa como:

$$\begin{gathered} \mathbf{r_a} = f_a\left(\mathbf{q_a}\right) \\ f_a : \mathcal{N}_a \rightarrow \mathcal{M}_a \end{gathered} \tag{2.19}$$

Es decir, $f_a\left(\mathbf{q_a}\right)$ es una función que determina la posición y orientación del extremo operativo en el sistema de referencia, en función de las articulaciones del brazo robótico.

La cinemática diferencial o cinemática instantánea, del brazo robótico describe la velocidad de la posición y orientación (velocidades operativas) del robot en función de las velocidades articulares (velocidades generalizadas). La cinemática diferencial se obtiene a través de la siguiente expresión:

$$\dot{\mathbf{r}}_\mathbf{a}\left(\mathbf{q_a}\right) = \underbrace{\frac{\partial \mathbf{r_a}\left(\mathbf{q_a}\right)}{\partial \mathbf{q_a}}}_{\mathbf{J_a}(\mathbf{q_a})} \dot{\mathbf{q}}_\mathbf{a}\left(t\right) \tag{2.20}$$

donde, $\dot{\mathbf{r}}_\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \dot{r}_{a_1} & \dot{r}_{a_2} & \dots & \dot{r}_{a_{m_a}} \end{bmatrix}^\intercal \in \mathbb{R}^{m_a}$ es el vector de velocidades del extremo operativo; $\dot{\mathbf{q}}_\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 & \dot{q}_2 & \dots & \dot{q}_{n_a} \end{bmatrix}^\intercal \in \mathbb{R}^{n_a}$ es el vector que contiene las velocidades de las articulaciones del brazo robótico; y $\mathbf{J_a}\left(\mathbf{q_a}\right) = \frac{\partial \mathbf{r_a}(\mathbf{q_a})}{\partial \mathbf{q_a}}$ es el Jacobiano Analítico del robot. De tal forma que $\mathbf{J_a}\left(\mathbf{q_a}\right) : \mathbb{R}^{n_a} \rightarrow \mathbb{R}^{m_a}$ genera el mapeo entre las velocidades de las articulaciones $\dot{\mathbf{q}}\mathbf{a}$ y el vector de velocidades del espacio operacional del extremo operativo $\dot{\mathbf{r}}_\mathbf{a}$. La dimensión de la matriz jacobiana depende de la dimensión de las velocidades operacionales del extremo operativo m_a; y de la dimensión del espacio de las velocidades de la configuración del brazo robótico n_a.

2.3.2. Caso de Estudio

En la Figura 2.2 se muestra un brazo robótico de tipo antropomórfico, conformado por tres articulaciones de tipo rotacional (brazo robótico de tres grados de libertad, 3 DoF). La cinemática directa se puede determinar mediante un análisis geométrico o, de forma más común, a través de la convención de Denavit-Hartenberg (D-H). Esta metodología proporciona la transformación de coordenadas que determina la posición y orientación del extremo $\mathbf{r_a}$ operativo respecto al marco base del robot $\{\mathcal{F}_{\mathrm{m}}\}$, utilizando matrices de transformación homogénea.

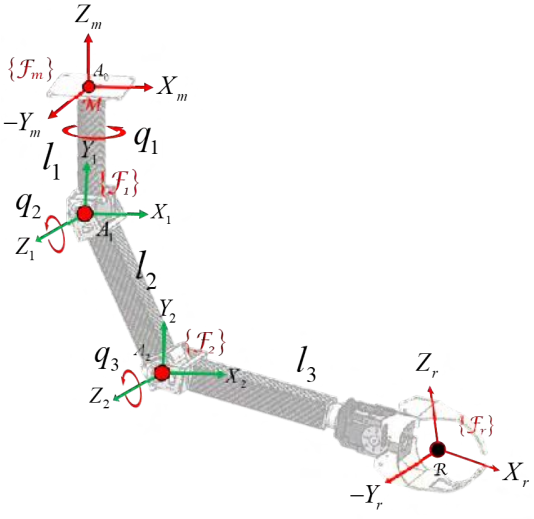


Figura 2.2: Brazo robótico de tres grados de libertad 3 DoF.

2.3.2.1. Cinemática Directa

Como se muestra en la Figura 2.2, $\mathcal{F}_{\mathrm{m}} = \{\mathcal{M}, X_m, Y_m, Z_m\}$ es el sistema de referencia de las base fija del brazo robótico; $\mathcal{F}_i = \{\mathcal{A}_i, X_i, Y_i, Z_i\}$, con $i = 0, 1, 2$, son los sistemas de referencia de cada articulación, donde $\mathcal{A}_0$ es la posición del sistema de referencia de la primera articulación del brazo robótico, que en este caso coincide con el sistema de referencia de la base del robot $\{\mathcal{F}_{\mathrm{m}}\}$; y

$\mathcal{F}_{\mathrm{r}} = \{\mathcal{R}, X_r, Y_r, Z_r\}$ es el sistema de referencia del extremo operativo. Además, la posición del sistema de referencia $\{\mathcal{F}_{\mathrm{r}}\}$ con respecto al sistema de referencia $\{\mathcal{F}_{\mathrm{m}}\}$ se define como ${}^{\mathbf{m}}\mathbf{p_r}$. Entonces, los parámetros de Denavit-Hartenberg para el brazo robótico de 3 DoF se definen en la Tabla 2.1:

Tabla 2.1
Parámetros de D-H del brazo robótico de 3 DoF .

Eslabón	q_i	d_i	a_i	α_i
1	q_1	$-l_1$	0	$\frac{\pi}{2}$
2	$q_2 - \frac{\pi}{2}$	0	l_2	0
3	q_3	0	l_3	0

Según los parámetros definidos de Denavit-Hartenberg (D-H), la transformación homogénea de coordenadas que representa la posición y orientación del extremo operativo respecto a $\{\mathcal{F}_{\mathrm{m}}\}$ está determinada por:

$$\mathbf{T}_{\mathcal{R}}^{\mathcal{M}} = \mathbf{A}_1^0 \mathbf{A}_2^1 \mathbf{A}_{\mathcal{R}}^2 \tag{2.21}$$

La matriz $\mathbf{T}_{\mathcal{R}}^{\mathcal{M}}$ es la matriz homogénea que representa la posición y orientación del extremo operativo del brazo robótico respecto a la base del brazo robótico $\mathcal{M}$ está dada por:

$$\mathbf{T}_{\mathcal{R}}^{\mathcal{M}}(\mathbf{q_a}) = \begin{bmatrix} {}^{\mathbf{m}}\mathbf{R_r}(\mathbf{q_a}) & {}^{\mathbf{m}}\mathbf{p_r}(\mathbf{q_a}) \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \tag{2.22}$$

Por lo tanto, tomando en cuenta los valores de la Tabla 2.1, se procede a determinar el valor de la matriz de rotación del sistema de referencia $\{\mathcal{F}_{\mathrm{r}}\}$ respecto al sistema de referencia $\{\mathcal{F}_{\mathrm{m}}\}$ para la ecuación Ecuación (2.22), obteniendo:

$${}^{\mathbf{m}}\mathbf{R_r}(\mathbf{q_a}) = \begin{bmatrix} \cos(q_1)\sin(q_2+q_3) & \cos(q_1)\cos(q_2+q_3) & \sin(q_1) \\ \sin(q_1)\sin(q_2+q_3) & \sin(q_1)\cos(q_2+q_3) & -\cos(q_1) \\ -\cos(q_2+q_3) & \sin(q_2+q_3) & 0 \end{bmatrix} \tag{2.23}$$

Y la posición del extremo operativo respecto al marco base del brazo robótico está dada por:

$${}^{\mathbf{m}}\mathbf{p_r}(\mathbf{q_a}) = \begin{bmatrix} \cos(q_1)\left(l_2\sin(q_2) + l_3\sin(q_2+q_3)\right) \\ \sin(q_1)\left(l_2\sin(q_2) + l_3\sin(q_2+q_3)\right) \\ -l_1 - l_2\cos(q_2) - l_3\cos(q_2+q_3) \end{bmatrix} \tag{2.24}$$

donde, $^{\mathbf{m}}\mathbf{p}_{\mathbf{r}}(\mathbf{q_a}) = \begin{bmatrix} r_{x_a} & r_{y_a} & r_{z_a} \end{bmatrix}^\intercal$ es el vector de posición del extremo operativo del brazo robótico.

2.3.2.2. Cinemática Diferencial

Para expresar la relación entre la velocidad del extremo operativo y la velocidad articular del brazo robótico, se utiliza el Jacobiano del robot. Para esto, emplearemos la expresión de la Ecuación (2.20). Sea $\mathbf{r_a} = f_a(\mathbf{q_a})$, donde $f_a(\mathbf{q_a}) = {}^{\mathbf{m}}\mathbf{p}_{\mathbf{r}}(\mathbf{q_a})$ es la función que describe la posición del extremo operativo del robot; y $\mathbf{q_a} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \end{bmatrix}^\intercal$ es el vector de las coordenadas independientes del robot. Entonces, la cinemática diferencial del brazo robótico de 3 DoF resulta:

$$\dot{\mathbf{r}}_\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -s_{q_1}(l_2 s_{q_2} + l_3 s_{q_2 q_3}) & c_{q_1}(l_2 c_{q_2} + l_3 c_{q_2 q_3}) & c_{q_1} l_3 c_{q_2 q_3} \\ c_1(l_2 s_{q_2} + l_3 s_{q_2 q_3}) & s_{q_1}(l_2 c_{q_2} + l_3 c_{q_2 q_3}) & s_{q_1} l_3 c_{q_2 q_3} \\ 0 & (l_2 s_{q_2} + l_3 s_{q_2 q_3}) & l_3 s_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} \tag{2.25}$$

Con $s_a = \sin(a)$; $c_b = \cos(b)$; $s_{ab} = \sin(a+b)$; y $c_{ab} = \cos(a+b)$, se utiliza esta terminología para simplificar la extensión de la Ecuación (2.25). Finalmente, escrito de forma matricial, se tiene el modelo cinemático instantáneo o diferencial del brazo de 3 DoF como:

$$\dot{\mathbf{r}}_\mathbf{a}(\mathbf{q_a}) = \mathbf{J_a}(\mathbf{q_a})\,\dot{\mathbf{q}}_\mathbf{a}(t) \tag{2.26}$$

donde $\dot{\mathbf{r}}_\mathbf{a}(\mathbf{q_a}) \in \mathbb{R}^{m_a}$ con $m_a = 3$ es el vector de velocidades del extremo operativo; $\dot{\mathbf{q}}_\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{n_a}$ con $n_a = 3$ es el vector de las articulaciones del brazo robótico; y $\mathbf{J_a}(\mathbf{q_a}) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es el Jacobiano del brazo robótico que mapea las velocidades de las articulaciones $\dot{\mathbf{q}}_\mathbf{a}$ a las velocidades del extremo operativo $\dot{\mathbf{r}}_\mathbf{a}$.

2.4. Manipulador Aéreo

La configuración del manipulador aéreo está definida por un vector $\mathbf{q}$ de n coordenadas independientes, conocidas como coordenadas generalizadas del sistema. Donde $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q_u}^\intercal & \mathbf{q_a}^\intercal \end{bmatrix}^\intercal \in \mathbb{R}^n$ con $\mathbf{q_u} \in \mathbb{R}^{n_u}$ que representa el vector de coordenadas generalizadas de la plataforma aérea y $\mathbf{q_a} \in \mathbb{R}^{n_a}$ el vector de coordenadas generalizadas del brazo robótico. Por lo tanto, $n = n_u + n_a$, donde n_u y n_a son las dimensiones de los espacios asociados a las coordenadas generalizadas

de la plataforma aérea y del brazo robótico respectivamente. La configuración $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ pertenece al espacio de configuración del manipulador aéreo $\mathcal{N}$. La ubicación y orientación del extremo operativo están definidos por el vector de dimensión m descrito como $\mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & \dots & r_m \end{bmatrix}^\intercal = \begin{bmatrix} \mathbf{p_r}^\intercal & \mathbf{o_r}^\intercal \end{bmatrix}^\intercal$, donde, $\mathbf{p_r}$ representa la posición del extremo operativo; y $\mathbf{o_r}$ representa la orientación del extremo operativo. Las m coordenadas de $\mathbf{r}$ representan la dimensión del espacio de trabajo del manipulador aéreo denotado como $\mathcal{M}$. El vector $\mathbf{r}$ se puede definir de diferentes formas según la tarea, es decir, puede considerar solo la posición del extremo operativo o tanto la posición como la orientación.

El modelo cinemático de un manipulador aéreo $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^m$ en función de la configuración del brazo robótico $\mathbf{q_a}$ y de la configuración de la plataforma aérea $\mathbf{q_u}$ está representado por:

$$\begin{gathered} \mathbf{r} = f\left(\mathbf{q_u}, \mathbf{q_a}\right) \\ f : \mathcal{N}_u \times \mathcal{N}_a \rightarrow \mathcal{M} \end{gathered} \tag{2.27}$$

donde, $\mathcal{N}_u$ y $\mathcal{N}_a$ representan el espacio de configuración de la plataforma área y del brazo robótico respectivamente; y $f\left(\mathbf{q_u}, \mathbf{q_a}\right)$ es la función que determina la posición y orientación del extremo operativo del manipulador aéreo.

Ahora, la cinemática diferencial del manipulador aéreo que describe la velocidad del extremo operativo, en función de las velocidades articulares del brazo robótico y de la plataforma aérea, es el resultado de la derivada parcial de $\mathbf{r}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^m$ con respecto a las articulaciones del sistema, de tal forma que:

$$\dot{\mathbf{r}}\left(\mathbf{q}\right) = \frac{\partial f\left(\mathbf{q_u}, \mathbf{q_a}\right)}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}}\left(t\right) \tag{2.28}$$

donde, $\dot{\mathbf{r}}\left(\mathbf{q}\right) = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & \dots & r_m \end{bmatrix}^\intercal \in \mathbb{R}^m$ es el vector de velocidades del extremo operativo del manipulador aéreo; $\dot{\mathbf{q}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_\mathbf{u}^\intercal & \dot{\mathbf{q}}_\mathbf{a}^\intercal \end{bmatrix}^\intercal \in \mathbb{R}^n$ es el vector de velocidades de las articulaciones del robot. Luego, tomando la relación $\dot{\mathbf{q}}\left(t\right) = \mathbf{T}\left(\mathbf{q}\right) \boldsymbol{\mu}\left(t\right)$, resulta:

$$\mathbf{J}\left(\mathbf{q}\right) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}}\left(\mathbf{q_u}, \mathbf{q_a}\right) \mathbf{T}\left(\mathbf{q}\right) \tag{2.29}$$

donde, $\mathbf{T}\left(\mathbf{q}\right) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz que relaciona las velocidades asociadas al marco $\{\mathcal{F}_\mathrm{w}\}$ con las velocidades asociadas al marco móvil $\{\mathcal{F}_\mathrm{u}\}$. Entonces, la Ecuación (2.28) se representa como:

$$\dot{\mathbf{r}}\left(\mathbf{q}\right) = \mathbf{J}\left(\mathbf{q}\right) \boldsymbol{\mu}\left(t\right) \tag{2.30}$$

donde, $\mathbf{J}(\mathbf{q}) : \mathbb{R}^{\mathbf{n}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbf{m}}$ se denomina Jacobiano del sistema. Este Jacobiano es el encargado de mapear las velocidades de las articulaciones del robot (velocidades de maniobrabilidad) a las velocidades del extremo operativo (velocidades de la tarea).

2.4.1. Caso de Estudio

En esta sección se describe el modelo cinemático del robot manipulador aéreo, el modelo considera todo el sistema unificado, es decir, plataforma aérea más brazo robótico como un solo sistema. La Figura 2.3 describe la configuración cinemática del robot. El manipulador aéreo que se considera está constituido por

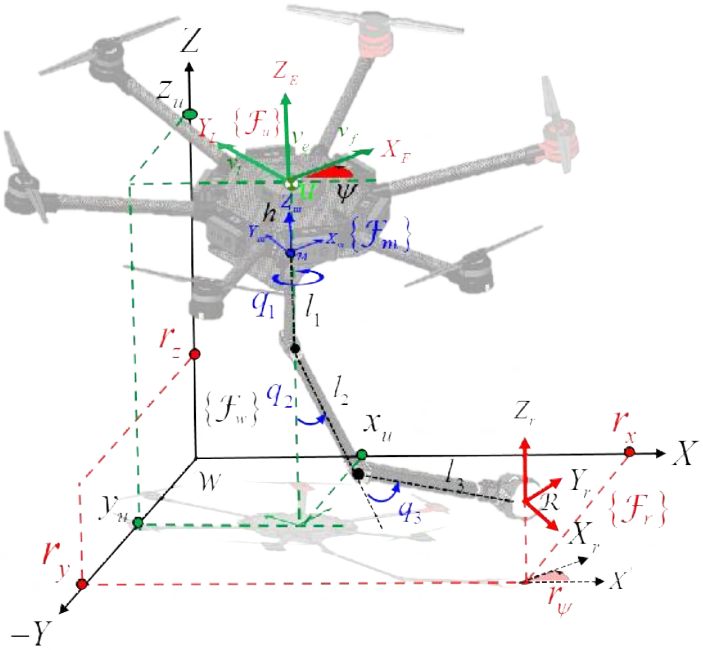


Figura 2.3: Configuración cinemática del manipulador aéreo en el sistema de referencia fijo.

un hexarrotor y un brazo robótico de 3 DoF colocado en la parte inferior de la plataforma aérea. Para realizar el control de movimiento del sistema, el robot recibe comandos de velocidad:

1. El hexarrotor tiene tres velocidades lineales $v_f(t)$, $v_l(t)$ y $v_e(t)$, y una velocidad angular $\omega(t)$. Donde, $v_f \in \mathbb{R}$ es la velocidad lineal para el desplazamiento frontal; $v_l \in \mathbb{R}$ es la velocidad lineal para el desplazamiento lateral; $v_e \in \mathbb{R}$ es la velocidad lineal para el control de elevación; y $\omega \in \mathbb{R}$ es la velocidad de rotación del hexarrotor (Yaw), es decir, la tasa de cambio de rotación del ángulo de guiñada con respecto al tiempo.

2. El brazo robótico recibe tres comandos de velocidad angular: $\dot{q}_1$, que es la velocidad de rotación alrededor del eje-Z; $\dot{q}_2$ y $\dot{q}_3$, que son las velocidades angulares de rotación alrededor del eje-Y.

2.4.1.1. Cinemática Directa

De acuerdo con la configuración del robot, la posición del extremo operativo en el sistema de referencia fijo $\{\mathcal{F}_{\mathrm{w}}\}$ está dada por:

$$\mathbf{p_r}\left(\mathbf{q}\right) = \mathbf{p_u}\left(\mathbf{q_u}\right) + {}^{\mathbf{w}}\mathbf{R_u}\,{}^{\mathbf{u}}\mathbf{p_r}\left(\mathbf{q_a}\right) \tag{2.31}$$

donde, $\mathbf{p_r}\left(\mathbf{q}\right) \in \mathbb{R}^3$ es la posición el extremo operativo del robot en $\{\mathcal{F}_{\mathrm{w}}\}$ y está definido como $\mathbf{p_r}\left(\mathbf{q}\right) = \begin{bmatrix} r_x & r_y & r_z \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$; $\mathbf{p_u}\left(\mathbf{q_u}\right) \in \mathbb{R}^3$ es la posición de la plataforma aérea dentro del sistema de referencia fijo $\{\mathcal{F}_{\mathrm{w}}\}$, descrito como $\mathbf{p_u}\left(\mathbf{q_u}\right) = \begin{bmatrix} x_u & y_u & z_u \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$; ${}^{\mathbf{u}}\mathbf{p_r}\left(\mathbf{q_a}\right) \in \mathbb{R}^3$ es el vector de posición del extremo operativo respecto al marco de referencia de la plataforma aérea $\{\mathcal{F}_{\mathrm{u}}\}$, conformado por ${}^{\mathbf{u}}\mathbf{p_r}\left(\mathbf{q_a}\right) = \begin{bmatrix} {}^{u}r_x & {}^{u}r_y & {}^{u}r_z \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$; y ${}^{\mathbf{w}}\mathbf{R_u} \in SO\left(3\right)$ es la matriz de rotación del sistema referencia móvil respecto al sistema de referencia fijo.

Ahora, la posición del marco de referencia de la base del brazo robótico $\mathcal{M}$ se encuentra desplazado por el vector $\mathbf{\Delta h} \in \mathbb{R}^3$ compuesto por:

$$\mathbf{\Delta h} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -h \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} \tag{2.32}$$

donde, h es la distancia del centro de masa del hexarrotor en el eje-Z hacia la posición $\mathcal{U}$ del marco referencial móvil $\{\mathcal{F}_{\mathrm{u}}\}$. Por lo tanto, considerando la Ecuación (2.24) y la distancia entre los marcos de referencia $\{\mathcal{F}_{\mathrm{m}}\}$ y $\{\mathcal{F}_{\mathrm{u}}\}$, la posición

del brazo robótico respecto al sistema de referencia móvil esta determinada por la expresión:

$$^{\mathbf{u}}\mathbf{p_r}\left(\mathbf{q_a}\right) = {}^{\mathbf{m}}\mathbf{p_r}(\mathbf{q_a}) + \mathbf{\Delta h} \tag{2.33}$$

de tal forma que:

$$\begin{bmatrix} {}^{u}r_x \\ {}^{u}r_y \\ {}^{u}r_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\left(q_1\right)\left(l_2\sin\left(q_2\right) + l_3\sin\left(q_2+q_3\right)\right) \\ \sin\left(q_1\right)\left(l_2\sin\left(q_2\right) + l_3\sin\left(q_2+q_3\right)\right) \\ -l_1 - l_2\cos\left(q_2\right) - l_3\cos\left(q_2+q_3\right) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -h \end{bmatrix} \tag{2.34}$$

Ahora, sustituyendo la Ecuación (2.1), Ecuación (2.6) y la Ecuación (2.34) en la Ecuación (2.31), se obtiene la posición del extremo operativo en el espacio de trabajo $\{\mathcal{F}_{\mathrm{w}}\}$ determinada por:

$$\begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{bmatrix} + {}^{\mathbf{w}}\mathbf{R_u} \begin{bmatrix} \cos\left(q_1\right)\left(l_2\sin\left(q_2\right) + l_3\sin\left(q_2+q_3\right)\right) \\ \sin\left(q_1\right)\left(l_2\sin\left(q_2\right) + l_3\sin\left(q_2+q_3\right)\right) \\ -h - l_1 - l_2\cos\left(q_2\right) - l_3\cos\left(q_2+q_3\right) \end{bmatrix} \tag{2.35}$$

Ahora, definamos la orientación del extremo operativo $\mathbf{o_r}\left(\mathbf{q}\right)$. Para lo cual se considera únicamente la orientación en el plano-XY del espacio de trabajo $\{\mathcal{F}\mathrm{w}\}$. La orientación del extremo operativo está denotada por $r_\psi \in \mathbb{R}$ y se define como:

$$\mathbf{o_r}\left(\mathbf{q}\right) = r_\psi \tag{2.36}$$

donde:

$$r_\psi = \psi_u + q_1 \tag{2.37}$$

en otras palabras, la rotación del efector final está determinada por el ángulo de guiñada del UAV y la rotación de la primera articulación del brazo robótico.

Por último, tomando la Ecuación (2.31) y Ecuación (2.36), se define el vector que representa la posición y orientación del extremo operativo en el sistema de referencia fijo $\{\mathcal{F}_{\mathrm{w}}\}$:

$$\mathbf{r}\left(\mathbf{q}\right) = \begin{bmatrix} \mathbf{p_r}\left(\mathbf{q}\right) \\ \mathbf{o_r}\left(\mathbf{q}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p_u}\left(\mathbf{q_u}\right) + {}^{\mathbf{w}}\mathbf{R_u}\,{}^{\mathbf{u}}\mathbf{p_r}\left(\mathbf{q_a}\right)) \\ r_\psi\left(\mathbf{q}\right) \end{bmatrix} \tag{2.38}$$

Sustituyendo la Ecuación (2.35), Ecuación (2.37) y la Ecuación (2.16) el modelo cinemático del manipulador aéreo resulta:

$$\begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ r_\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_u + \cos\left(\psi_u + q_1\right)\left(l_2\sin\left(q_2\right) + l_3\sin\left(q_2+q_3\right)\right) \\ y_u + \sin\left(\psi_u + q_1\right)\left(l_2\sin\left(q_2\right) + l_3\sin\left(q_2+q_3\right)\right) \\ z_u - h - l_1 - l_2\cos\left(q_2\right) - l_3\cos\left(q_2+q_3\right) \\ \psi_u + q_1 \end{bmatrix} \tag{2.39}$$

2.4.1.2. Cinemática Diferencial

El modelo cinemático diferencial está determinado por la Ecuación (2.28), de tal forma que:

$$\dot{\mathbf{r}}\left(\mathbf{q}\right) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}}\left(\mathbf{q_u}, \mathbf{q_a}\right)\mathbf{T}\left(\mathbf{q}\right)\boldsymbol{\mu}\left(t\right) \tag{2.40}$$

donde,

$$\mathbf{T}\left(\mathbf{q}\right) = \begin{bmatrix} \mathbf{R_z}(\psi_u) & \mathbf{0}_{3\times 4} \\ \mathbf{0}_{4\times 3} & \mathbf{I}_{4\times 4} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{7\times 7} \tag{2.41}$$

Escrito el sistema en forma matricial resulta:

$$\dot{\mathbf{r}}\left(\mathbf{q}\right) = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}_\mathbf{r}\left(\mathbf{q}\right) \\ \dot{\mathbf{o}}_\mathbf{r}\left(\mathbf{q}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J_p}\left(\mathbf{q}\right) \\ \mathbf{J_o}\left(\mathbf{q}\right) \end{bmatrix}\boldsymbol{\mu}\left(t\right) \tag{2.42}$$

donde, $\mathbf{q} = \begin{bmatrix}\mathbf{q_u}^\intercal & \mathbf{q_a}^\intercal\end{bmatrix}^\intercal$ es el vector de las coordenadas generalizadas del robot con: $\mathbf{q_u} = \begin{bmatrix} x_u & y_u & z_u & \psi_u \end{bmatrix}^\intercal$ que son las coordenadas generalizadas del hexarrotor y $\mathbf{q_a} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \end{bmatrix}^\intercal$ como coordenadas generalizadas del brazo robótico; $\dot{\mathbf{r}}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix}\dot{\mathbf{p}}_\mathbf{r}(\mathbf{q})^\intercal & \dot{\mathbf{o}}_\mathbf{r}(\mathbf{q})^\intercal\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4$ es el vector de velocidades del efector final del manipulador aéreo, donde, $\dot{\mathbf{p}}_\mathbf{r}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix}\dot{r}_x & \dot{r}_y & \dot{r}_z\end{bmatrix}^\intercal$ es el vector de velocidad lineal y $\dot{\mathbf{o}}_\mathbf{r}(\mathbf{q}) = \dot{r}_\psi$ es la velocidad angular, por lo tanto:

$$\dot{\mathbf{r}}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \dot{r}_x \\ \dot{r}_y \\ \dot{r}_z \\ \dot{r}_\psi \end{bmatrix} \tag{2.43}$$

$\boldsymbol{\mu}(t) \in \mathbb{R}^7$ es el vector de las velocidades de maniobrabilidad del robot compuesto por:

$$\boldsymbol{\mu}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{v_u} \\ \mathbf{v_a} \end{bmatrix} \tag{2.44}$$

donde, $\mathbf{v_u} = \begin{bmatrix} v_f & v_l & v_e & \omega \end{bmatrix}^\intercal$ es el vector de velocidades de maniobrabilidad del hexarrotor; y $\mathbf{v_a} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 & \dot{q}_2 & \dot{q}_3 \end{bmatrix}^\intercal$ es el vector de velocidades de maniobrabilidad del brazo robótico, entonces:

$$\boldsymbol{\mu}(t) = \begin{bmatrix} v_f & v_l & v_e & \omega & \dot{q}_1 & \dot{q}_2 & \dot{q}_3 \end{bmatrix}^\intercal \tag{2.45}$$

$\mathbf{J_p}(\mathbf{q})$ y $\mathbf{J_o}(\mathbf{q})$ son los Jacobianos de posición y orientación respectivamente. Ahora, escrito de forma compacta la Ecuación (2.42), se obtiene el modelo cinemático diferencial expresado como:

$$\dot{\mathbf{r}}(\mathbf{q}) = \mathbf{J}(\mathbf{q_u}, \mathbf{q_a})\,\boldsymbol{\mu}(t) \tag{2.46}$$

donde, $\mathbf{J}(\mathbf{q_u}, \mathbf{q_a}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ representa el Jacobiano del manipulador aéreo con $n = 7$ que es la dimensión del espacio de configuración del robot y $m = 4$ que es la dimensión del espacio de trabajo. De tal manera que:

$$\mathbf{J_p}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} j_{p11} & j_{p12} & j_{p13} & j_{p14} & j_{p15} & j_{p16} & j_{p17} \\ j_{p21} & j_{p22} & j_{p23} & j_{p24} & j_{p25} & j_{p26} & j_{p27} \\ j_{p31} & j_{p32} & j_{p33} & j_{p34} & j_{p35} & j_{p36} & j_{p37} \end{bmatrix} \tag{2.47}$$

con,

$$\begin{aligned}
j_{p11} &= \cos(\psi_u) \\
j_{p12} &= -\sin(\psi_u) \\
j_{p13} &= 0 \\
j_{p14} &= -\sin(\psi_u + q_1)\,(l_2\sin(q_2) + l_3\sin(q_2 + q_3)) \\
j_{p15} &= -\sin(\psi_u + q_1)\,(l_2\sin(q_2) + l_3\sin(q_2 + q_3)) \\
j_{p16} &= \cos(\psi_u + q_1)\,(l_2\cos(q_2) + l_3\cos(q_2 + q_3)) \\
j_{p17} &= \cos(\psi_u + q_1)\,(l_3\cos(q_2 + q_3))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
j_{p21} &= \sin(\psi_u) \\
j_{p22} &= \cos(\psi_u) \\
j_{p23} &= 0 \\
j_{p24} &= \cos(\psi_u + q_1)\,(l_2\sin(q_2) + l_3\sin(q_2 + q_3)) \\
j_{p25} &= \cos(\psi_u + q_1)\,(l_2\sin(q_2) + l_3\sin(q_2 + q_3)) \\
j_{p26} &= \sin(\psi_u + q_1)\,(l_2\cos(q_2) + l_3\cos(q_2 + q_3)) \\
j_{p27} &= \sin(\psi_u + q_1)\,\left(l_3\cos_(\, q_2 + q_3)\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
j_{p31} &= 0 \\
j_{p32} &= 0 \\
j_{p33} &= 1 \\
j_{p34} &= 0
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
j_{p35} &= 0 \\
j_{p36} &= l_2 \sin(q_2) + l_3 \sin(q_2 + q_3) \\
j_{p37} &= l_3 \sin(q_2 + q_3)
\end{aligned}
$$

y

$$
\mathbf{J_o}\left(\mathbf{q}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

Entonces, el Jacobiano del sistema que relaciona las velocidades de maniobrabilidad del robot con las velocidades del extremo operativo. Escrito en forma detallada resulta:

$$
\begin{aligned}
\dot{r}_x = v_f \cos(\psi_u) - v_l \sin(\psi_u) + \dot{q}_3 \cos(\psi_u + q_1)\left(l_3 \cos(q_2 + q_3)\right) - .. \\
... - (\omega + \dot{q}_1) \sin(\psi_u + q_1)\left(l_2 \sin(q_2) + l_3 \sin(q_2 + q_3)\right) + ... \\
... + \dot{q}_2 \cos(\psi_u + q_1)\left(l_2 \cos(q_2) + l_3 \cos(q_2 + q_3)\right) \\
\dot{r}_y = v_f \sin(\psi_u) + v_l \cos(\psi_u) + \dot{q}_3 \sin(\psi_u + q_1)\left(l_3 \cos(\, q_2 + q_3)\right) + ... \\
... + (\omega + \dot{q}_1) \cos(\psi_u + q_1)\left(l_2 \sin(q_2) + l_3 \sin(q_2 + q_3)\right) + ... \\
... + \dot{q}_2 \sin(\psi_u + q_1)\left(l_2 \cos(q_2) + l_3 \cos(q_2 + q_3)\right) \\
\dot{r}_z = v_e + \dot{q}_2 (l_2 \sin(q_2) + l_3 \sin(q_2 + q_3)) + \dot{q}_3 (l_3 \sin(q_2 + q_3)) \\
\dot{r}_\psi = \omega + \dot{q}_1
\end{aligned}
\tag{2.48}
$$

2.5. Dinámica del Manipulador Aéreo

El modelo dinámico de un robot describe la relación matemática de las coordenadas articulares o en otras palabras las coordenadas del extremo operativo del robot, sus velocidades y aceleraciones con las fuerzas y pares que se aplican a las articulaciones; y los parámetros del robot como: masas, longitud de eslabones, inercias, momentos, entre otros. En la literatura existen varios métodos para la obtención del modelo dinámico de un robot. Los métodos principales y más empleados para la obtención del modelo dinámico son:

- Método de Euler-Lagrange.
- Método de Newton-Euler.

2.5.1. Newton-Euler

Por otra parte, el método de Newton-Euler está basado en el equilibrio de todas las fuerzas que actúan sobre las articulaciones de robot. Esto conduce a un conjunto de ecuaciones cuya estructura permite un tipo de solución recursiva. Se realiza una recursividad hacia adelante para propagar las velocidades y aceleraciones de la articulación, seguida de una recursividad hacia atrás para propagar las fuerzas. Este enfoque es eficiente para manipuladores con múltiples grados de libertad (DOF) y se utiliza ampliamente para el análisis dinámico y la simulación [72].

2.5.2. Euler-Lagrange

El método de Euler-Lagrange se basa en el balance de energías. Con la formulación de Lagrange las ecuaciones de movimiento del sistema se pueden derivar de forma sistemática sin depender del marco de coordenadas de referencias, una vez seleccionado el conjunto de variables para las coordenadas generalizadas que describen las posiciones de enlace de un manipulador de n grados de libertad. Este enfoque es menos intuitivo físicamente que Newton-Euler, pero es muy potente para sistemas con restricciones holonómicas.

2.5.3. Tipos de Modelos Dinámicos

Existen dos tipos de modelos dinámicos (ver Figura 2.4):

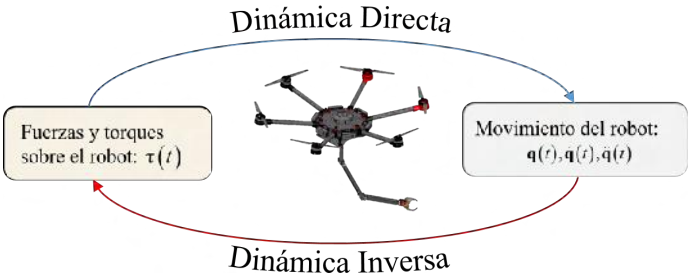


Figura 2.4: Dinamica de un robot.

2.5.3.1. Dinámica Inversa

La dinámica inversa se utiliza principalmente en el diseño de control, ya que permite determinar los torques y fuerzas necesarios para generar un movimiento deseado a partir de un perfil de aceleraciones o trayectorias de referencia del robot.

2.5.3.2. Dinámica Directa

La dinámica directa se emplea para realizar simulación del robot y análisis del movimiento, puesto que permite obtener las posiciones, velocidades y aceleraciones del robot mediante la integración de las ecuaciones dinámicas, en función a acciones de control aplicadas. La ecuación que representa el modelo dinámico, independientemente del método utilizado para la obtención, tradicionalmente está definida en función a torques, fuerzas.

2.5.4. Caso de Estudio

La Figura 2.5 muestra el esquema del sistema, en la cual se observa los parámetros que están implicados en el movimiento del robot.

2.5.4.1. Cinemática de Traslación de Cuerpos Rígidos

Para obtener el modelo dinámico del manipulador aéreo, se utiliza el método de Euler-Lagrange. Por lo tanto, determinemos las velocidades que corresponde a cada masa (Cuerpos Rígidos) que interviene en el sistema, partiendo del centro de masa del hexarrotor hasta el extremo operativo del brazo robótico.

La posición y velocidad para la primera masa es:

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u - h - l_1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} \dot{x}_u \\ \dot{y}_u \\ \dot{z}_u \end{bmatrix} \tag{2.49}$$

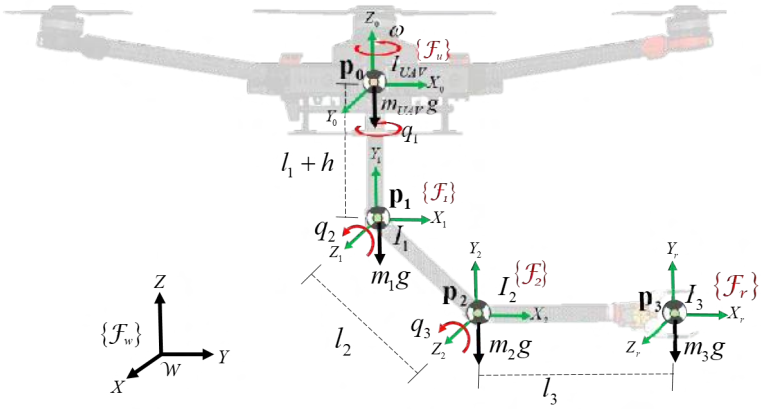


Figura 2.5: Parámetros dinámicos de un manipulador aéreo.

La posición y velocidad de la segunda masa está dada por:

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_2 &= \begin{bmatrix} x_u + l_2 c_{\psi_u q_1} s_{q_2} \\ y_u + l_2 s_{\psi_u q_1} s_{q_2} \\ z_u - l_1 - l_2 c_{q_2} \end{bmatrix} \\ \mathbf{v}_2 &= \begin{bmatrix} \dot{x}_u - l_2 s_{\psi_u q_1} s_{q_2} (\omega + \dot{q}_1) + l_2 c_{\psi_u q_1} c_{q_2} \dot{q}_2 \\ \dot{y}_u + l_2 c_{\psi_u q_1} s_{q_2} (\omega + \dot{q}_1) + l_2 s_{\psi_u q_1} c_{q_2} \dot{q}_2 \\ \dot{z}_u + l_2 s_{q_2} \dot{q}_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2.50}$$

Por último, la posición y velocidad de la tercera masa es:

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_3 &= \begin{bmatrix} x_u + c_{\psi_u q_1} (l_2 s_{q_2} + l_3 s_{q_2 q_3}) \\ y_u + s_{\psi_u q_1} (l_2 s_{q_2} + l_3 s_{q_2 q_3}) \\ z_u - l_1 - l_2 c_{q_2} - l_3 c_{q_2 q_3} \end{bmatrix} \\ \mathbf{v}_3 &= \begin{bmatrix} \dot{x}_u + c_{\psi_u q_1} \left((l_2 c_{q_2} + l_3 c_{q_2 q_3}) \dot{q}_2 + l_3 c_{q_2 q_3} \dot{q}_3 \right) + \dots \\ \dots - s_{\psi_u q_1} (l_2 s_{q_2} + l_3 s_{q_2 q_3}) (\omega + \dot{q}_1) \\ \dot{y}_u + s_{\psi_u q_1} \left((l_2 c_{q_2} + l_3 c_{q_2 q_3}) \dot{q}_2 + l_3 c_{q_2 q_3} \dot{q}_3 \right) + \dots \\ \dots + c_{\psi_u q_1} (l_2 s_{q_2} + l_3 s_{q_2 q_3}) (\omega + \dot{q}_1) \\ \dot{z}_u + (l_2 s_{q_2} + l_3 s_{q_2 q_3}) \dot{q}_2 + l_3 c_{q_2 q_3} \dot{q}_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2.51}$$

2.5.4.2. Ecuaciones de Euler-Lagrange

La ecuación de LaGrange está representada por la diferencia entre la energía cinética y la enérgica potencial [70]:

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}\left(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}\right) = K\left(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}\right) - U\left(\mathbf{q}\right) \tag{2.52}$$

donde, $K(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ es la energía cinética total del sistema; y $U(\mathbf{q})$ es la energía potencial de todo el sistema. La energía cinética del robot está determinada por:

$$K = K_u + K_a \tag{2.53}$$

donde, K_u es la energía cinética total de la plataforma aérea; y K_a es la energía cinética total del brazo robótico montado en la plataforma. La energía cinética del hexarrotor está compuesta por la energía cinética producida por la traslación y la energía cinética producida por la rotación, de tal forma que:

$$K_{\mathbf{u}} = \frac{1}{2}\mathbf{v}_{\mathbf{u}}^{\intercal} m_u \mathbf{v}_{\mathbf{u}} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{u}}^{\intercal} I_u \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{u}} \tag{2.54}$$

donde, m_u es la masa del hexarrotor, $\mathbf{v_u}$ es el vector de velocidad lineal del hexarrotor en el sistema de referencia fijo $\{\mathcal{F}_{\mathrm{w}}\}$, $\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{u}}$ es la velocidad angular y I_u es el momento de inercia del hexarrotor. Reemplazando la velocidad angular del hexarrotor ($\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{u}} = \dot{\psi}_u$), la energía cinética de la plataforma resulta:

$$K_u = \frac{1}{2}\mathbf{v}_{\mathbf{u}}^{\intercal} m_u \mathbf{v}_{\mathbf{u}} + \frac{1}{2} I_u \dot{\psi}_u^2 \tag{2.55}$$

La energía cinética del hexarrotor escrita en forma matricial como función de las coordenadas generalizadas $\dot{\mathbf{q}}$ resulta de la siguiente manera:

$$K_u = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^{\intercal}\left(\mathbf{J}_{\mathbf{v_u}}^{\intercal} m_u \mathbf{J}_{\mathbf{v_u}} + \mathbf{J}_{\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{u}}}^{\intercal} I_u \mathbf{J}_{\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{u}}}\right)\dot{\mathbf{q}} \tag{2.56}$$

donde, $\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix}\dot{x}_u & \dot{y}_u & \dot{z}_u & \dot{\psi}_u & \dot{q}_1 & \dot{q}_2 & \dot{q}_3\end{bmatrix}^{\intercal}$ es el vector de velocidades de coordenadas generalizadas del manipulador aéreo; y $\mathbf{J}_{\mathbf{v_u}}, \mathbf{J}_{\boldsymbol{\omega}_u}$ son los Jacobianos de velocidad lineal y angular respectivamente, y están definidos por:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{\mathbf{v_u}} &= \begin{bmatrix}\mathbf{I_{3\times 3}} & \mathbf{0_{3\times 4}}\end{bmatrix} \\ \mathbf{J}_{\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{u}}} &= \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \mathbf{0}_{2\times 7} & & & \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2.57}$$

La energía cinética producida por del manipulador está compuesta por la energía cinética de traslación y de rotación de cada eslabón:

$$K_a = K_{a_1} + K_{a_2} + K_{a_3} \tag{2.58}$$

Reemplazando las energías cinéticas en la Ecuación (2.58) resulta:

$$\begin{aligned} K_{\mathrm{a}} = \frac{1}{2}\Big(& \mathbf{v_1}^{\intercal} m_1 \mathbf{v_1} + I_1 \left(\dot{\psi}_u + \dot{q}_1\right)^2 + \mathbf{v_2}^{\intercal} m_2 \mathbf{v_2} \\ & + I_2 \dot{q}_2^2 + \mathbf{v_3}^{\intercal} m_3 \mathbf{v_3} + I_3 \left(\dot{q}_2 + \dot{q}_3\right)^2 \Big) \end{aligned} \tag{2.59}$$

Entonces, separando las energías cinéticas producidas por las masas de los eslabones del brazo robótico y escribiendo en forma matricial en función de las coordenadas generalizadas, resulta que la energía cinética para la masa uno (m_1) está definida por:

$$K_{a_1} = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^{\intercal}\left(\mathbf{J}_{\mathbf{v_1}}^{\intercal} m_1 \mathbf{J}_{\mathbf{v_1}} + \mathbf{J}_{\boldsymbol{\omega_1}}^{\intercal} I_1 \mathbf{J}_{\boldsymbol{\omega_1}}\right)\dot{\mathbf{q}} \tag{2.60}$$

con,

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{\mathbf{v_1}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{I_{3\times 3}} & \mathbf{0}_{3\times 4} \end{bmatrix} \\ \mathbf{J}_{\boldsymbol{\omega_1}} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ & & & \mathbf{0}_{2\times 7} & & & \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2.61}$$

Energía cinética de la masa dos (m_2):

$$K_{a_2} = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^{\intercal}\left(\mathbf{J}_{\mathbf{v_2}}^{\intercal} m_2 \mathbf{J}_{\mathbf{v_2}} + \mathbf{J}_{\boldsymbol{\omega_2}}^{\intercal} I_2 \mathbf{J}_{\boldsymbol{\omega_2}}\right)\dot{\mathbf{q}} \tag{2.62}$$

con,

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{\mathbf{v_2}} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -l_2 s_{\psi_u q_1} s_{q_2} & -l_2 s_{\psi_u q_1} s_{q_2} & l_2 c_{\psi_u q_1} c_{q_2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_2 c_{\psi_u q_1} s_{q_2} & l_2 c_{\psi_u q_1} s_{q_2} & l_2 s_{\psi_u q_1} c_{q_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & l_2 c_{q_2} & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{J}_{\boldsymbol{\omega_2}} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & & \mathbf{0}_{2\times 7} & & & \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2.63}$$

La energía cinética de la masa tres (m_3) esta compuesta:

$$K_{a_3} = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^{\intercal}\left(\mathbf{J}_{\mathbf{v_3}}^{\intercal} m_3 \mathbf{J}_{\mathbf{v_3}} + \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{3}}^{\intercal} I_3 \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{3}}\right)\dot{\mathbf{q}} \tag{2.64}$$

con,

$$\mathbf{J_{v_3}} = \begin{bmatrix} j_{3_{11}} & j_{3_{12}} & j_{3_{13}} & j_{3_{14}} & j_{3_{15}} & j_{3_{16}} & j_{3_{17}} \\ j_{3_{21}} & j_{3_{22}} & j_{3_{23}} & j_{3_{24}} & j_{3_{25}} & j_{3_{26}} & j_{3_{27}} \\ j_{3_{31}} & j_{3_{32}} & j_{3_{33}} & j_{3_{34}} & j_{3_{35}} & j_{3_{36}} & j_{3_{37}} \end{bmatrix} \tag{2.65}$$

$$\mathbf{J_{\omega_3}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ & & & \mathbf{0}_{2\times 7} & & & \end{bmatrix}$$

donde:

$$\begin{aligned}
j_{3_{11}} &= 1 \\
j_{3_{12}} &= 0 \\
j_{3_{13}} &= 0 \\
j_{3_{14}} &= -s_{\psi_u q_1}\left(l_2 s_{q_2} + l_3 s_{q_2 q_3}\right) \\
j_{3_{15}} &= -s_{\psi_u q_1}\left(l_2 s_{q_2} + l_3 s_{q_2 q_3}\right) \\
j_{3_{16}} &= c_{\psi_u q_1}\left(l_2 c_{q_2} + l_3 c_{q_2 q_3}\right) \\
j_{3_{17}} &= l_3 c_{\psi_u q_1} c_{q_2 q_3} \\
j_{3_{21}} &= 0 \\
j_{3_{22}} &= 1 \\
j_{3_{23}} &= 0 \\
j_{3_{24}} &= c_{\psi_u q_1}\left(l_2 s_{q_2} + l_3 s_{q_2 q_3}\right) \\
j_{3_{25}} &= c_{\psi_u q_1}\left(l_2 s_{q_2} + l_3 s_{q_2 q_3}\right) \\
j_{3_{26}} &= s_{\psi_u q_1}\left(l_2 c_{q_2} + l_3 c_{q_2 q_3}\right) \\
j_{3_{27}} &= l_3 s_{\psi_u q_1} c_{q_2 q_3} \\
j_{3_{31}} &= 0 \\
j_{3_{32}} &= 0 \\
j_{3_{33}} &= 1 \\
j_{3_{34}} &= 0 \\
j_{3_{35}} &= 0 \\
j_{3_{36}} &= l_2 s_{q_2} + l_3 s_{q_2 q_3} \\
j_{3_{37}} &= l_3 s_{q_2 q_3}
\end{aligned}$$

2.5.4.3. Ecuaciones de Movimiento

La energía cinética total del sistema está dada por:

$$\begin{aligned} K = \tfrac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^{\intercal}\left(\mathbf{J}_{\mathbf{v_u}}^{\intercal} m_u \mathbf{J}_{\mathbf{v_u}} + \mathbf{J}_{\boldsymbol{\omega}_\mathbf{u}}^{\intercal} I_u \mathbf{J}_{\boldsymbol{\omega}_\mathbf{u}}\right)\dot{\mathbf{q}} + \ldots \\ \ldots + \tfrac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^{\intercal}\sum_{i=1}^{3}\left(\mathbf{J}_{\mathbf{v_i}}^{\intercal} m_i \mathbf{J}_{\mathbf{v}_i} + \mathbf{J}_{\boldsymbol{\omega}_i}^{\intercal} I_i \mathbf{J}_{\boldsymbol{\omega}_i}\right)\dot{\mathbf{q}} \end{aligned} \tag{2.66}$$

Sustituyendo los Jacobianos, masas y momentos de inercia resulta:

$$K = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^{\intercal}\bar{\mathbf{M}}\left(\mathbf{q}\right)\dot{\mathbf{q}} \tag{2.67}$$

La energía potencial del sistema se determina mediante:

$$U = m_u g \mathbf{z}_0 \mathbf{p}_\mathbf{u} + \sum_{i=1}^{3} m_i g \mathbf{z}_0 \mathbf{p}_i \tag{2.68}$$

donde, el vector $\mathbf{z}_0$ esta dado por $\mathbf{z}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{\intercal}$ y g es la gravedad.

Sustituyendo las energías cinética y potencial en la Ecuación (2.52) de Euler-Lagrange, resulta:

$$\mathcal{L}\left(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}\right) = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^{\intercal}\bar{\mathbf{M}}\left(\mathbf{q}\right)\dot{\mathbf{q}} - U\left(\mathbf{q}\right) \tag{2.69}$$

Los torques y fuerzas del sistema están determinados por [70]:

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{L}}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right) - \left(\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{L}}}{\partial \mathbf{q}}\right) \tag{2.70}$$

donde,$\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de torques y fuerzas asociados a las coordenadas generalizadas del manipulador aéreo compuesto por:

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} f_{x_u} & f_{y_u} & f_{z_u} & \tau_{\psi_u} & \tau_{q_1} & \tau_{q_2} & \tau_{q_3} \end{bmatrix}^{\intercal} \tag{2.71}$$

La derivada de $\boldsymbol{\mathcal{L}}\left(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}\right)$ con respecto al vector $\dot{\mathbf{q}}$ resulta:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{L}}\left(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}\right)}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\left(\dot{\mathbf{q}}^{\intercal}\bar{\mathbf{M}}\left(\mathbf{q}\right)\dot{\mathbf{q}}\right) = \bar{\mathbf{M}}\left(\mathbf{q}\right)\dot{\mathbf{q}} \tag{2.72}$$

Ahora, derivando con respecto al tiempo la Ecuación (2.72) resulta:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{L}}\left(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}\right)}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right) = \bar{\mathbf{M}}\left(\mathbf{q}\right)\ddot{\mathbf{q}} + \dot{\bar{\mathbf{M}}}\left(\mathbf{q}\right)\dot{\mathbf{q}} \tag{2.73}$$

Finalmente, la derivada de $\boldsymbol{\mathcal{L}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ con respecto al vector de coordenadas generales $\mathbf{q}$ es:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}\left(\dot{\mathbf{q}}^{\intercal}\bar{\mathbf{M}}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}\right)\right) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}(U(\mathbf{q})) \tag{2.74}$$

Las ecuaciones de movimiento escritas en forma matricial que representan el modelo dinámico del espacio articular, están dadas por:

$$\boldsymbol{\tau}(t) = \bar{\mathbf{M}}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}(t) + \bar{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}(t) + \bar{\mathbf{g}}(\mathbf{q}) \tag{2.75}$$

donde, $\bar{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{7\times 7}$ es la matriz de masa o inercia del sistema, es una matriz simétrica definida positiva; $\bar{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{7\times 7}$ es la matriz de fuerzas centrípetas y de coriolis determinada por:

$$\bar{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \dot{\bar{\mathbf{M}}}(\mathbf{q}) - \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^{\intercal}\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}\bar{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) \tag{2.76}$$

y $\bar{\mathbf{g}}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{7\times 1}$ es el vector de fuerza gravitacional obtenido mediante:

$$\bar{\mathbf{g}}(\mathbf{q}) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}U(\mathbf{q}) \tag{2.77}$$

El modelo dinámico de la Ecuación (2.75) verifica todas las propiedades detalladas en el Apéndice D.

2.5.4.4. Modelo Dinámico Extendido

En esta sección se describe el modelo dinámico extendido, el cual es el modelo dinámico que incorpora fuerzas y torques externos al modelo dinámico normal de la Ecuación (2.75). Este modelo permite describir la interacción del robot manipulador aéreo con el entorno. Este tipo de modelo es esencial para tareas activas, es decir, tareas que requieren de contacto como manipulación de objetos, ensamblaje, robótica colaborativa, trasporte de objetos y entre otras tareas donde las fuerzas/torques externos influyen directamente en el comportamiento y control del manipulador aéreo.

Considerando el modelo dinámico estándar de la Ecuación (2.75), el modelo dinámico del manipulador aéreo considerando las fuerza y pares externos esta

representado por la siguiente expresión:

$$\bar{\mathbf{M}}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}(t) + \bar{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})(t) + \bar{\mathbf{g}}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau}(t) - \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{ext}}(t) \tag{2.78}$$

donde, $\boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{ext}} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de fuerza/torques externos en el espacio articular. Compuesto por:

$$\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{ext}} = \begin{bmatrix} f_{x_{ue}} & f_{y_{ue}} & f_{z_{ue}} & \tau_{\psi_{ue}} & \tau_{q_{1e}} & \tau_{q_{2e}} & \tau_{q_{3e}} \end{bmatrix}^\intercal \tag{2.79}$$

Ahora, considerando la relación Fuerza-Par [70, 73] definida por:

$$\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{ext}} = \mathbf{J}_{\mathbf{c}}(\mathbf{q})^\intercal \mathbf{f}_{\mathbf{ext}} \tag{2.80}$$

donde, $\mathbf{f}_{\mathbf{ext}} \in \mathbb{R}^m$ es la fuerza externa de interacción con el entorno, compuesta por las fuerzas ejercidas en $X - Y - Z$ y el torque de rotación, tal que:

$$\mathbf{f}_{\mathbf{ext}} = \begin{bmatrix} f_{x_{ext}} & f_{y_{ext}} & f_{z_{ext}} & \tau_{o_{ext}} \end{bmatrix}^\intercal \tag{2.81}$$

y $\mathbf{J}_{\mathbf{c}}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ es la matriz jacobiana del robot que relaciona la fuerza y par del espacio articular del robot definida en la Ecuación (2.29), de tal manera que:

$$\mathbf{J}_{\mathbf{c}}(\mathbf{q}) = \mathbf{T}(\mathbf{q})\mathbf{J}(\mathbf{q}) \tag{2.82}$$

Entonces, considerando la Ecuación (2.80) en la Ecuación (2.78) resulta:

$$\bar{\mathbf{M}}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}(t) + \bar{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})(t) + \bar{\mathbf{g}}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau}(t) - \mathbf{J}_{\mathbf{c}}^\intercal \mathbf{f}_{\mathbf{ext}}(t) \tag{2.83}$$

Ademas, el vector de fuerzas/torque del espacio articular descrito en el sistema de referencia del hexarrotor $\{\mathcal{F}_{\mathrm{u}}\}$ está definido por la siguiente expresión:

$$\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{ext}}(t) = \mathbf{T}(\mathbf{q})\mathbf{f}_{\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{ext}}}(t) \tag{2.84}$$

donde, $\mathbf{f}_{\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{ext}}} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{\mathbf{u}_{\mathbf{ext}}}{}^\intercal & \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{a}_{\mathbf{ext}}}{}^\intercal \end{bmatrix}^\intercal$ es el vector de fuerza y torque descrito en el espacio articular del sistema de referencia móvil y esta conformado por:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{\mathbf{u}_{\mathbf{ext}}} &= \begin{bmatrix} f_{f_{ext}} & f_{l_{ext}} & f_{e_{ext}} & \tau_{\psi_{ext}} \end{bmatrix}^\intercal \\ \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{a}_{\mathbf{ext}}} &= \begin{bmatrix} \tau_{q_{1ext}} & f_{q_{2ext}} & f_{q_{3ext}} \end{bmatrix}^\intercal \end{aligned} \tag{2.85}$$

2.5.4.5. Modelo Dinámico en Función a Velocidades

Ahora, representemos el vector de velocidades de coordenadas generalizadas $\dot{\mathbf{q}}$ en términos del vector velocidad de la plataforma aérea por la igualdad $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{T}(\mathbf{q})\,\boldsymbol{\mu}$. Donde, $\mathbf{T}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{7\times 7}$ es la matriz que transforma las velocidades asociadas en el marco fijo $\{\mathcal{F}_{\mathrm{w}}\}$ al marco de referencia móvil del hexarrotor $\{\mathcal{F}_{\mathrm{u}}\}$; y $\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} v_f & v_l & v_e & \omega & \dot{q}_1 & \dot{q}_2 & \dot{q}_3 \end{bmatrix}^{\intercal}$ es el vector de velocidades de maniobrabilidad del robot. La aceleración $\ddot{\mathbf{q}}$ es obtenida a partir de la derivada, tal que:

$$\ddot{\mathbf{q}} = \frac{d}{dt}\left(\mathbf{T}(\mathbf{q})\,\mu\right) = \mathbf{T}(\mathbf{q})\,\dot{\boldsymbol{\mu}} + \dot{\mathbf{T}}(\mathbf{q})\,\boldsymbol{\mu} \tag{2.86}$$

El modelo dinámico extendido expresado en función de las velocidades, aceleraciones en el marco referencial móvil $\{\mathcal{F}_{\mathrm{u}}\}$, se define como:

$$\begin{aligned}\mathbf{T}(\mathbf{q})(\mathbf{f}_{\boldsymbol{\tau}} - \mathbf{f}_{\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{ex}}}) =& \bar{\mathbf{M}}(\mathbf{q})\,\mathbf{T}(\mathbf{q})\dot{\boldsymbol{\mu}} + \bar{\mathbf{g}}(\mathbf{q}) + \ldots \\ &\ldots + \left[\left(\bar{\mathbf{C}}(\mathbf{q},\boldsymbol{\mu})\,\mathbf{T}(\mathbf{q}) + \bar{\mathbf{M}}(\mathbf{q})\,\dot{\mathbf{T}}(\mathbf{q})\right)\right]\boldsymbol{\mu}\end{aligned} \tag{2.87}$$

despejando las fuerzas resulta:

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_{\boldsymbol{\tau}} - \mathbf{f}_{\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{ex}}} =& \left[\mathbf{T}(\mathbf{q})^{-1}\bar{\mathbf{M}}(\mathbf{q})\,\mathbf{T}(\mathbf{q})\right]\dot{\boldsymbol{\mu}} + \left[\mathbf{T}(\mathbf{q})^{-1}\bar{\mathbf{g}}(\mathbf{q})\right] + \ldots \\ &\ldots + \left[\mathbf{T}(\mathbf{q})^{-1}\left(\bar{\mathbf{C}}(\mathbf{q},\boldsymbol{\mu})\,\mathbf{T}(\mathbf{q}) + \bar{\mathbf{M}}(\mathbf{q})\,\dot{\mathbf{T}}(\mathbf{q})\right)\right]\boldsymbol{\mu}\end{aligned} \tag{2.88}$$

donde, $\mathbf{f}_{\tau} = \begin{bmatrix}\mathbf{f_u}^{\intercal} & \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{a}}{}^{\intercal}\end{bmatrix}^{\intercal}$ es el vector de fuerzas y torques del robot manipulador aéreo y está compuesto por:

$$\begin{aligned}\mathbf{f_u} &= \begin{bmatrix} f_f & f_l & f_e & \tau_{\psi_u}\end{bmatrix}^{\intercal} \\ \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{a}} &= \begin{bmatrix}\tau_{q_1} & \tau_{q_2} & \tau_{q_3}\end{bmatrix}^{\intercal}\end{aligned} \tag{2.89}$$

Ahora, para transformar el modelo dinámico del manipulador aéreo en función de velocidades de referencia, obtenemos primero la transformación de los pares del brazo robótico en función de las velocidades considerando los electro servo-actuadores. Los torques aplicados en las articulaciones del brazo robótico están calculador por:

$$\tau_i = \frac{k_a}{r_a}\left(\upsilon_{t_i} - k_b\dot{q}_i\right) \quad i = 1,2,3 \tag{2.90}$$

donde, $\dot{q}_i$ representa la velocidad angular producida por cada articulación; k_a es la constante de torque multiplicada por la constante de reducción; r_a es la resistencia de armadura del motor; k_b es la constante contra electromotriz multiplicada por la constante de reducción; y v_{t_i} es el voltaje aplicado a cada motor. Por otro lado, los voltajes del motor son controlados por un controlador PD, que es común en motores comerciales para seguir velocidades de referencia. El modelo del controlador está descrito por:

$$v_{t_i} = k_p \left(\dot{q}_{i_{ref}} - \dot{q}_i \right) - k_d \ddot{q}_i \tag{2.91}$$

donde, $\dot{q}_{i_{ref}}$ es la velocidad angular de referencia; y $\ddot{q}_i$ es la aceleración angular producida por los motores. Sustituyendo la ecuación ((2.91)) en la ecuación del torque de cada motor ((2.90)) resulta:

$$\tau_i = \frac{k_a}{r_a} \left(k_p \dot{q}_{i_{ref}} - \left(k_p - k_b \right) \dot{q}_i - k_d \ddot{q}_i \right) \tag{2.92}$$

El vector de torque del brazo robótico $\tau_{\mathbf{a}}$ está determinado por:

$$\tau_{\mathbf{a}} = \mathbf{G_p} \dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{a_{ref}}} - \left(\mathbf{G_p} + \mathbf{G_b} \right) \dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{a}} - \mathbf{G_d} \ddot{\mathbf{q}}_{\mathbf{a}} \tag{2.93}$$

donde,

$$\begin{aligned} \mathbf{G_p} &= \left(\tfrac{k_a k_p}{r_a} \right) \mathbf{I}_{3\times 3} \\ \mathbf{G_d} &= \left(\tfrac{k_a k_d}{r_a} \right) \mathbf{I}_{3\times 3} \\ \mathbf{G_b} &= \left(\tfrac{k_a k_b}{r_a} \right) \mathbf{I}_{3\times 3} \end{aligned} \tag{2.94}$$

Ahora, como el hexarrotor es un robot que recibe comandos de velocidad de referencia, se asume que el control interno (actitud y altitud) del hexarrotor tiene controladores de tipo PD. El robot tiene cuatro controladores que manejan las tres velocidades lineales y la velocidad rotacional (guiñada). Como primera parte, tenemos la expresión de la fuerza que se genera en cada dirección del robot en función de las velocidades [74]. Además, según las propiedades aerodinámicas [75, 76], existe una velocidad que se opone a la fuerza de empuje de los rotores en cada dirección de la plataforma. Por tanto, la expresión de la fuerza total ejercida por el robot viene dada por:

$$f_i = k_{fi} \left(t_i - k_{ti} v_i \right) \quad i = f, l, e \tag{2.95}$$

donde, t_i es el empuje del hexarrotor; k_{ti} es una constante que transforma la velocidad actual v_i en empuje opuesto debido a efectos aerodinámicos; y k_{fi} es una constante de arrastre que transforma en fuerza de desplazamiento lineal. Ahora, se supone que el control interno del hexarrotor tiene controladores PD para el empuje, por lo tanto, el empuje en las tres direcciones es:

$$t_i = k_p \left(v_{i_{ref}} - v_i\right) - k_d \dot{v}_i \tag{2.96}$$

Como en la Ecuación (2.95), se supone que el torque rotacional producido por el hexarrotor viene dado por:

$$\tau_{\psi_u} = k_\tau \left(t_{\psi_u} - k_{\psi_u}\omega\right) \tag{2.97}$$

Y el controlador tipo PD para el torque rotacional t_{ψ_u} del robot es:

$$t_{\psi_u} = k_p \left(\omega_{ref} - \omega\right) - k_d \dot{\omega} \tag{2.98}$$

En general, las fuerzas para el desplazamiento lineal y el par de rotación del robot se definen por:

$$\begin{aligned} f_i &= k_{fi} k_p v_{i_{ref}} - \left(k_{fi} k_p + k_{f_i} k_t\right) v_i - k_{fi} k_d \dot{v}_i \quad i = f, l, e \\ \tau_{\psi_u} &= k_\tau k_p \omega_{ref} - \left(k_\tau k_p + k_\tau k_{\psi_u}\right) \omega - k_\tau k_d \dot{\omega} \end{aligned} \tag{2.99}$$

Entonces, las fuerzas para el desplazamiento lineal y el par rotacional del robot se calculan mediante:

$$\mathbf{f_u} = \mathbf{G_{p1}} \mathbf{v_{u_{ref}}} - \left(\mathbf{G_{p1}} + \mathbf{G_{b1}}\right) \mathbf{v_u} - \mathbf{G_{d1}} \dot{\mathbf{v}}_\mathbf{u} \tag{2.100}$$

donde, $\mathbf{v_{u_{ref}}} \in \mathbb{R}^4$ es el vector de comandos de velocidad de referencia del hexarrotor, compuesto por:

$$\mathbf{v_{u_{ref}}} = \begin{bmatrix} v_{f_{ref}} & v_{l_{ref}} & v_{e_{ref}} & \omega_{f_{ref}} \end{bmatrix}^\mathsf{T} \tag{2.101}$$

$\mathbf{v_u} \in \mathbb{R}^4$ el vector de velocidades lineales actuales que genera el hexarrotor,

$$\mathbf{v_u} = \begin{bmatrix} v_f & v_l & v_e & \omega \end{bmatrix}^\mathsf{T} \tag{2.102}$$

y $\dot{\mathbf{v}}_\mathbf{u} \in \mathbb{R}^4$ es el vector de aceleración del hexarrotor conformado por:

$$\dot{\mathbf{v}}_\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \dot{v}_f & \dot{v}_l & \dot{v}_e & \dot{\omega} \end{bmatrix}^\mathsf{T} \tag{2.103}$$

Las matrices que representan la transformación de fuerzas en velocidades de referencia están definidas por:

$$\mathbf{G_{p1}} = \begin{bmatrix} k_{pf} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{pl} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{pe} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{p\psi} \end{bmatrix} \quad \mathbf{G_{b1}} = \begin{bmatrix} k_{tf} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{tl} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{te} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{t\psi} \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{G_{d1}} = \begin{bmatrix} k_{df} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{dl} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{de} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{d\psi} \end{bmatrix} \tag{2.104}$$

Entonces, expresando el sistema en velocidades de referencia del hexarrotor y del brazo robótico, resulta:

$$\mathbf{f_\tau} = \mathbf{G_{f_p}}\mu_{\mathbf{ref}} - \mathbf{G_{f_b}}\mu - \mathbf{G_{f_d}}\dot{\mu} \tag{2.105}$$

donde, $\boldsymbol{\mu_{\mathbf{ref}}} \in \mathbb{R}^7$ es el vector de velocidades de referencia del robot manipulador aéreo:

$$\boldsymbol{\mu_{\mathbf{ref}}} = \begin{bmatrix} \mathbf{v_{u_{ref}}}^\intercal & \dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{a_{ref}}}{}^\intercal \end{bmatrix}^\intercal \tag{2.106}$$

$\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^7$ es el vector de velocidades del robot, con:

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \mathbf{v_u}^\intercal & \dot{\mathbf{q}}_\mathbf{a}{}^\intercal \end{bmatrix}^\intercal \tag{2.107}$$

$\dot{\boldsymbol{\mu}} \in \mathbb{R}^7$ es el vector de aceleración del robot, con:

$$\dot{\boldsymbol{\mu}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{v}}_\mathbf{u}{}^\intercal & \ddot{\mathbf{q}}_\mathbf{a}{}^\intercal \end{bmatrix}^\intercal \tag{2.108}$$

y $\mathbf{G_{f_p}}, \mathbf{G_{f_b}}, \mathbf{G_{fd}} \in \mathbb{R}^{\mathbf{7\times 7}}$ son las matrices compuestas por los parámetros dinámicos del sistema para transformar fuerzas y torques a velocidades:

$$\mathbf{G_{f_p}} = \begin{bmatrix} \mathbf{G_{p1}} & \mathbf{0_{3\times 3}} \\ \mathbf{0_{3\times 4}} & \mathbf{G_p} \end{bmatrix} \quad \mathbf{G_{f_b}} = \begin{bmatrix} \mathbf{G_{p1}} + \mathbf{G_{b1}} & \mathbf{0_{3\times 3}} \\ \mathbf{0_{3\times 4}} & \mathbf{G_p} + \mathbf{G_b} \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{G_{fd}} = \begin{bmatrix} \mathbf{G_{d1}} & \mathbf{0_{3\times 3}} \\ \mathbf{0_{3\times 4}} & \mathbf{G_d} \end{bmatrix} \tag{2.109}$$

Ahora, considerando el modelo dinámico del robot de la Ecuación (2.87) y la Ecuación (2.105) resulta:

$$\begin{aligned}\mathbf{G_{f_p}}\boldsymbol{\mu_{ref}} - \mathbf{G_{f_b}}\boldsymbol{\mu} - \mathbf{G_{f_d}}\dot{\boldsymbol{\mu}} = \left[\mathbf{T}(\mathbf{q})^{-1}\bar{\mathbf{M}}\left(\mathbf{q}\right)\mathbf{T}\left(\mathbf{q}\right)\right]\dot{\boldsymbol{\mu}} + ... \\ ... + \left[\mathbf{T}(\mathbf{q})^{-1}\Big(\bar{\mathbf{C}}\left(\mathbf{q},\boldsymbol{\mu}\right)\mathbf{T}\left(\mathbf{q}\right) + \bar{\mathbf{M}}\left(\mathbf{q}\right)\dot{\mathbf{T}}\left(\mathbf{q}\right)\Big)\right]\boldsymbol{\mu} + ... \\ ... + \left[\mathbf{T}(\mathbf{q})^{-1}\bar{\mathbf{g}}\left(\mathbf{q}\right)\right] + \mathbf{f}_{\boldsymbol{\tau_{ex}}}\end{aligned} \tag{2.110}$$

despejando la velocidad de referencia,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mu_{ref}} = \mathbf{G}_{\mathbf{f_p}}^{-\mathbf{1}}\left[\mathbf{T}(\mathbf{q})^{-1}\bar{\mathbf{M}}\left(\mathbf{q}\right)\mathbf{T}\left(\mathbf{q}\right) + \mathbf{G_{f_d}}\right]\dot{\boldsymbol{\mu}} + ... \\ ... + \mathbf{G}_{\mathbf{f_p}}^{-\mathbf{1}}\left[\mathbf{T}(\mathbf{q})^{-1}\Big(\bar{\mathbf{C}}\left(\mathbf{q},\boldsymbol{\mu}\right)\mathbf{T}\left(\mathbf{q}\right) + \bar{\mathbf{M}}\left(\mathbf{q}\right)\dot{\mathbf{T}}\left(\mathbf{q}\right)\Big) + \mathbf{G_{f_b}}\right]\boldsymbol{\mu} + ... \\ ... + \mathbf{G}_{\mathbf{f_p}}^{-\mathbf{1}}\left[\mathbf{T}(\mathbf{q})^{-1}\bar{\mathbf{g}}\left(\mathbf{q}\right)\right] + \mathbf{G}_{\mathbf{f_p}}^{-\mathbf{1}}\mathbf{f}_{\boldsymbol{\tau_{ex}}}\end{aligned} \tag{2.111}$$

Por último, el modelo dinámico completo se puede escribir de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{\mu_{ref}}(t) = \mathbf{M}\left(\mathbf{q}\right)\dot{\boldsymbol{\mu}}(t) + \mathbf{C}\left(\mathbf{q},\boldsymbol{\mu}\right)\boldsymbol{\mu}(t) + \mathbf{g}\left(\mathbf{q}\right) + \mathbf{G}_{\mathbf{f_p}}^{-\mathbf{1}}\mathbf{f}_{\boldsymbol{\tau_{ex}}}(t) \tag{2.112}$$

donde,

$$\mathbf{M}\left(\mathbf{q}\right) = \mathbf{G}_{\mathbf{f_p}}^{-1}\left[\mathbf{T}(\mathbf{q})^{-1}\bar{\mathbf{M}}\left(\mathbf{q}\right)\mathbf{T}\left(\mathbf{q}\right) + \mathbf{G_{f_d}}\right] \tag{2.113}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{C}\left(\mathbf{q},\mu\right) = \mathbf{G}_{\mathbf{f_p}}^{-1}\Big[\mathbf{T}(\mathbf{q})^{-1}\bar{\mathbf{C}}\left(\mathbf{q},\mu\right)\mathbf{T}\left(\mathbf{q}\right) + ... \\ ... + \mathbf{T}(\mathbf{q})^{-1}\bar{\mathbf{M}}\left(\mathbf{q}\right)\dot{\mathbf{T}}\left(\mathbf{q}\right) + \mathbf{G_{f_d}}\Big]\end{aligned} \tag{2.114}$$

$$\mathbf{g}\left(\mathbf{q}\right) = \mathbf{G}_{\mathbf{f_p}}^{-1}\mathbf{T}(\mathbf{q})^{-1}\bar{\mathbf{g}}\left(\mathbf{q}\right) \tag{2.115}$$

y

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_{\boldsymbol{\tau_{ext}}}(t) &= \mathbf{T}(\mathbf{q})^{-\mathbf{1}}\mathbf{J_c}(\mathbf{q})^{\intercal}\mathbf{f_{ext}}(t) \\ &= \mathbf{T}(\mathbf{q})^{\intercal}\mathbf{J_c}(\mathbf{q})^{\intercal}\mathbf{f_{ext}}(t) \\ &= (\mathbf{J_c}(\mathbf{q})\mathbf{T}(\mathbf{q}))^{\intercal}\mathbf{f_{ext}}(t) \\ \mathbf{f}_{\boldsymbol{\tau_{ext}}}(t) &= (\mathbf{J}(\mathbf{q}))^{\intercal}\mathbf{f_{ext}}(t)\end{aligned} \tag{2.116}$$

Luego, el vector de la velocidad inducida por la fuerza de interacción con el entorno en el extremo operativo queda expresado como:

$$\boldsymbol{\mu_{ext}}(t) = \mathbf{G}_{\mathbf{f_p}}^{-\mathbf{1}}\mathbf{J}^{\intercal}\mathbf{f_{ext}}(t) \tag{2.117}$$

tal que,

$$\boldsymbol{\mu_{ext}} = \begin{bmatrix} v_{f_{ext}} & v_{l_{ext}} & v_{e_{ext}} & \omega_{ext} & \dot{q}1_{ext} & \dot{q}2_{ext} & \dot{q}3_{ext}\end{bmatrix}^{\intercal} \tag{2.118}$$

Por lo tanto, el modelo dinámico extendido del robot manipulador aéreo en función de las velocidades, con la fuerza de interacción como velocidad externa, queda representado de la siguiente forma:

$$\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{ref}}(t) = \mathbf{M}(\mathbf{q})\dot{\boldsymbol{\mu}}(t) + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\mu})\boldsymbol{\mu}(t) + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{ex}}(t) \tag{2.119}$$

De igual manera, el modelo dinámico del manipulador aéreo sin considerar las fuerzas/torques externos esta representado por:

$$\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{ref}}(t) = \mathbf{M}(\mathbf{q})\dot{\boldsymbol{\mu}}(t) + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\mu})\boldsymbol{\mu}(t) + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \tag{2.120}$$

Observación 2 *El uso del modelo dinámico Ecuación (2.119) o Ecuación (2.120) depende de la tarea definida para el manipulador aéreo.*

2.5.4.6. Modelo Dinámico Bajo Incertidumbres

La Ecuación (2.119) representa el modelo dinámico extendido del Manipulador Aéreo (MA) sin tomar en cuenta perturbaciones externas ni dinámicas no modeladas del robot. El modelo dinámico que considera perturbaciones y errores en el modelado está representado por:

$$\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{ref}}(t) = \mathbf{M}\left(\mathbf{q}\right)\dot{\boldsymbol{\mu}}(t) + \mathbf{C}\left(\mathbf{q}, \boldsymbol{\mu}\right)\boldsymbol{\mu}(t) + \mathbf{g}\left(\mathbf{q}\right) + \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{ex}}(t) - \boldsymbol{\delta}_{\tilde{\boldsymbol{\mu}}}(t) \tag{2.121}$$

donde, $\boldsymbol{\delta}_{\tilde{\boldsymbol{\mu}}}(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de incertidumbres dinámicas. Es un vector que es un vector que depende de las perturbaciones externas y de las dinámicas no modeladas de tal forma que:

$$\boldsymbol{\delta}_{\tilde{\boldsymbol{\mu}}}(t) = f(\boldsymbol{\gamma}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(t), \boldsymbol{\gamma}_{\boldsymbol{\mu}}(t)) \tag{2.122}$$

donde, $\boldsymbol{\gamma}_{\boldsymbol{\varepsilon}} \in \mathbb{R}^n$ es el vector que representa las perturbaciones externas y $\boldsymbol{\gamma}_{\boldsymbol{\mu}} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de las dinámicas no modeladas.

Observación 3 *El vector de perturbación y dinámicas no modeladas del sistema, es tomado en cuenta en el comportamiento del error de control a través del análisis de robustez para los controladores que se proponen.*

2.5.4.7. Propiedades del Modelo Dinámico en Función a Velocidades

Dado que las matrices obtenidas para la transformación a velocidades de referencia del modelo dinámico $\mathbf{G_{f_p}}$, $\mathbf{G_{f_b}}$ y $\mathbf{G_{fd}}$, son matrices definidas positivas, por lo que las propiedades para el modelo dinámico en función a velocidades de la Ecuación (2.119) y Ecuación (2.120) se obtuvieron basándose sen las propiedades del modelo dinámico de la Ecuación 2.75 (Apéndice D), tal que:

- **Propiedad 1:** Matriz $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ es definida positiva y además se tiene que:

$$\|\mathbf{M}(\mathbf{q})\| < k_M \tag{2.123}$$

  donde, $k_M \in \mathbb{R}^+$.

- **Propiedad 2:** Matriz $\mathbf{C}(\mathbf{q})$ cumple con la siguiente desigualdad:

$$\|\mathbf{C}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\mu})\| < k_C \|\boldsymbol{\mu}\| \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n \tag{2.124}$$

  donde, $k_C \in \mathbb{R}^+$.

- **Propiedad 3:** Vector $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ es acotado:

$$\|\mathbf{g}(\mathbf{q})\| < k_G \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n \tag{2.125}$$

  donde, $k_G \in \mathbb{R}^+$.

- **Propiedad 4:** Vector de incertidumbres y perturbaciones $\boldsymbol{\delta}_{\tilde{\boldsymbol{\mu}}}(t)$ se asume es acotado:

$$\|\boldsymbol{\delta}_{\tilde{\boldsymbol{\mu}}}\| \leqslant k_\delta \tag{2.126}$$

  donde, $k_\delta \in \mathbb{R}^+$.

2.5.4.8. Identificación Paramétrica

El método que se emplea para la identificación es a través de Identificación General o de caja negra, donde el objetivo es establecer las relaciones entrada-salida del sistema, sin hacer interpretaciones físicas sobre la composición del modelo matemático. Con el objetivo de realizar la identificación de parámetros del modelo del robot manipulador móvil aéreo, se propone realizar la identificación mediante la minimización de una función objetivo:

$$\text{mín } f\left(\boldsymbol{\vartheta}\right) \tag{2.127}$$

donde, $\boldsymbol{\vartheta} \in \mathbb{R}^{\eta}$ es el vector de dimensión η que representa los parámetros del sistema a identificar. La función a optimizar para encontrar los parámetros viene dada por:

$$f\left(\boldsymbol{\vartheta}\right) = \|\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{xi}} - \bar{\boldsymbol{\mu}}\| \tag{2.128}$$

tal que, $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{xi}}$ es el vector de velocidad de referencia que excita al robot real; $\bar{\boldsymbol{\mu}}$ es la velocidad proporcionada por el modelo dinámico obtenido a partir de los datos reales del robot y se calcula mediante:

$$\bar{\boldsymbol{\mu}}(t) = \mathbf{M}\left(\mathbf{q}^0\right)\dot{\boldsymbol{\mu}}^0(t) + \mathbf{C}\left(\mathbf{q}^0, \boldsymbol{\mu}^0\right)\boldsymbol{\mu}^0(t) + \mathbf{g}\left(\mathbf{q}^0\right) \tag{2.129}$$

donde, $\mathbf{q}^0$, $\boldsymbol{\mu}^0$ y $\dot{\boldsymbol{\mu}}^0$ son los vectores de las posiciones, velocidades y aceleraciones reales obtenidas del sistema robótico. Estas variables son obtenidas mediante lecturas de velocidad y las aceleraciones del robot, que al ser datos reales contienen ruido. Por tanto, la aceleración $\dot{\boldsymbol{\mu}}^0$ se estima a partir de un filtro de primer orden $f\left(s\right) = \frac{\lambda}{s+\lambda}$ con $\lambda > 0$.

La identificación de los parámetros se realiza mediante el algoritmo de optimización Quasi-Newton [77]. Se trata de un método de búsqueda lineal que resuelve un subproblema de minimización aproximando el hessiano del lagrangiano. Cuando el valor de $f\left(\boldsymbol{\vartheta}\right)$ alcanza un mínimo, la búsqueda proporciona el vector de parámetros $\boldsymbol{\vartheta}$ que cumplen con la minimización de la función.

El modelo dinámico tiene un total de veintisiete parámetros ($\eta = 27$), que representan combinaciones no lineales de masas de eslabones, momentos de inercia del hexarrotor y de los eslabones del brazo robótico, entre otros parámetros que componen el modelo dinámico. El modelo dinámico en función a los parámetros se describe en el Apéndice E, en el Apéndice F se describe de mejor manera el proceso de identificación y validación del modelo dinámico ante varias señales de referencia, mientras que, en el Apéndice F.3 se presenta la tabla con los valores obtenidos de los parámetros del modelo dinámico.

2.5.4.9. Modelo Dinámico Parametrizado

Una de las propiedades del modelo dinámico es la linealidad en los parámetros (ver Apéndice D). Por lo tanto, la representación general del modelo dinámico se puede expresar como:

$$\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{ref}}(t) = \mathbf{M}(\mathbf{q})\dot{\boldsymbol{\mu}}(t) + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\mu})\boldsymbol{\mu}(t) + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{Y}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\mu}, \dot{\boldsymbol{\mu}})\boldsymbol{\vartheta} \tag{2.130}$$

donde, $\mathbf{Y}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\mu}, \dot{\boldsymbol{\mu}}) \in \mathbb{R}^{n\times\eta}$ es la matriz compuesta por los vectores de velocidades del robot y las variables de las coordenadas generalizadas; y $\boldsymbol{\vartheta} \in \mathbb{R}^{\eta}$ es el vector de los parámetros de relaciones no lineales de parámetros físicos del robot, como masas, momentos de inercia, entre otros. Por lo tanto, el sistema es linealizable mediante retroalimentación, es decir, existe una transformación no lineal tal que el sistema transformado es lineal y controlable.

2.6. Modelo de Proyección de Cámara

Como se conoce existe múltiples maneras de proporcionar información a un robot para realizar el control autónomo. Una de estas es la obtención de datos a través de imágenes es decir, información proporcionada por un sistema de visión por computador. Para esto, es necesario comprender aspectos geométricos del proceso de captura de imágenes y transformar a datos entendibles por el robot.

Para detallar los datos obtenidos de la cámara, en otras palabras, describir un punto en el espacio tridimensional proyectado en el plano de imagen que es un plano bidimensional, se utiliza el modelo de proyección de perspectiva denominado pin-hole [78, 79]. Es un modelo geométrico utilizado en visión por computadora y en robótica, que describe cómo se proyectan los puntos de un espacio tridimensional (3D) sobre el plano bidimensional (2D) de una imagen capturada por la cámara. Se fundamenta en el concepto de una cámara estenotipia (pinhole), asumiendo que es una cámara ideal sin distorsión óptica.

En la Figura 2.6 se presenta la interpretación geométrica del modelo de la cámara pinhole, donde, el eje óptico (Optical Axis) está alineado con el eje-Z_c del sistema de referencia de la cámara $\{\mathcal{F}_{\mathrm{c}}\}$, la distancia entre el origen del sistema de referencia de la cámara C se denomina longitud focal (Focal Lenght) f . Ahora, se $\mathcal{F}_{\mathrm{c}} = \{\mathcal{C}, X_C, Y_C, Z_C\}$ es el marco de referencia de la cámara y $\mathcal{F}_{\mathrm{I}} = \{\mathcal{I}, U_I, V_I\}$ el marco de referencia del plano de la imagen, donde se proyecta la posición del objetivo de interés (3D) o Features Points en (2D); y ${}^{\mathbf{c}}\mathbf{p_i} \in \mathbb{R}^3$ es el vector de posición 3D del i-ésimo punto de interés del objetivo respecto al sistema de referencia de la cámara $\{\mathcal{F}_{\mathrm{c}}\}$ descrito por:

$$ {}^{\mathbf{c}}\mathbf{p_i} = \begin{bmatrix} {}^{c}x_i & {}^{c}y_i & {}^{c}z_i \end{bmatrix}^{\intercal} \in \mathbb{R}^3 \tag{2.131} $$

Entonces, la proyección en perspectiva del i-esimo punto característico del objeto en el plano de la imagen $\{\mathcal{F}_{\mathrm{I}}\}$ genera el vector de características de la imagen

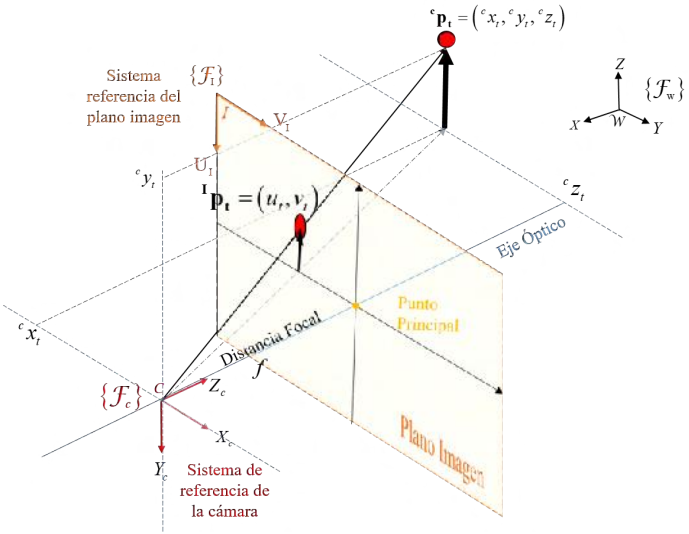


Figura 2.6: Modelo de cámara pinhole.

$\boldsymbol{\eta}_i = \begin{bmatrix} u_i & v_i \end{bmatrix}^\intercal \in \mathbb{R}^2$, determinado por:

$$\boldsymbol{\eta}_i({}^c x_i, {}^c y_i, {}^c z_i) = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} = -\frac{f}{{}^c z_i} \begin{bmatrix} {}^c x_i \\ {}^c y_i \end{bmatrix} \tag{2.132}$$

donde, $f \in \mathbb{R}^+$ es la distancia focal de la cámara y u_i, v_i son las características de un objetivo de interés, que son extraídas de las imágenes que captura la cámara. Ahora, la derivada temporal de la Ecuación (2.132) está dada por:

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = -f \begin{bmatrix} \frac{1}{{}^c z_{o_i}} & 0 & -\frac{{}^c x_{o_i}}{{}^c z_{o_i}^2} \\ 0 & \frac{1}{{}^c z_{o_i}} & -\frac{{}^c y_{o_i}}{{}^c z_{o_i}^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^c \dot{x}_{o_i} \\ {}^c \dot{y}_{o_i} \\ {}^c \dot{z}_{o_i} \end{bmatrix} \tag{2.133}$$

Esta conversión se utiliza en técnicas de control servo-visual IBVS (Image-Based Visual Servoing). IBVS es una técnica de control en robótica que utiliza directamente las características de los puntos de interés $\boldsymbol{\eta}_i$ que son extraídas de las imágenes capturadas por una cámara para controlar el movimiento de un robot. Otra de las aplicaciones de esta conversión matemática es que nos permite detectar la profundidad de objetos utilizando la técnica denominada Visión Estéreo

2.6.1. Vision Estéreo

La visión estéreo permite detectar la profundidad de un objeto utilizando dos cámaras separadas por una distancia conocida, imitando la percepción de profundidad del sistema visual humano. El principio fundamental se basa en la disparidad entre las imágenes capturadas por cada cámara. Las ecuaciones matemáticas están basadas en la geometría epipolar y la triangulación estéreo para calcular la profundidad de un punto en el espacio tridimensional. La Figura 2.7 presenta el esquema de la geometría epipolar para visión estéreo.

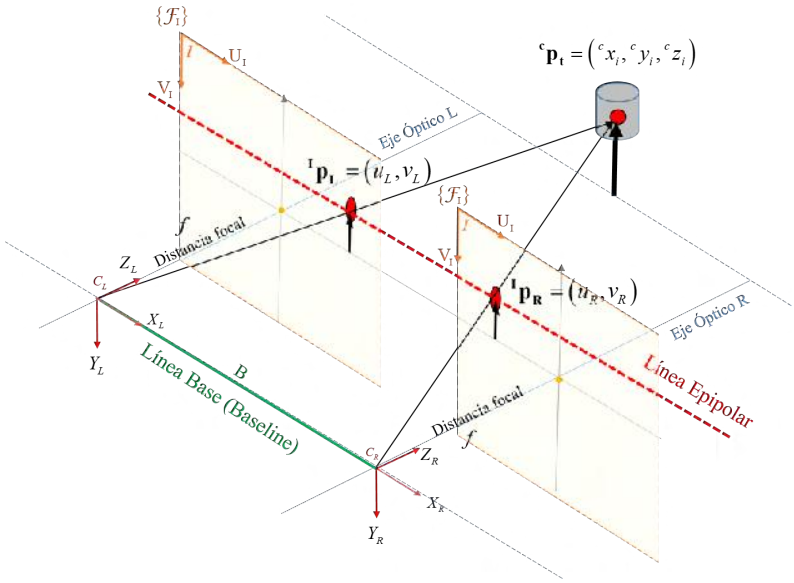


Figura 2.7: Geometría epipolar para visión estéreo.

Esta gráfica representa la configuración de una cámara estéreo, la cual cuenta con dos cámaras separadas por una distancia conocida B línea base (Baseline). Las dos cámaras capturan de forma simultánea dos imágenes (frames) de la misma escena desde dos puntos diferentes.

Ahora, observando las figuras se puede identificar el punto 3D en cada plano

imagen de cada cámara con coordenadas:

$$ {}^{\mathbf{I}}\mathbf{p_L} = (u_L, u_L) \quad {}^{\mathbf{I}}\mathbf{p_R} = (u_R, u_R) \tag{2.134} $$

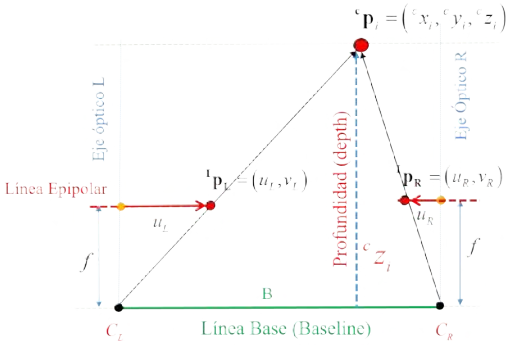


Figura 2.8: Plano de geometría epipolar.

La Figura 2.8 presenta el plano epipolar que se forma mediante las geometría mostrada en la Figura 2.7 [79], suponiendo cámaras ideales, es decir, cámaras estenopeicas. Por lo tanto, el sistema de coordenadas de la cámara estéreo puede escribirse, a partir de triángulos similares (ver Figura 2.7), entonces, para la cámara izquierda resulta la siguiente relación:

$$ \begin{aligned} \frac{u_L}{f} &= \frac{{}^c x_i}{{}^c z_i} \\ u_L \, {}^c z_i &= f \, {}^c x_i \end{aligned} \tag{2.135} $$

donde, ${}^c z_i$ es la profundidad (depth) del punto 3D respecto al marco referencial de la cámara. Luego, tomando como referencia el marco de coordenadas 3D en el origen en el centro óptico de la cámara izquierda $\{C_L\}$, se tiene la siguiente relación de triángulos para la cámara derecha:

$$ \begin{aligned} -\frac{u_R}{f} &= \frac{B - {}^c x_i}{{}^c z_i} \\ -u_R \, {}^c z_i &= Bf - f \, {}^c x_i \end{aligned} \tag{2.136} $$

Sustituyendo el resultado de la Ecuación (2.135) en la Ecuación (2.136) resulta:

$$\begin{aligned} -u_R {}^c z_i &= Bf - u_L {}^c z_i \\ u_L {}^c z_i - u_R {}^c z_i &= Bf \\ {}^c z_i &= B\frac{f}{u_L - u_R} \end{aligned} \tag{2.137}$$

De esto resulta que una constante típica de este tipo de cámaras determinada por la diferencia entre las posiciones de los píxeles en las imágenes izquierda y derecha es la disparidad d medida en pixeles, tal que:

$$d = u_L - u_R$$

Por lo tanto, la profundidad de la imagen respecto al sistema de referencia de la cámara está determinado por:

$${}^c z_i = f\frac{B}{d}$$

Esto demuestra que la profundidad de un objeto es inversamente proporcional a la disparidad, es decir, que cuanto más cerca está un objeto, mayor es su desplazamiento entre las imágenes de ambas cámaras.

Por último, calculemos el valor de las coordenadas del punto en el espacio respecto a la cámara. Primero, en la Ecuación (2.135) sustituimos el valor de la profundidad ${}^c z_i$, obteniendo:

$${}^c x_i = u_L \frac{B}{d} \tag{2.138}$$

Ahora, como se considera cámaras ideales se tiene $v_L = v_R$ y tomando la otra relación de triangulo similares:

$$\begin{aligned} \frac{u_L}{f} &= \frac{{}^c y_i}{{}^c z_i} \\ u_L &= f\frac{{}^c y_i}{{}^c z_i} \end{aligned} \tag{2.139}$$

Reemplazando ${}^c z_i$ resulta:

$$^{c}y_i = v_{_L} \frac{B}{d} \tag{2.140}$$

Por lo tanto, la profundidad y las coordenadas espaciales del punto 3D están dados por:

$$^{c}z_i = f\frac{B}{d} \quad ^{c}x_i = u_{_L}\frac{B}{d} \quad ^{c}y_i = v_{_L}\frac{B}{d} \tag{2.141}$$

Estas relaciones permitirán determinar las coordenadas de un objeto de interés (target) en el espacio 3D utilizando dos cámaras.

CAPÍTULO 3

Control para Manipuladores Aéreos con Prioridad en el Ahorro de Energía

3.1. Introducción

La mayor parte de los robots aéreos tienen la capacidad de trabajar en múltiples entornos para realizar tareas como navegación, inspección, transporte de objetos de un lugar a otro. Teniendo en cuenta la constitución mecánica de los UAVs, estos no suelen tener la capacidad de ejecutar tareas de contacto, es decir, tareas activas como: agarre aéreo, manipulación, transporte e incluso trabajo cooperativo para manipular objetos pesados entre varios robots. Sin embargo, existen múltiples alternativas que permiten al UAV ejecutar una tarea con carga, mediante el uso de cuerdas flexibles montadas en la parte inferior [80]. Por ejemplo, en [25] plantean el control de un cuadrirrotor con cuerda para trasladar objetos de forma autónoma evitando colisionar con obstáculos durante la ejecución de la tarea del UAV; en [26] proponen algo más sofisticado, que permite trasladar objetos

sujetos de una cuerda por medio de dos UAVs. Aunque un vehículo aéreo puede alcanzar y transportar objetos físicos, está limitado en la ejecución de tareas más complejas que requieran mayor precisión. Con el fin de llevar a cabo estas tareas, los sistemas robóticos aéreos pueden incorporar brazos en la estructura mecánica, obteniendo así una gran versatilidad gracias a la cantidad de redundancia que presenta este tipo de robots [81]. La unificación estructural entre el vehículo aéreo y uno o más brazos robóticos se denomina comúnmente robot manipulador aéreo.

Los manipuladores aéreos pueden realizar diversas tareas, que van desde la manipulación de objetos con mayor precisión hasta la realización de tareas a gran escala en lugares inaccesibles para los seres humanos e incluso para otro tipo de robots [82, 83]. Las aplicaciones de los robots aéreos con manipuladores robóticos forman parte actualmente de un amplio campo de estudio; por su parte, en [84] utilizan un manipulador aéreo con dos brazos robóticos montados en la plataforma aérea para girar válvulas en tuberías, donde los robots móviles no tienen acceso. La propuesta tiene en cuenta el contacto físico del robot con el entorno a través de la retroalimentación de fuerza. Por otro lado, en [51] estudian la inspección y mantenimiento en tuberías extensas dentro de industrias petrolíferas o de gas, industrias químicas, y otras industrias que dispongan de tuberías. Para llevar a cabo las tareas de las que disponen los robots manipuladores aéreos, se diseñan controladores que comúnmente se estudian desde una perspectiva general, utilizando la cinemática y dinámica que conforman la configuración del robot. En función del tipo de control requerido, el robot puede estudiarse de forma conjunta o independiente (brazo robótico y vehículo aéreo), donde los puntos de interés dependen de este tipo de análisis. En [85] presentan el modelo matemático del manipulador aéreo con brazo robótico de 2-DOF para trasportar objetos de tamaño reducido de manera autónoma de un lugar a otro; [52] construyen un manipulador aéreo con un brazo robótico de 6-DOF el cual es controlado con cinemática inversa para posicionar el extremo operativo. El sistema se analiza de forma independiente, es decir, no se considera como un único sistema integrado por el robot aéreo y el brazo robótico. Por otro lado, en [55] proponen el uso del manipulador aéreo con el objetivo de abrir y cerrar objetos tipo cajón; el análisis que desarrollan los autores es de forma combinada entre el multirrotor y el brazo robótico. Del mismo modo, en [86] los autores presentan el control de seguimiento de trayectoria del robot, se emplea el modelo cinemático de todo el sistema de forma conjunta localizando el punto de interés a controlar en el extremo operativo del robot. Como se puede observar,

estos sistemas presentan alta adaptabilidad al entorno gracias a su configuración mecánica, donde el brazo robótico suele instalarse en el centro de masa de la plataforma aérea, con el fin de evitar cambios significativos en la dinámica debido a la modificación de los momentos de inercia generados cuando el brazo realiza movimientos para completar el objetivo [31, 56, 87, 88]. Por otro lado, mientras mayor cantidad de actuadores tiene el robot, la autonomía energética será menor en comparación con la autonomía de un simple UAV.

La autonomía de los diferentes robots que actualmente existen en el mercado dependen de la cantidad de energía que consumen para ejecutar los movimientos según las tareas asignadas, incluyendo aquellas que requieren contacto físico. En este contexto, se propone un esquema de control para el seguimiento de camino de un robot manipulador aéreo utilizando el modelo cinemático del sistema. A diferencia de los trabajos existentes [30, 89, 90], el esquema de control aprovecha la redundancia de este tipo de robots, haciendo posible proponer controladores que permiten cumplir varios objetivos de control utilizando una única ley de control. Como objetivo principal que se define es el seguimiento de camino a través del extremo operativo del MA, que a diferencia de trabajos existentes en la literatura, consiste en seguir un camino deseado con velocidad variable en función a parámetros de la tarea deseada [51, 91]. Como objetivo secundario es el ahorro de energía mediante da dotación de recursos al brazo robótico para alcanzar el camino deseado. Esto se consigue mediante la modificación de la estructura interna del robot, lo que permite ejecutar más movimientos con el brazo robótico, es decir, el objetivo secundario es modificar la estructura interna del robot según una estrategia energética. La propuesta se centra en tres tipos de caminos definidos en el espacio de trabajo tridimensional XYZ.

3.2. Formulación del Problema

A pesar de los trascendentales avances tecnológicos alcanzados en robótica [92, 93, 94] un desafío importante en la actualidad es proporcionar mayor autonomía a los UAV. Como se conoce los robots aéreos no tripulados ofrecen grandes ventajas en una gama amplia de aplicaciones a nivel mundial. Sin embargo, debido a los requisitos energéticos, se ven limitados en las distancias a recorrer, por tanto, en la capacidad de cubrir grandes áreas de trabajo. Desafortunadamente, hoy en día los tiempos máximos de vuelo en condiciones ideales de operación son

limitantes para la mayoría de las aplicaciones prácticas, por ejemplo, el Phantom 4 y el Mavic 2 de DJI pueden operar hasta 30 minutos aproximadamente, el AR.Drone alcanza un máximo de 12 minutos y el PARROT ANAFI Drone tiene una autonomía de aproximadamente 25 minutos, esto en condiciones normales de vuelo y a cierta altitud a nivel del mar. Los UAVs requieren que los motores estén en continuo funcionamiento en comparación con otros robots móviles, ya que deben mantener su propio peso en el aire todo el tiempo, por lo que nunca dejan de consumir energía mientras están en funcionamiento.

Se han realizado varios estudios para mejorar la capacidad de los robots aéreos a largo plazo. En [65] analizan tres formas de mejorar la eficiencia energética de los robots aéreos: *i*) Optimización del hardware: en [64] mencionan que el consumo de energía se mejora optimizando el peso del vehículo, es decir, construir los robots con materiales ligeros e incluso reducir el tamaño de los sensores y cámaras a bordo del vehículo; *ii*) Locomoción multimodal: un robot aéreo puede combinarse con otros sistemas de locomoción para evitar el consumo energético de los motores en estado estacionario, por ejemplo, la constitución mecánica del robot para que pueda volar y caminar, este tipo de sistemas se conocen como robots multimodales [65] y; *iii*) Optimización de algoritmos de planificación y control de movimiento: muy poco estudiado, no hay variedad de estudios significativos respecto a este método para mejorar la capacidad energética de un robot aéreo [66, 68]. Por ejemplo, en [95] proponen un control óptimo de un cuadricóptero para el consumo mínimo de energía. Los autores buscan encontrar comandos de control y trayectoria que minimicen la energía consumida por el robot durante la tarea deseada. Para ello, emplean el modelo dinámico del robot y el modelo dinámico de la batería a bordo para estimar el consumo de energía. Basándose en estos modelos proponen el funcional de coste a minimizar para generar los comandos de velocidad que desplazan la aeronave a la posición deseada. Asimismo, existen trabajos que proponen trayectorias óptimas para el menor consumo energético. En [96] proponen mejorar el consumo energético basándose en el modelo dinámico del UAV, desarrollando algoritmos de control para el seguimiento de trayectorias con el fin de obtener información del terreno mediante fotografías y cubrir la mayor superficie posible durante la misión de vuelo. Teniendo en cuenta las restricciones energéticas y la resolución mínima de las imágenes, los autores determinan mediante varias pruebas el modelo aproximado de consumo energético y entonces obtienen la ruta mediante algoritmos de path-planning considerando el consumo de energía del robot. El algoritmo propuesto reduce la velocidad de la aeronave en determinada distancia

por medio de la optimización de un funcional de costo propuesto. Otro trabajo similar se da en [97], para un UAV de seis rotores (hexacóptero), donde minimizan la longitud de la ruta que debe recorrer el robot para alcanzar el objetivo deseado o múltiples objetivos. Sin embargo, este tipo de trabajos mencionados no toman en cuenta la actitud del UAV durante el vuelo.

Los diversos métodos existentes en la actualidad para mejorar el consumo energético de los robots aéreos son propuestos en función de la distancia que el robot tiene que recorrer, significa que se puede optimizar la ruta de viaje del robot siempre y cuando que el robot tenga por objetivo trasladarse de un punto a otro independientemente del camino que siga. Sin embargo, la energía consumida por los robots aéreos autónomos no se centra únicamente en la distancia que recorre el robot para ejecutar la tarea. Existen múltiples factores que afectan al gasto energético del sistema. Así, en [98] se realiza el estudio de la relación entre la navegación y el consumo energético para rutas predefinidas, se cuantifica el gasto energético utilizando el modelo matemático de baterías de polímero de litio (Lipo) que poseen la mayoría de los robots aéreos. En base a los experimentos realizados, se concluye que para ahorrar energía en los cuadrirrotores es necesario minimizar el tiempo de vuelo, como consecuencia de esto el robot tiene que desplazarse lo más rápido posible de un punto a otro. Además, el menor consumo de energía se produce cuando el robot ejecuta trayectorias rectas evitando cambios en las consignas de velocidad, ya que hay un mayor consumo de energía cuando la aeronave cambia bruscamente de rumbo e inversamente [99]. Así pues, se puede observar que si el robot se mueve en trayectorias rectas el error de seguimiento y el consumo de energía son mínimos sin tener en cuenta la velocidad de seguimiento de la trayectoria. Sin embargo, en trayectorias complejas o con curvas pronunciadas, la velocidad de la aeronave afecta en el error de seguimiento, resultando que el error es directamente proporcional a la velocidad ($\tilde{e} \propto v$), lo que es una desventaja en tareas que requieran de mayor precisión.

El caso de estudio de ésta tesis se enfoca en los manipuladores aéreos que tienen una compleja constitución mecánica y electrónica, ya que está formado por varias partes: *i*) Plataforma aérea (UAV), que puede ser cuadrirrotor, hexarrotor, octarrrotor, y entre otros tipos de aeronaves habituales [100, 101]; *ii*) Uno o dos brazos robóticos sobre la estructura de la aeronave, que tienen diferentes grados de libertad en función del tamaño y peso soportado por la plataforma aérea; *iii*) Sensores y actuadores que permiten el movimiento autónomo y la manipulación de objetos de forma segura y precisa; por último, *iv*) Ordenador a bordo capaz de

procesar las señales de los sensores, ejecutar algoritmos avanzados de control y permitir la manipulación coordinada entre la plataforma aérea y el manipulador robótico [102, 103]. Por lo tanto, el robot manipulador aéreo cuenta con mayor número de dispositivos (mecánicos/electrónicos) y consume mayor energía para el desempeño correcto del robot.

En consecuencia, se propone el control del manipulador aéreo con ahorro de energía mientras el extremo operativo del robot sigue con velocidad constante un camino deseado considerando tareas que requieren de mayor precisión (soldadura, ensamble, entre otras) [104, 105]; por lo tanto, los errores de control deben ser los más pequeños posibles. Como el robot tiene que seguir un perfil definido a velocidad constante, las curvas presentes en la tarea generan pérdida de energía producida principalmente por efectos de deslizamiento y corrección de fuerzas centrífugas y centrípetas según la configuración del robot que ejecuta la tarea especificada. Además, es indispensable conocer que la potencia de todo el sistema es equivalente a la suma de las potencias consumidas en cada uno de los dispositivos y actuadores del robot.

$$P_T = P_u + P_m + P_s$$

donde,

$$P_u = \sum_{t=0}^{t_f} \sum_{i=1}^{n} P_{\mathrm{u}i}\,(t) = P_{\mathrm{u}1}\,(t) + P_{\mathrm{u}2}\,(t) + \ldots + P_{\mathrm{u}n}\,(t)$$

representa la potencia total de la plataforma aérea compuesta por la suma de las potencias que consume cada uno de los motores durante todo el tiempo de funcionamiento; P_{m} es la potencia total consumida por el brazo robótico y viene determinada por la suma de las potencias de los motores de enlace durante todo el tiempo de funcionamiento

$$P_{\mathrm{m}} = \sum_{t=0}^{t_f} \sum_{i=1}^{n} P_{\mathrm{m}i}\,(t)$$

esto es:

$$P_{\mathrm{m}} = P_{\mathrm{m}1}\,(t) + P_{\mathrm{m}2}\,(t) + \ldots + P_{\mathrm{m}n}\,(t)$$

y P_s es la potencia consumida por los sensores, computador a bordo, cámara, y entre otros equipos electrónicos del manipulador aéreo que consumen potencia constante mientras el robot está en funcionamiento y está dada por:

$$P_s = \sum_{i=1}^{n} P_{\mathrm{s}i} = P_{\mathrm{s}1} + P_{\mathrm{s}2} + \ldots + P_{\mathrm{s}n}$$

Entonces, el total de energía que consume el sistema robótico se puede determinar mediante:

$$E = P_T t_f$$

donde, t_f es el tiempo total que el sistema está en funcionamiento y P_T es la potencia total. El controlador propuesto minimiza los movimientos de la plataforma aérea durante la ejecución de la tarea, reduciendo así el consumo energético, según [106] donde discuten que los motores consumen la mayor parte de la capacidad energética del robot siendo aproximadamente $95\,\%$ (debido a la masa e inercia de los rotores). Sin embargo, este consumo es mayor cuanto más tiempo está el robot suspendido en el aire. Es evidente que los circuitos eléctricos no tienen un consumo significativo en comparación con los sistemas de propulsión del UAV; por otro lado, se añade el gasto energético debido a las maniobras en vuelo y el consumo energético debido al efecto aerodinámico del sistema que depende directamente de la velocidad del robot. Por lo tanto, se consideran tres observaciones para la propuesta.

Suposición 3.2.1 *Dependiendo de la configuración del brazo robótico, la potencia de los motores está en función de la masa y tamaño de los eslabones; mientras que la potencia consumida por plataforma aérea depende únicamente de los movimientos de maniobra.*

Suposición 3.2.2 *El consumo de energía de la aeronave es significativamente superior al consumo de energía del brazo robótico, ya que el brazo robótico montado en la plataforma aérea es de peso reducido y la potencia de los motores es inferior a la potencia de los motores del UAV.*

Suposición 3.2.3 *Durante la interacción acoplada (hexarrotor + brazo robótico), la extensión o retracción del brazo robótico desplaza el centro de masa del manipulador aéreo e induce momentos que el UAV debe compensar, lo cual puede aumentar transitoriamente su consumo de energía. A pesar de esto, la estrategia de control que se propone prioriza, la ventaja de uso del brazo robótico para reducir maniobras de la plataforma aérea (variaciones de empuje y actitud), con el objetivo de disminuir el consumo total de energía.*

Estos supuestos permiten formular estrategias de control que priorizan el uso de los actuadores del brazo robótico frente a los de la plataforma aérea, favoreciendo la eficiencia energética global del sistema.

En base a lo anterior, en este capítulo se propone un esquema de control enfocado en una estrategia que optimiza el consumo de energía de un robot manipulador aéreo para la tarea de seguimiento de camino. El control se plantea como un esquema coordinado, entendido como la asignación conjunta y complementaria de movimientos entre la plataforma aérea y el brazo robótico, de manera que cada subsistema aporte únicamente el desplazamiento necesario para posicionar correctamente el extremo operativo. Los criterios de diseño considerados son:

1. Variación de la velocidad deseada a lo largo del camino.
2. Reducir los movimientos innecesarios de la plataforma aérea a lo largo del camino. Para esto, el brazo robótico realiza la mayor cantidad de movimientos para posicionar el extremo operativo sobre el camino deseado.

Observación 4 *El consumo energético es medido de todo el sistema (corriente y voltaje total), por lo que los resultados experimentales incorporan el efecto acoplado UAV y brazo robótico.*

3.3. Consideraciones del Modelo Cinemático

Para la propuesta de este controlador, la tarea a cumplir por el extremo operativo se define en el sistema de referencia fijo $\{\mathcal{F}_{\mathrm{w}}\}$ y la orientación considerada es únicamente la orientación del hexarrotor (ψ_u). Por lo tanto, la cinemática directa de la Ecuación (2.38) se reduce a:

$$\mathbf{r}\left(\mathbf{q}\right) = \begin{bmatrix} \mathbf{p_r}\left(\mathbf{q}\right) \\ \psi_u\left(\mathbf{q}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ \psi_u \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

y la cinemática diferencial de la Ecuación (2.42) a:

$$\dot{\mathbf{r}}\left(\mathbf{q}\right) = \mathbf{J}\left(\mathbf{q_u}, \mathbf{q_a}\right) \boldsymbol{\mu}(t) \tag{3.2}$$

donde,

$$\dot{\mathbf{r}}\left(\mathbf{q}\right) = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}_{\mathbf{r}}\left(\mathbf{q}\right) \\ \dot{\psi}_u\left(\mathbf{q}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{r}_x \\ \dot{r}_y \\ \dot{r}_z \\ \dot{\psi}_u \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

es el vector de velocidades lineales del extremo operativo del manipulador aéreo y la velocidad angular del hexarrotor,

$$\mathbf{J}\left(\mathbf{q_u}, \mathbf{q_a}\right) = \begin{bmatrix} \mathbf{J_p}\left(\mathbf{q}\right) \\ \mathbf{J}_{\psi}\left(\mathbf{q}\right) \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

es el Jacobiano del robot y $\boldsymbol{\mu}(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de velocidades de maniobrabilidad (Ecuación (2.45)).

3.4. Propuesta del Controlador

El controlador propuesto tiene como objetivo conseguir que el punto de interés del manipulador aéreo (extremo operativo) siga un camino descrito en el espacio XYZ con respecto al sistema de referencia $\{\mathcal{F}_{\mathrm{w}}\}$. El camino deseado está definido por variable $\boldsymbol{\mathcal{P}}\left(s\right)$ que no está parametrizado en el tiempo y una velocidad deseada υ_d que se considera fija o variable dependiendo de los parámetros de la tarea a ejecutar, lo que difiere de los trabajos encontrados en la literatura [86, 89, 90, 107]. La Figura 3.1 muestra el problema de seguimiento de camino considerado en el presente capítulo.

En este contexto:

$$\boldsymbol{\mathcal{P}}(s) = \begin{bmatrix} p_x\left(s\right) \\ p_y\left(s\right) \\ p_z\left(s\right) \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

es el camino deseado. El camino deseado $\boldsymbol{\mathcal{P}}(s)$ se define a partir de una secuencia discreta y ordenada de puntos en el espacio tridimensional,

$$\boldsymbol{\mathcal{P}}(s) = \left\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_N\right\}, \quad \mathbf{p}_i = \begin{bmatrix} p_{xi} & p_{yi} & p_{zi} \end{bmatrix}^{\intercal} \in \mathbb{R}^3,$$

donde los puntos $\mathbf{p}_i$ están definidos en un orden de recorrido desde el punto inicial $\mathbf{p}_1$ hasta el punto final $\mathbf{p}_N$. Por consiguiente, el parámetro de camino s aumenta de forma uniforme, lo cual define un sentido de seguimiento preestablecido. En consecuencia, las condiciones iniciales y los parámetros utilizados en el controlador se formulan considerando que la dirección deseada de avance del extremo operativo está determinada previa a la ejecución de la tarea.

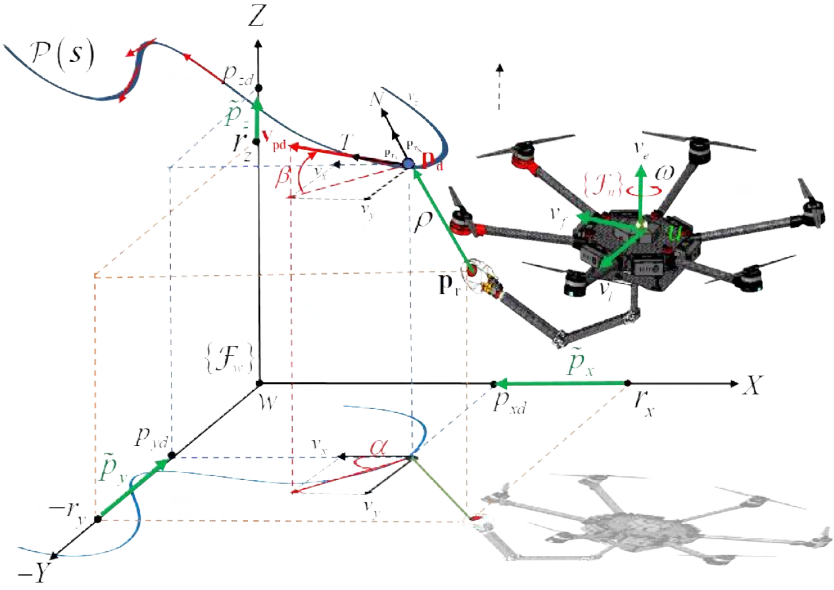


Figura 3.1: Problema de seguimiento de camino.

Luego, el vector:

$$\mathbf{p_d} = \begin{bmatrix} p_{xd} \\ p_{yd} \\ p_{zd} \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

representa el punto del camino más cercano al extremo operativo del robot manipulador aéreo. Este vector se convierte en el punto deseado a seguir. Por lo tanto, el error de control en posición de seguimiento de camino está determinado por:

$$\tilde{\mathbf{p}}_\mathbf{r} = \mathbf{p_d} - \mathbf{p_r} \tag{3.7}$$

escrito como la norma del error resulta:

$$\rho = \|\tilde{\mathbf{p}}_\mathbf{r}\| \tag{3.8}$$

El vector de error está determinado de la siguiente manera:

$$\tilde{\mathbf{p}}_{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} \tilde{p}_x \\ \tilde{p}_y \\ \tilde{p}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{xd} - r_x \\ p_{yd} - r_y \\ p_{zd} - r_z \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

La orientación deseada en cada punto cercano al extremo operativo está dado por ψ_d, de tal manera que el error de orientación del hexarrotor en cada punto cercano al extremo operativo es:

$$\tilde{\psi}_u = \psi_d - \psi_u \tag{3.10}$$

Por otra parte, la dirección de la velocidad del camino está dada por el vector tangente $\mathbf{T_p}$ en $\mathbf{p_d}$, ver la Figura 3.1, donde α representa la orientación de la proyección de $\mathbf{T_p}$ sobre el plano-XY y se mide a partir del eje-X del marco de referencia fijo $\{\mathcal{F}_{\mathrm{w}}\}$; y β representa el ángulo entre el vector tangente y el plano horizontal en el marco fijo $\{\mathcal{F}_{\mathrm{w}}\}$. Estos ángulos son calculados por:

$$\begin{aligned} \alpha &= \arctan\left(\frac{\frac{dp_{yd}}{ds}}{\frac{dp_{xd}}{ds}}\right) \\ \beta &= \arctan\left(\frac{\frac{dp_{zd}}{ds}}{\left\|\left(\frac{dp_{xd}}{ds}, \frac{dp_{yd}}{ds}\right)\right\|}\right) \end{aligned} \tag{3.11}$$

Dado que el camino deseado cuenta con curvaturas, para este caso es indispensable definir la curvatura Γ para curvas en el espacio XYZ en función al camino deseado como:

$$\Gamma = \frac{\left\|\dot{\boldsymbol{\mathcal{P}}} \times \ddot{\boldsymbol{\mathcal{P}}}\right\|}{\left\|\dot{\boldsymbol{\mathcal{P}}}\right\|^3} \tag{3.12}$$

y Γ_{xy} para curvas en el plano-XY como:

$$\Gamma_{xy} = \frac{\left|\dot{p}_x \ddot{p}_y - \dot{p}_y \ddot{p}_x\right|}{\left(\left(\dot{p}_x\right)^2 + \left(\dot{p}_y\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \tag{3.13}$$

En cuanto a $\dot{\boldsymbol{\mathcal{P}}}$ y $\ddot{\boldsymbol{\mathcal{P}}}$, se obtienen a partir de la diferenciación numérica para la primera y segunda derivada utilizando la fórmula de diferencias centradas, tal

que:

$$\dot{\boldsymbol{\mathcal{P}}}(k) = \frac{\boldsymbol{\mathcal{P}}(k+1) - \boldsymbol{\mathcal{P}}(k-1)}{2T_0} \tag{3.14}$$

$$\ddot{\boldsymbol{\mathcal{P}}}(k) = \frac{\boldsymbol{\mathcal{P}}(k-1) - 2\boldsymbol{\mathcal{P}}(k) + \boldsymbol{\mathcal{P}}(k+1)}{{T_0}^2} \tag{3.15}$$

donde, T_0 es el período de muestreo; $\boldsymbol{\mathcal{P}}(k+1)$ es el punto siguiente del camino correspondiente a un instante de muestreo k y $\boldsymbol{\mathcal{P}}(k-1)$ es el punto anterior del camino correspondiente a un instante de muestreo.

Observación 5 *Como la curvatura Γ cambia en función del camino deseado $\boldsymbol{\mathcal{P}}(s)$, se propone suavizar la curvatura para generar ligeros cambios en la velocidad deseada y no picos inesperados de variación en v_d.*

Por lo tanto, se utiliza un filtro de media móvil exponencial (EMA) para suavizar la curvatura en cada período de muestreo:

$$\Gamma_{\mathrm{c}}(k) = \varsigma\Gamma(k) + (1-\varsigma)\,\Gamma_{\mathrm{c}}(k-1) \tag{3.16}$$

donde, $\varsigma \in (0,1)$ es una constante de suavizado; $\Gamma(k)$ es el valor actual de la curvatura a filtrar; y $\Gamma_{\mathrm{c}}(k-1)$ es el valor de la curvatura filtrada en el período de muestreo anterior.

3.4.1. Esquema de Control

3.4.1.1. Controlador

A fin de realizar la tarea deseada en el espacio XYZ del sistema de referencia fijo $\{\mathcal{F}_{\mathrm{w}}\}$ para el extremo operativo con el menor consumo de energía posible, se consideran dos aspectos principales para la propuesta:

1. Modificación de la velocidad deseada en función de los parámetros de la tarea deseada.

2. Evitar que el hexarrotor ejecute movimientos que no sean necesarios para que el extremo operativo alcance el camino deseado.

Por tanto, los movimientos que son evitados por la plataforma aérea, son compensados mediante el cambio de posición de las articulaciones del brazo robótico con el propósito de conseguir el objetivo de control por parte del manipulador aéreo.

Esto es posible porque el sistema es altamente redundante, es decir, el manipulador aéreo tiene grados de libertad adicionales sobre el espacio de tareas $\mathbb{R}^m$, esto es evidente en el Jacobiano de la cinemática diferencial del manipulador aéreo (Ecuación (2.47) y Ecuación (2.4.1.2)). Donde:

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \quad \text{con} \quad n = 7 > m = 4 \tag{3.17}$$

En el Apéndice B se muestra la conceptualización de la redundancia de un sistema [108, 109]. El mismo que es considerado para la propuesta del controlador de seguimiento de camino con objetivos secundarios para mejorar el consumo de energía durante la ejecución de la tarea.

Tomando la consideración, la Figura 3.2 representa el esquema de control propuesto para el seguimiento del camino, que incluye el lazo de control de la estructura interna del manipulador aéreo. La plataforma aérea utilizada en este trabajo recibe comandos de velocidad, es decir, internamente dispone de un controlador que permite alcanzar las referencias de velocidad para ejecutar los movimientos deseados en el espacio. El controlador interno transforma las órdenes de velocidad a la plataforma aérea en órdenes de velocidad para los motores de las hélices del hexarrotor.

La ley de control está formada por la suma de dos acciones de control:

- La primera permite realizar la tarea propuesta que es el seguimiento de camino ($\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{p}}$).
- La segunda permite modificar la configuración interna del sistema para minimizar el consumo de energía durante la ejecución de la tarea ($\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{n}}$).

Por tanto, la acción de control total resulta:

$$\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{K}}(t) = \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{p}}(t) + \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{n}}(t) \tag{3.18}$$

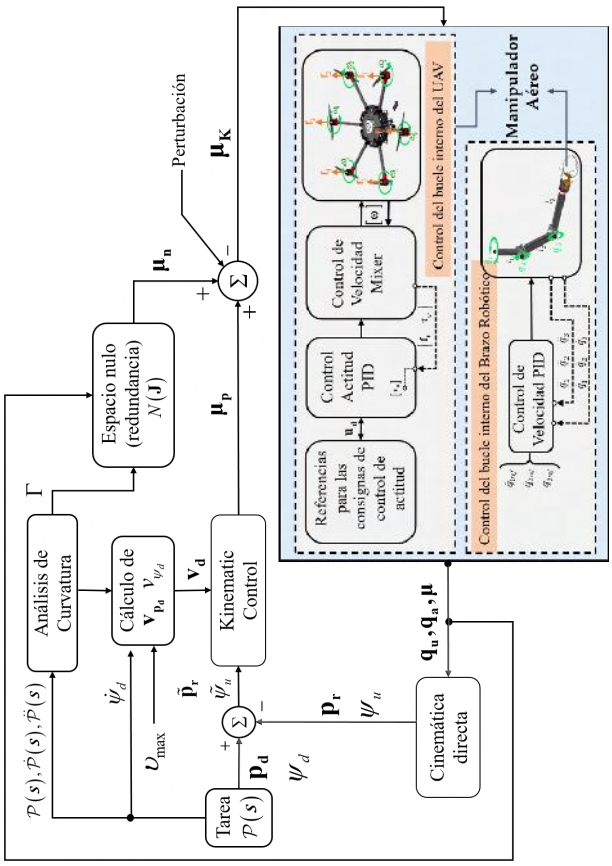


Figura 3.2: Esquema del controlador propuesto para el seguimiento de camino y esquema de control interno del robot que recibe comandos de velocidad.

3.4.1.2. Acción de Control para el Seguimiento de Camino

El vector de control $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{p}}(t) \in \mathbb{R}^7$ es la acción de control principal que permite al extremo operativo del manipulador aéreo seguir el camino deseado. Por tanto, la acción de control implica los errores de seguimiento de camino y de orientación del hexarrotor, además de la velocidad deseada en el punto más cercano del camino al extremo operativo del robot. El vector de control para el seguimiento de camino se define por:

$$\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{p}}(t) = \mathbf{J}^{\dagger}(\mathbf{q})(\mathbf{v_d}(t) + \mathbf{L}_1 \tanh(\mathbf{L}_1^{-1}\mathbf{K_1}\tilde{\mathbf{r}}(t))) \tag{3.19}$$

donde, $\mathbf{J}^{\dagger}(\mathbf{q})$ es la matriz Pseudoinversa de Moore-Penrose por derecha de $\mathbf{J}(\mathbf{q})$ calculada como:

$$\mathbf{J}(\mathbf{q})^{\dagger} = \mathbf{J}(\mathbf{q})^{\intercal}(\mathbf{J}(\mathbf{q})\mathbf{J}(\mathbf{q})^{\intercal})^{-1} \quad \text{para} \quad m < n \tag{3.20}$$

$\tilde{\mathbf{r}}(t) \in \mathbb{R}^4$ es el vector que contiene los errores de seguimiento de camino del extremo operativo y de orientación del hexarrotor, definido por:

$$\tilde{\mathbf{r}}(t) = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{p}}_{\mathbf{r}}(t) \\ \tilde{\psi}_u(t) \end{bmatrix} \tag{3.21}$$

donde, $\tilde{\mathbf{p}}_{\mathbf{r}}(t)$ representa el error de seguimiento de camino (Ecuación (3.9)) y $\tilde{\psi}_u(t)$ el error de orientación del hexarrotor (Ecuación (3.10)). El vector $\mathbf{v_d}(t) \in \mathbb{R}^4$ representa la velocidad deseada para la posición del extremo operativo y para la velocidad angular deseada del hexarrotor en el punto más cercano al extremo operativo, tal que:

$$\mathbf{v_d} = \begin{bmatrix} \mathbf{v_{p_d}}(t) \\ v_{\psi_d}(t) \end{bmatrix} \tag{3.22}$$

donde, $\mathbf{v_{p_d}} \in \mathbb{R}^3$ es el vector de velocidad lineal deseado sobre el camino en el punto $\mathbf{p_d}$ para posicionar el extremo operativo, y está defino por:

$$\mathbf{v_{p_d}}(t) = \begin{bmatrix} v_{x_d} \\ v_{y_d} \\ v_{z_d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_d \cos(\alpha)\cos(\beta) \\ v_d \sin(\alpha)\cos(\beta) \\ v_d \sin(\beta) \end{bmatrix} \tag{3.23}$$

cuyas proyecciones sobre los ejes X, Y y Z son las velocidades v_{x_d}, v_{y_d} y v_{z_d} respectivamente. Nótese que:

$$v_d = \|\mathbf{v_{p_d}}\| \tag{3.24}$$

es la norma del vector de velocidad deseada del extremo operativo. La velocidad deseada υ_d de la tarea puede depender de ciertos parámetros, por ejemplo: la velocidad máxima, el error de control, la curvatura del camino o la pendiente del camino, entre otros. Por lo tanto, se propone una velocidad deseada en función a determinados parámetros:

$$\upsilon_d = f(\upsilon_{\text{máx}}, \rho, \Gamma, \Gamma_{xy}) \tag{3.25}$$

donde, $\upsilon_{\text{máx}} \in \mathbb{R}^+$ es la máxima rapidez deseada de la tarea, $\rho = \|\tilde{\mathbf{p}}_\mathbf{r}\|$ es la norma del error de control, Γ representa la curvatura del camino deseado en el espacio y Γ_{xy} representa la curvatura sobre el plano-XY.

Ahora, la velocidad angular deseada (v_{ψ_d}) para el extremo operativo es obtenida a través de la regla de la cadena, definida como:

$$\begin{aligned} v_{\psi_d}(t) =& \frac{d}{ds}\left(\arctan\left(\frac{\frac{dp_{yd}}{ds}}{\frac{dp_{xd}}{ds}}\right)\right)\dot{s} \\ =& \frac{d\alpha}{ds}\frac{ds}{dt} \\ =& \frac{d\alpha}{ds}\|\mathbf{v_{pd}}\| \end{aligned} \tag{3.26}$$

donde, $\frac{d\alpha}{ds}$ representa la tasa de cambio del ángulo de orientación del camino en el plano respecto al avance sobre el camino y $\frac{ds}{dt} = \|\mathbf{v_{pd}}\|$ es la rapidez constante con que se recorre el camino.

Observación 6 *Para este caso se considera que el ángulo deseado de orientación del hexarrotor sea tangente al camino, sin embargo, puede existir casos que el ángulo de orientación deseado sea* $\psi_d = cte \Rightarrow v_{\psi_d} = 0$ *o si* $\psi_d = f(t) \Rightarrow v_{\psi_d} = \dot{\psi}_d$

Por último, $\mathbf{L_1}, \mathbf{K_1} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ son matrices diagonales definidas positivas que ponderan los errores de control, definidas como:

$$\mathbf{L_1} = \begin{bmatrix} \mathbf{L_{p1}} & \mathbf{0}_{3\times1} \\ \mathbf{0}_{1\times3} & l_{\psi1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{K_1} = \begin{bmatrix} \mathbf{K_{p1}} & \mathbf{0}_{3\times1} \\ \mathbf{0}_{1\times3} & k_{\psi1} \end{bmatrix} \tag{3.27}$$

tal que,

$$\mathbf{L_{p1}} = \begin{bmatrix} l_{x1} & 0 & 0 \\ 0 & l_{y1} & 0 \\ 0 & 0 & l_{z1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{K_{p1}} = \begin{bmatrix} k_{x1} & 0 & 0 \\ 0 & k_{y1} & 0 \\ 0 & 0 & k_{z1} \end{bmatrix} \tag{3.28}$$

donde, $l_{x1}, l_{y1}, l_{z1}, l_{\psi 1} \in \mathbb{R}^+$ son las constantes positivas de la matriz de peso $\mathbf{L_1}$; y $k_{x1}, k_{y1}, k_{z1}, k_{\psi 1} \in \mathbb{R}^+$ son las constantes positivas de la matriz de peso $\mathbf{K_1}$.

3.4.1.3. Acción de Control en el Espacio Nulo

La segunda ley de control $\boldsymbol{\mu}_\mathbf{n}(t) \in \mathbb{R}^7$ se basa en la proyección ortogonal sobre $N\left(\mathbf{J}(\mathbf{q})\right)$, dado que el espacio de entrada $\mathbb{R}^4$ del Jacobiano tiene dos espacios asociados: *i*) el rango del Jacobiano que es un subespacio de $\mathbb{R}^n$; y *ii*) el subespacio $N\left(\mathbf{J}\right)$ que es un subespacio de $\mathbb{R}^7$ mapeado por $\mathbf{J}\left(\mathbf{q}\right)$ al vector nulo del espacio de la tarea $\mathbb{R}^4$ como se ve en la Figura B.1. Por lo tanto, la segunda acción de control permite modificar la estructura interna del manipulador aéreo sin comprometer la tarea principal que es el seguimiento de camino. La acción de control $\boldsymbol{\mu}_\mathbf{n}$ modifica las articulaciones del robot en función de los parámetros de la tarea deseada y se define por:

$$\boldsymbol{\mu}_\mathbf{n}(t) = (\mathbf{I}_{7\times 7} - \mathbf{J}(\mathbf{q})^\dagger \mathbf{J}(\mathbf{q}))\boldsymbol{\mu}_\mathbf{m}(t) \tag{3.29}$$

donde, $\left(\mathbf{I} - \mathbf{J}(\mathbf{q})^\dagger \mathbf{J}(\mathbf{q})\right)$ es el operador de proyección ortogonal sobre el espacio $N(\mathbf{J}(\mathbf{q}))$; $\boldsymbol{\mu}_\mathbf{m}(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de velocidades que generan cambios en las articulaciones del manipulador aéreo y no afectan a las velocidades del extremo operativo, y por tanto a su posición. En otras palabras, el vector de velocidades $\boldsymbol{\mu}_\mathbf{m}(t)$ no modifica la posición final del extremo operativo. El vector $\boldsymbol{\mu_m}(t)$ puede depender de varios parámetros como: el error de control (ρ), la curvatura ($\mathbf{\Gamma}$) o la configuración deseada de las articulaciones del brazo robótico ($\mathbf{q_d}$), por lo tanto:

$$\boldsymbol{\mu}_\mathbf{m}(t) = f\left(\mathbf{q_d}, \rho, \Gamma\right) \tag{3.30}$$

3.4.2. Estrategia de Ahorro de Energía

Con el fin de realizar la tarea prevista con el menor esfuerzo realizado por el manipulador aéreo, es decir, consumiendo la menor cantidad de energía durante el seguimiento de camino, se considera el primer criterio de ahorro de energía que es la velocidad lineal deseada del extremo operativo. El objetivo de modificar la velocidad deseada en función de la curvatura es principalmente evitar que el robot derrape en curvas muy cerradas, mientras el ρ permite que la velocidad de

corrección de errores sea moderada, ya que la potencia en los rotores aumenta para alcanzar velocidades elevadas. Se propone empíricamente la siguiente función algebraica para variar la velocidad de seguimiento de camino en cada instante de muestreo del manipulador aéreo:

$$\upsilon_d = \frac{\upsilon_{\text{máx}}}{1 + k_1 \frac{\Gamma_c(k)}{\text{máx}(\Gamma)} + k_2 \tanh(\rho)} \tag{3.31}$$

donde, $\Gamma_c(k)$ es el la curvatura filtrado; ρ es el módulo de error de seguimiento de camino; y $k_1, k_2 \in \mathbb{R}^+$ son constantes adimensionales positivas que ponderan la curvatura y el error de control. La función propuesta para la velocidad deseada υ_d considera la velocidad deseada máxima de seguimiento de camino $\upsilon_{\text{máx}}$, la curvatura del camino Γ_c y la norma del error de control ρ, por lo tanto;

$$\begin{array}{lllllll} \text{si} & \Gamma_c \to 0 & \text{y} & \rho \to 0 & \Rightarrow & \upsilon_d \approx \upsilon_{\text{máx}} \\ \text{si} & \Gamma_c > 0 & \text{o} & \rho > 0 & \Rightarrow & \upsilon_d < \upsilon_{\text{máx}} \end{array} \tag{3.32}$$

Como segunda estrategia de ahorro energético, se considera la redundancia que presenta el sistema proponiendo una acción de control secundaria que se proyecta sobre el espacio nulo de $\mathbf{J}(\mathbf{q})$. El vector $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{n}}(t)$ permite ejecutar todos los movimientos del brazo robótico del manipulador aéreo necesarios para alcanzar el objetivo de control. Se plantea que la configuración del brazo robótico varíe en función de la curvatura del camino, es decir, en presencia de curvas en el camino el brazo robótico cambia la configuración de la manipulabilidad deseada y en el caso de no existir curvas el brazo mantiene la configuración interna deseada. El vector de velocidad proyectado en el espacio nulo está propuesto de la siguiente forma:

$$\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{m}}(t) = \mathbf{K}_2 \tanh(\mathbf{L}_2 \boldsymbol{\Delta}\mathbf{q}(t)) \tag{3.33}$$

donde, $\boldsymbol{\Delta}\mathbf{q} \in \mathbb{R}^7$ es el vector que tiene las variaciones de las velocidades de maniobrabilidad del manipulador aéreo definido por:

$$\boldsymbol{\Delta}\mathbf{q}(t) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Delta}\mathbf{q}_{\mathbf{u}} \\ \boldsymbol{\Delta}\mathbf{q}_{\mathbf{a}} \end{bmatrix} \tag{3.34}$$

donde, $\boldsymbol{\Delta}\mathbf{q}_{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^4$ es el vector que tiene las variaciones de las velocidades de maniobrabilidad del hexarrotor y $\boldsymbol{\Delta}\mathbf{q}_{\mathbf{a}} \in \mathbb{R}^3$ es el vector de las variaciones

internas de las articulaciones del brazo robótico. $\mathbf{L}_2, \mathbf{K}_2 \in \mathbb{R}^{7\times7}$ son matrices diagonales de ganancia positiva que ponderan la variación de las velocidades articulares y las velocidades de maniobrabilidad del hexarrotor. El vector $\mathbf{\Delta q_u}(t)$ también puede definirse en función de parámetros dados por el usuario: velocidad máxima del hexarrotor, error de control o curvatura del camino, de manera que:

$$\mathbf{\Delta q_u}(t) = f\left(\mathbf{v_{u_{max}}}, \rho, \Gamma\right) \tag{3.35}$$

donde, $\mathbf{v_{u_{max}}} \in \mathbb{R}^4$ es el vector de velocidades máximas del hexarrotor.

El vector $\mathbf{\Delta q_a}$ contiene las variaciones de velocidad que modifican la estructura interna del brazo robótico. Este vector se define en función de la curvatura del camino, del error de control y de las posiciones articulares deseadas para mantener un índice de manipulabilidad aceptable [110],

$$\mathrm{w} = \sqrt{\det\left(\mathbf{J}(\mathbf{q})\mathbf{J}(\mathbf{q})^\intercal\right)} \tag{3.36}$$

Por lo tanto, se proponen tres configuraciones del brazo robótico para diferentes tipos de caminos:

1. Para el movimiento en el eje-Z.
2. Para el movimiento en el plano-XY.
3. Para el movimiento en el espacio tridimensional-XYZ

Cada configuración evita maniobrar el hexarrotor en el eje-Z, en el plano-XY o en el espacio XYZ.

3.4.2.1. Configuración 1: Movimiento en el eje-Z

La configuración se basa en caminos con variación en el eje-Z. La Figura 3.3 muestra la configuración del robot propuesta para movimientos en el eje-Z.

La estructura interna del brazo robótico depende del movimiento de las articulaciones q_2 y q_3 según el perfil del camino deseado $\boldsymbol{\mathcal{P}}(s)$ en el eje-Z; mientras que el movimiento en la articulación q_1 depende de la posición deseada. El vector de variación de velocidades de maniobrabilidad $\mathbf{\Delta q_u}$ del hexarrotor y está definido como:

$$\mathbf{\Delta q_u}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & (v_{de} - v_e) & 0 \end{bmatrix}^\intercal \tag{3.37}$$

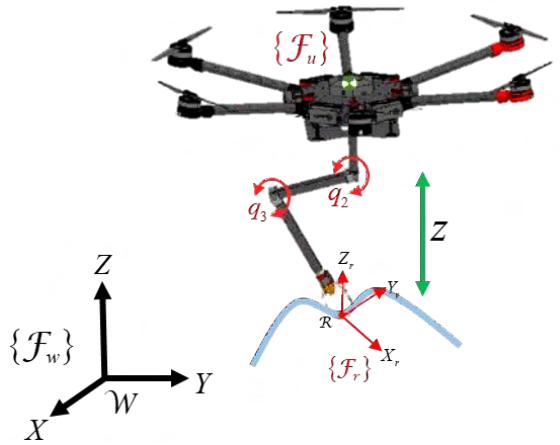


Figura 3.3: Configuración 1 (eje-Z).

donde, v_{de} representa la velocidad deseada del hexarrotor en el eje-E del sistema de referencia móvil $\{\mathcal{F}_\mathrm{u}\}$; y v_e es la velocidad de elevación lineal actual del robot. Ahora, el vector que modifica la estructura interna $\mathbf{\Delta q_a}$ del brazo robótico se propone como:

$$\mathbf{\Delta q_a} = \begin{bmatrix} q_{1d} - q_1 \\ \left(q_{2d} + k_{q2}\frac{\Gamma_z}{1+k_\rho \tanh(\rho)}\right) - q_2 \\ \left(q_{3d} - k_{q3}\frac{\Gamma_z}{1+k_\rho \tanh(\rho)}\right) - q_3 \end{bmatrix} \tag{3.38}$$

donde, q_{1d}, q_{2d} y q_{3d} son las posiciones deseadas de las articulaciones del brazo robótico,

$$\mathbf{q_d} = \begin{bmatrix} q_{1d} & q_{2d} & q_{3d} \end{bmatrix}^\mathsf{T} \tag{3.39}$$

Γ_z es la variación del camino a lo largo del eje-Z del marco de referencia fijo $\{\mathcal{F}_\mathrm{w}\}$, definido como:

$$\Gamma_z = \tanh\left(\frac{\ddot{p}_z}{\text{máx}(\ddot{p}_z(s))} - 1\right) \tag{3.40}$$

donde, $\tanh(\bullet)$ es una función para saturar las variaciones del eje-Z; y k_{q2}, k_{q3} son ganancias positivas que permiten ponderar la variación de las articulaciones.

3.4.2.2. Configuración 2: Movimientos en el plano-XY

La Figura 3.4 muestra la configuración propuesta para movimientos en el plano-XY.

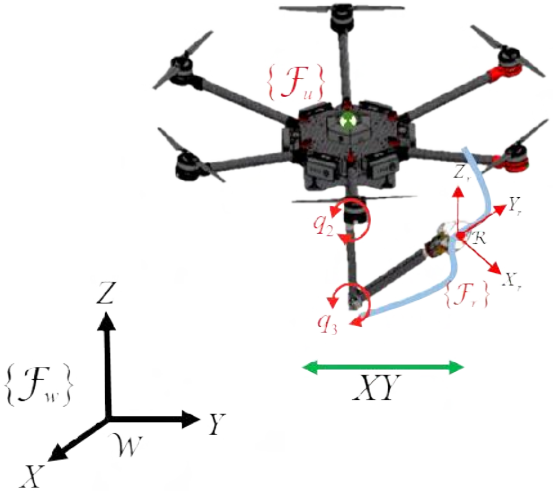


Figura 3.4: Configuración 2 (plano-XY).

La variación de las articulaciones q_2 y q_3 se definen en función de la estructura interna deseada y la curvatura en el plano-XY. Además, se considera que la orientación q_1 es perpendicular al camino deseado $\boldsymbol{\mathcal{P}}(s)$. El vector de variación de la velocidad de maniobra para el hexarrotor $\boldsymbol{\Delta q_u}$ se propone como:

$$\boldsymbol{\Delta q_u} = \begin{bmatrix} (v_{df} - v_f) & (v_{dl} - v_l) & 0 & 0 \end{bmatrix}^\intercal \tag{3.41}$$

donde, v_{df}, v_{dl} son las velocidades deseadas frontal y lateral, respectivamente del hexarrotor; y v_f, v_l son las velocidades lineales actuales del hexarrotor. El vector $\boldsymbol{\Delta q_a}$ se propone como:

$$\boldsymbol{\Delta q_a} = \begin{bmatrix} \left(q_{1d} - \frac{\pi}{2}\right) - q_1 \\ \left(q_{2d} + k_{q2}\frac{\tanh(\Gamma_{xy})}{1+k_\rho \tanh(\rho)}\right) - q_2 \\ \left(q_{3d} - k_{q3}\frac{\tanh(\Gamma_{xy})}{1+k_\rho \tanh(\rho)}\right) - q_3 \end{bmatrix} \tag{3.42}$$

donde, k_{q2} y k_{q3} son ganancias positivas que ponderan la variación de las articulaciones q_2 y q_3 del brazo robótico respectivamente; Γ_{xy} es el valor de la curvatura en el plano-XY y está calculado a partir de la Ecuación (3.13).

3.4.2.3. Configuración 3: Movimiento en el espacio-XYZ

La configuración es una combinación de la configuración 1 y la configuración 2 para considerar caminos con curvaturas en el espacio-XYZ. La Figura 3.5 muestra la propuesta para esta configuración.

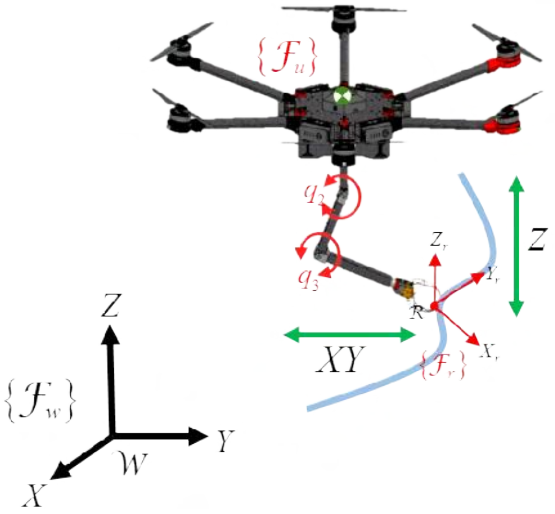


Figura 3.5: Configuración 3 (espacio-XYZ).

La configuración 3 añade una ganancia en la variación de la estructura interna del brazo robótico para dar prioridad a cada variación, es decir, si se requiere que el brazo trabaje más en el plano-XY; en el eje-Z del marco fijo $\{\mathcal{F}_\mathrm{w}\}$; o la variación se comparte entre el plano-XY y el eje-Z, permitiendo así trabajar en el espacio de trabajo XYZ. El vector de variación de velocidades de maniobrabilidad $\mathbf{\Delta q_u}$ del hexarrotor se propone por:

$$\mathbf{\Delta q_u} = \begin{bmatrix}(v_{df} - v_f) & (v_{dl} - v_l) & (v_{de} - v_e) & 0\end{bmatrix}^\intercal \tag{3.43}$$

Por último, el vector que modifica la estructura interna del brazo robótico $\mathbf{\Delta q_a}$ se propone de la siguiente manera:

$$\mathbf{\Delta q_a} = \begin{bmatrix} \left(q_{1d} - \frac{\pi}{2}\right) - q_1 \\ \left(q_{2d} + \frac{\Delta_k(k_{xy2}\tanh(\Gamma_{xy}))+(1-\Delta_k)(k_{z2}\Gamma_z)}{1+k_\rho \tanh(\rho)}\right) - q_2 \\ \left(q_{3d} - \frac{\Delta_k(k_{xy3}\tanh(\Gamma_{xy}))+(1-\Delta_k)(k_{z3}\Gamma_z)}{1+k_\rho \tanh(\rho)}\right) - q_3 \end{bmatrix} \tag{3.44}$$

donde, $k_{xy2}, k_{xy3} \in \mathbb{R}^+$ y $k_{z2}, k_{z3} \in \mathbb{R}^+$ son ganancias positivas para cuantificar la variación de las articulaciones q_2, q_3. Finalmente, $\Delta_k \in [0, 1]$ es una constante que pondera la variación de cada configuración.

3.5. Análisis de Estabilidad

Para el análisis de estabilidad del sistema se tiene en cuenta que existe un seguimiento perfecto de la velocidad. Es decir, el manipulador aéreo ejecuta sin error la velocidad generada por el controlador, por lo que el modelo cinemático diferencial verifica que:

$$\boldsymbol{\mu}(t) \equiv \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{K}}(t) \tag{3.45}$$

Sustituyendo la ley de control propuesta $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{K}}(t)$ de la Ecuación (3.18) en la Ecuación (2.46) resulta que:

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{J}\left(\mathbf{q}\right)\left[\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{p}}(t) + \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{n}}(t)\right] \tag{3.46}$$

Tomando las acciones de control $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{p}}(t)$ de la Ecuación (3.19) y $\mathbf{u}_{\mathbf{n}}(t)$ de la Ecuación (3.29) obtenemos:

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{J}\left[\mathbf{J}^\dagger\left(\mathbf{v_d} + \mathbf{L_1}\tanh\left(\mathbf{L}_1^{-1}\mathbf{K}_1\tilde{\mathbf{r}}\right)\right) + \left(\mathbf{I} - \mathbf{J}^\dagger\mathbf{J}\right)\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{m}}\right] \tag{3.47}$$

Ahora, sustituyendo $\mathbf{J}^\dagger = \mathbf{J}^\intercal(\mathbf{J}\mathbf{J}^\intercal)^{-1}$ en la Ecuación (3.47) y considerando $\mathbf{J}\mathbf{J}^\dagger = \mathbf{J}\mathbf{J}^\intercal(\mathbf{J}\mathbf{J}^\intercal)^{-1} = \mathbf{I}$ y $\mathbf{J}\left(\mathbf{I} - \mathbf{J}^\dagger\mathbf{J}\right) = \mathbf{J}\left(\mathbf{I} - \mathbf{J}^\intercal(\mathbf{J}\mathbf{J}^\intercal)^{-1}\mathbf{J}\right) = \mathbf{0}$, resulta:

$$\mathbf{v_d} - \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{L}_1\tanh\left(\mathbf{L}_1^{-1}\mathbf{K}_1\tilde{\mathbf{r}}\right) = \mathbf{0} \tag{3.48}$$

Separemos la Ecuación (3.48) según la Ecuación (3.4), Ecuación (3.3) y Ecuación (3.23), obteniendo:

$$\begin{aligned}\mathbf{0} = \begin{bmatrix}\mathbf{v_{p_d}}(t)\\ v_{\psi_d}(t)\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\dot{\mathbf{p}}_\mathbf{r}(\mathbf{q})\\ \dot{\psi}_u(\mathbf{q})\end{bmatrix} + \dots \\ \dots + \begin{bmatrix}\mathbf{L_{p1}} & 0\\ 0 & l_{\psi 1}\end{bmatrix} \tanh\left(\begin{bmatrix}\mathbf{L_{p1}} & 0\\ 0 & l_{\psi 1}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\mathbf{K_{p1}} & 0\\ 0 & k_{\psi 1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{\mathbf{p}}_\mathbf{r}\\ \tilde{\psi}_u\end{bmatrix}\right)\end{aligned} \tag{3.49}$$

donde, $l_{\psi 1}$ y $k_{\psi 1}$ son las ganancias positivas que ponderan el error de orientación del hexarrotor; mientras que $\mathbf{L_{p1}}, \mathbf{K_{p1}} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ son las matrices diagonales positivas que ponderan los errores de control de posición de seguimiento de camino.

3.5.1. Estabilidad de la Orientación en el Seguimiento de Camino

Para analizar la estabilidad del control de orientación de la Ecuación (3.49), tomando únicamente la parte inferior que pertenece a la orientación, resulta:

$$v_{\psi_d} - \dot{\psi}_u + l_{\psi 1}\tanh\left(l_{\psi 1}^{-1}k_{\psi 1}\tilde{\psi}_u\right) = 0 \tag{3.50}$$

Sustituyendo el error de velocidad $\dot{\tilde{\psi}} = v_{\psi_d} - \dot{\psi}$ en la Ecuación (3.50) y despejando, resulta:

$$\dot{\tilde{\psi}}_u = -l_{\psi 1}\tanh\left(l_{\psi 1}^{-1}k_{\psi 1}\tilde{\psi}_u\right) \tag{3.51}$$

Ahora, proponemos una candidata de Lyapunov,

$$V = \frac{1}{2}\tilde{\psi}_u^2 \tag{3.52}$$

de modo que su derivada resulta,

$$\dot{V} = \tilde{\psi}_u\dot{\tilde{\psi}}_u \tag{3.53}$$

y sustituyendo $\dot{\tilde{\psi}}_u$ obtenemos:

$$\dot{V} = -l_{\psi 1}\tilde{\psi}\tanh\left(l_{\psi 1}^{-1}k_{\psi 1}\tilde{\psi}_u\right) \tag{3.54}$$

Puesto que $l_{\psi 1}, k_{\psi 1}$ son constantes positivas y $\tanh(\bullet)$ es una función impar, entonces se deduce que:

$$\dot{V} < 0 \quad \text{, definida negativa.} \tag{3.55}$$

Por lo tanto,

$$\tilde{\psi}_u(t) \to 0 \quad \text{cuando} \quad t \to \infty \tag{3.56}$$

En consecuencia, se concluye que el sistema de control para la orientación es asintóticamente estable.

3.5.2. Estabilidad de la Posición de Seguimiento de Camino

Consideremos la parte superior de la Ecuación (3.49), de modo que la ecuación de lazo cerrado resulta ser:

$$\dot{\mathbf{p}}_{\mathbf{r}} = \mathbf{v}_{\mathbf{p_d}} + \mathbf{L_{p1}} \tanh\left(\mathbf{L_{p1}^{-1}} \mathbf{K_{p1}} \tilde{\mathbf{p}}_{\mathbf{r}}\right) \tag{3.57}$$

Ahora, el vector de posición del extremo operativo $\mathbf{p_r}(\mathbf{q})$ según las coordenadas de Frenet [111, 112] tiene dos componentes, ver la Figura 3.1:

- $\mathbf{p_{r_T}}$ que es la componente Tangencial en $\mathbf{T_p}$ en el camino.
- $\mathbf{p_{r_N}}$ es la componente Normal en $\mathbf{N_p}$ en el camino.

La velocidad en la dirección tangencial $\mathbf{T_p}$ resulta $\dot{\mathbf{p}}_{\mathbf{r_T}} = \mathbf{v_{p_d}}$, esto significa que el extremo operativo tiene velocidad en la dirección tangencial al camino. Por otro lado, la velocidad en la dirección normal $\mathbf{N_p}$ resulta $\dot{\mathbf{p}}_{\mathbf{r_N}} = \mathbf{L_{p1}} \tanh\left(\mathbf{L_{p1}^{-1}} \mathbf{K_{p1}} \tilde{\mathbf{p}}_{\mathbf{r}}\right)$, indica la velocidad normal a la tangente en el camino, con la que el extremo operativo se aproxima al camino. Según las coordenadas de Frenet, la velocidad $\dot{\mathbf{p}}_{\mathbf{r_N}}$ tiene la dirección que va hacia el punto más cercano del camino, por lo que el error de posición disminuye. En consecuencia, se puede afirmar que $\dot{\mathbf{p}}_{\mathbf{r_N}} = -\dot{\tilde{\mathbf{p}}}_{\mathbf{r}}$, y que la Ecuación (3.57) de lazo cerrado pasa a ser:

$$\dot{\tilde{\mathbf{p}}}_{\mathbf{r}} + \mathbf{L_{p1}} \tanh\left(\mathbf{L_{p1}^{-1}} \mathbf{K_{p1}} \tilde{\mathbf{p}}_{\mathbf{r}}\right) = \mathbf{0} \tag{3.58}$$

Ahora, proponemos una candidata de Lyapunov,

$$V = \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{p}}_{\mathbf{r}}^{\intercal}\tilde{\mathbf{p}}_{\mathbf{r}} \tag{3.59}$$

La derivada con respecto al tiempo de la candidata de Lyapunov y sustituyendo la Ecuación (3.58) resulta:

$$\dot{V} = -\tilde{\mathbf{p}}^{\intercal}\mathbf{L}_{\mathbf{p1}} \tanh\left(\mathbf{L}_{\mathbf{p1}}^{-1}\mathbf{K}_{\mathbf{p1}}\tilde{\mathbf{p}}\right) \tag{3.60}$$

Recordando que $\mathbf{L}_{\mathbf{p1}}$ y $\mathbf{K}_{\mathbf{p1}}$ son matrices diagonales positivas y que la función $\tanh(\bullet)$ es una función impar, se deduce que:

$$\dot{V} < 0 \tag{3.61}$$

es decir, es definida negativa. Por lo tanto,

$$\tilde{\mathbf{p}}_{\mathbf{r}}(t) \to \mathbf{0} \quad \text{cuando} \quad t \to \infty \tag{3.62}$$

lo que significa que el sistema de control para la posición es asintóticamente estable. En conclusión, el extremo operativo converge al camino deseado; y cuando está sobre el camino, el extremo operativo se mueve con velocidad tangencial $\mathbf{v}_{\mathbf{pd}}$.

3.6. Análisis de Robustez

En el análisis de estabilidad del controlador, se considera que existe un seguimiento perfecto de la velocidad, es decir, que el robot manipulador aéreo sigue perfectamente las velocidades proporcionadas por el controlador. Sin embargo, en situaciones reales el sistema tiene su propia inercia y está expuesto a perturbaciones producidas por el robot y el entorno en el que se realizan las pruebas experimentales. Las perturbaciones pueden ser producidas por la presencia de viento durante la prueba experimental, por cambios en los momentos de inercia del robot debido al movimiento del brazo robótico, entre otros. Así, la inercia del vehículo y las perturbaciones causan velocidades no deseadas al manipulador aéreo denominadas $\boldsymbol{\gamma}_{\mathbf{p}}(t)$ que se supone que están acotadas. Por lo tanto, se deduce que la ecuación de lazo cerrado para el seguimiento de camino de posición en lugar de la Ecuación (3.57), ahora es:

$$\dot{\tilde{\mathbf{p}}}_{\mathbf{r}} + \mathbf{L}_{\mathbf{p1}} \tanh\left(\mathbf{L}_{\mathbf{p1}}^{-1}\mathbf{K}_{\mathbf{p1}}\tilde{\mathbf{p}}_{\mathbf{r}}\right) = \mathbf{J}_{\mathbf{p}}\boldsymbol{\gamma}_{\mathbf{p}} \tag{3.63}$$

Sustituyendo la Ecuación (3.63) en la derivada de la candidata de Lyapunov de la Ecuación (3.60) obtenemos que:

$$\dot{V} = \tilde{\mathbf{p}}_\mathbf{r}^\intercal \left(\mathbf{J_p}\boldsymbol{\gamma}_\mathbf{p}\right) - \tilde{\mathbf{p}}_\mathbf{r}^\intercal \mathbf{L_{p1}} \tanh\left(\mathbf{L_{p1}^{-1}} \mathbf{K_{p1}} \tilde{\mathbf{p}}_\mathbf{r}\right) \tag{3.64}$$

Para que la Ecuación (3.64) sea negativa definida, debe cumplirse la siguiente condición:

$$\tilde{\mathbf{p}}_\mathbf{r}^\intercal \mathbf{L_{p1}} \tanh\left(\mathbf{L_{p1}^{-1}} \mathbf{K_{p1}} \tilde{\mathbf{p}}_\mathbf{r}\right) > \tilde{\mathbf{p}}_\mathbf{r}^\intercal \left(\mathbf{J_p}\boldsymbol{\gamma}_\mathbf{p}\right) \tag{3.65}$$

Por lo tanto, una condición suficiente para que la Ecuación (3.64) sea definida negativa es que:

$$\left\|\mathbf{L_{p1}} \tanh\left(\mathbf{L_{p1}^{-1}} \mathbf{K_{p1}} \tilde{\mathbf{p}}_\mathbf{r}\right)\right\| > \left\|\mathbf{J_p}\boldsymbol{\gamma}_\mathbf{p}\right\| \tag{3.66}$$

Para errores grandes, la tangente hiperbólica está dentro de la zona de saturación, de tal forma que,

$$\tanh\left(\mathbf{L_{p1}^{-1}} \mathbf{K_{p1}} \tilde{\mathbf{p}}_\mathbf{r}\right) \approx 1 \tag{3.67}$$

Entonces, la Ecuación (3.66) se verifica con:

$$\left\|\mathbf{L_{p1}}\right\| > \left\|\mathbf{J_p}\boldsymbol{\gamma}_\mathbf{p}\right\| \tag{3.68}$$

que establece una condición de diseño de la ganancia $\mathbf{L_{p1}}$ para que los errores $\tilde{\mathbf{p}}_\mathbf{r}$ disminuyan. Ahora bien, para errores de control de seguimiento de camino pequeños, la tangente hiperbólica se encuentra en su región lineal, de tal modo que la expresión resulta:

$$\mathbf{L_{p1}} \tanh\left(\mathbf{L_{p1}^{-1}} \mathbf{K_{p1}} \tilde{\mathbf{p}}_\mathbf{r}\right) \approx \mathbf{K_{p1}} \tilde{\mathbf{p}}_\mathbf{r} \tag{3.69}$$

En consecuencia, la condición de la Ecuación (3.66) se verifica con:

$$\lambda_{\text{mín}}(\mathbf{K_{p1}}) \left\|\tilde{\mathbf{p}}_\mathbf{r}\right\| > \left\|\mathbf{J_p}\boldsymbol{\gamma}_\mathbf{p}\right\| \quad \rightarrow \quad \left\|\tilde{\mathbf{p}}_\mathbf{r}\right\| > \frac{\left\|\mathbf{J_p}\boldsymbol{\gamma}_\mathbf{p}\right\|}{\lambda_{\text{mín}}(\mathbf{K_{p1}})} \tag{3.70}$$

Entonces, implica que los errores de control de seguimiento de camino $\tilde{\mathbf{p}}_\mathbf{r}$ están acotados en última instancia por:

$$\left\|\tilde{\mathbf{p}}_\mathbf{r}\right\| \leq \frac{\left\|\mathbf{J_p}\boldsymbol{\gamma}_\mathbf{p}\right\|}{\sigma \lambda_{\text{mín}}\left(\mathbf{K_{p1}}\right)} \tag{3.71}$$

con $0 < \sigma < 1$ normalmente el valor de σ cercano a 1 y

$$\left\|\boldsymbol{\gamma}_{\mathbf{p}}\right\| \leqslant \bar{b} \tag{3.72}$$

donde $\bar{b} \in \mathbb{R}^{+}$ es una constante positiva, es decir, la única condición para la validez de la condición de la Ecuación (3.71) es que gamma ($\boldsymbol{\gamma}_{\mathbf{p}}$) debe estar acotada. En conclusión, el controlador propuesto en presencia de perturbaciones permanece estable y presenta estabilidad de señales de error finalmente acotadas. El error $\tilde{\mathbf{p}}_{\mathbf{r}}(t)$ termina siendo acotado en función de la cota de las perturbaciones. Caso contrario, en la ausencia de perturbaciones resulta:

$$\tilde{\mathbf{p}}_{\mathbf{r}}(t) \rightarrow \mathbf{0} \quad \text{con} \quad t \rightarrow \infty \tag{3.73}$$

Observación 7 *El controlador propuesto es un controlador de cinemática inversa con matriz de rango completo en el modelo cinemático del sistema. Además, representa un sistema redundante. Por lo tanto, se garantiza la controlabilidad del sistema bajo referencias arbitrarias.*

3.7. Resultados Experimentales

Para las pruebas experimentales se utilizó el robot Manipulador Aéreo construido durante el desarrollo de esta tesis descrito en el Apéndice A. En la Figura 3.6 se puede observar el robot y el entorno donde se realizaron las pruebas experimentales. Es importante recalcar que para la obtención de datos de corriente y tensión, el sistema cuenta con un sensor ACS758 y su correspondiente placa acondicionadora. El tiempo de muestreo utilizado para el lazo de control es de 100 milisegundos ($T_0 = 0{,}1$ [s]). El despegue del robot se realiza manualmente y con el brazo robótico en una posición segura, es decir, sin interferir con el tren de aterrizaje del hexarrotor. Una vez que el robot despega a una altura segura, se eleva el tren de aterrizaje y el brazo robótico toma la condición inicial de cada articulación. Por último, el robot se posiciona de forma autónoma en la condición inicial deseada para poner en marcha cada controlador. Los datos experimentales se almacenan en el computador a bordo para su análisis y elaboración de gráficos posteriormente.



Figura 3.6: Robot para pruebas experimentales en el entorno real.

3.7.1. Descripción de la Experimentación

Las pruebas experimentales consisten en comparar el controlador propuesto para minimizar el consumo de energía y el controlador que no considera estrategia de ahorro de energía (controlador estándar). Las pruebas experimentales se realizan en condiciones similares tanto para el controlador propuesto como para el estándar, los experimentos planteados son:

- **E.1:** El primer experimento consiste en que el manipulador aéreo ejecuta el seguimiento de camino con un período de tiempo definido en minutos [min] para ambos controladores.
- **E.2:** El segundo experimento consiste en recorrer una distancia determinada en metros [m] con el extremo operativo con ambas estrategias de control.
- **E.2:** El tercer experimento consiste en realizar el seguimiento de camino considerando el mismo consumo energético con ambas estrategias de control en kilovatios-hora [kWh].

3.7.1.1. Cálculo del Consumo de Energía

El consumo de energía se determina por medio de la integral de la potencia en el tiempo. Como se cuenta con varias muestras en cada período de muestreo, es decir, mediciones discretas de la potencia tomadas a intervalos T_0, la energía

total consumida E en kilovatios-hora [kWh] se puede aproximar mediante la siguiente expresión:

$$E = \sum_{i=1}^{N} P_i \cdot \Delta t \tag{3.74}$$

donde:

- E: Energía total en kilovatios-hora [kWh].
- P_i: Potencia instantánea medida en el instante i, en kilovatios [kW].
- Δt: Intervalo de muestreo en horas.
- N: Número total de muestras.

Si el intervalo de muestreo está dado en segundos, se convierte a horas mediante:

$$\Delta t = \frac{T_{0_{\text{seg}}}}{3600} \tag{3.75}$$

donde, $T_{0_{seg}}$ representa el período de muestreo en segundos. Finalmente, al multiplicar cada potencia por su intervalo correspondiente y sumar todas las contribuciones, se obtiene el consumo total de energía durante el período considerado.

Hay que tener en cuenta que los experimentos se realizan en una región con una altitud de 2597 [m] sobre el nivel del mar, por lo que el sistema aéreo consume más energía para mantenerse estable. La velocidad media del viento en el momento de las pruebas experimentales fue de 25 [km/h] y la varianza de la velocidad del viento durante las pruebas experimentales es de 61.6 [km^2/h^2]. En el siguiente enlace puede verificar con más detalle las condiciones ambientales durante las pruebas experimentales [113].

3.7.2. Controlador Estándar

El control estándar de seguimiento de camino utilizado para la comparación con el controlador propuesto se basa en la cinemática inversa [89]. El controlador no realiza cambios en la velocidad deseada y tampoco realiza la modificación de la estructura interna del brazo robótico en función de la curvatura de los caminos. Por lo tanto, se considera como un controlador estándar de seguimiento de camino

con rapidez deseada constante $\|\mathbf{v_{pd}}\| = v_d$ y ángulos de las articulaciones del brazo robótico constantes. Además, el vector $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{m}} = \mathbf{K}_2 \tanh(\mathbf{L}_2 \boldsymbol{\Delta}\mathbf{q})$ que genera cambios en la configuración interna del robot se utiliza para mantener las articulaciones del brazo robótico en valores constantes.

Observación 8 *Las pruebas experimentales del controlador propuesto no consideran el consumo de potencia durante el despegue y aterrizaje del manipulador aéreo, ya que la propuesta se centra en la etapa de ejecución de la tarea definida. Además, se entiende que la potencia para el despegue y el aterrizaje es similar para los dos controladores comparados, ya que las condiciones del sistema antes de realizar estas maniobras son prácticamente las mismas.*

3.7.3. Ajuste de Parámetros

Los parámetros del controlador se definen en función de las condiciones obtenidas del análisis de estabilidad. Entonces, para una mejor aproximación de las ganancias del controlador, se realizan simulaciones en Matlab con el banco de pruebas del sistema. El banco de pruebas permite conectar el hexarrotor al software de simulación (DJI Assistan 2 Software), mientras el brazo robótico ejecuta los movimientos deseados. Con el valor final aproximado de las ganancias, se realizan varias pruebas experimentales para efectuar ajustes finos en vuelo. La ventaja de este procedimiento es garantizar la seguridad de la plataforma en vuelo y optimizar el tiempo experimental.

3.7.4. Resultados Experimentales (Configuración 1)

Para validar el funcionamiento de la primera configuración (caminos con curvaturas en el eje Z), se realizaron tres experimentos con cada controlador. Las pruebas experimentales se llevaron a cabo en un entorno amplio y despejado, con el fin de evitar daños al manipulador aéreo y contar con el espacio suficiente para el desarrollo seguro de la tarea. Los parámetros utilizados en los experimentos se presentan en la Tabla 3.1.

Los resultados que se muestran a continuación fueron ejecutados durante un tiempo de $t = 6$ [min]. Los resultados se comparan con el seguimiento de caminos estándar, que no tiene en cuenta el análisis de curvatura para modificar

Tabla 3.1
Parámetros de control (Configuración 1)

Controlador Propuesto	**Controlador Estándar**
$p_x(s) = \sin(2s)$ [m] $p_y(s) = 6\cos(s)$ [m] $p_z(s) = \frac{3}{20}\sin(20s) + \frac{3}{25}\cos(40s) + 2\cos\left(\frac{3}{25}s\right) + 8$ [m]	
$\psi_d = \alpha \quad q_{1d} = 0 \quad q_{2d} = -\frac{1}{12}\pi \quad q_{3d} = \frac{1}{6}\pi$ [rad]	
$v_d = f(v_{\text{máx}}, \rho, \Gamma)$ $v_{\text{máx}} = 0{,}25$ [m/s]	$v_d = v_{\text{máx}} = 0{,}25$ [m/s]
$k_1 = 0{,}15 \quad k_2 = 0{,}3$ $k_{q_2} = 0{,}75 \quad k_{q3} = 0{,}95$ $k_\rho = 3$	N/A
$\mathbf{\Delta q_u} = [0, 0, 0 - v_e, 0]^\intercal$	$\mathbf{\Delta q_u} = [0, 0, 0, 0]^\intercal$ $\mathbf{\Delta q_a} = [\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \tilde{q}_3]^\intercal$ con: $\tilde{q}_i = q_{id} - q_i$
$\mathbf{K_1} = diag([0{,}64, 0{,}65, 0{,}6, 0{,}5])$ $\mathbf{L_1} = diag([0{,}95, 0{,}95, 0{,}95, 0{,}1])$	
$\mathbf{K}_2 = diag([0, 0, 0{,}5, 0, 1, 1, 2])$ $\mathbf{K}_2 = diag([0, 0, 0{,}5, 0, 1, 1, 2])$	

la velocidad deseada y modificar la estructura interna del brazo robótico. Las condiciones iniciales del hexarrotor y del brazo robótico son:

$$x_u(t_0) = 1 \text{ [m]} \quad y_u(t_0) = -2 \text{ [m]} \quad z_u(t_0) = 6 \text{ [m]} \quad \psi_u(t_0) = \tfrac{\pi}{2} \text{ [rad]}$$

$$q_1(t_0) = 0 \text{ [rad]} \quad q_2(t_0) = 0 \text{ [rad]} \quad q_3(t_0) = \tfrac{1}{2}\pi \text{ [rad]}$$

Las Figura 3.7 y Figura 3.8 presentan el movimiento del robot con ambos controladores. El vídeo recreado en Matlab con los datos experimentales obtenidos se puede ver en [114].

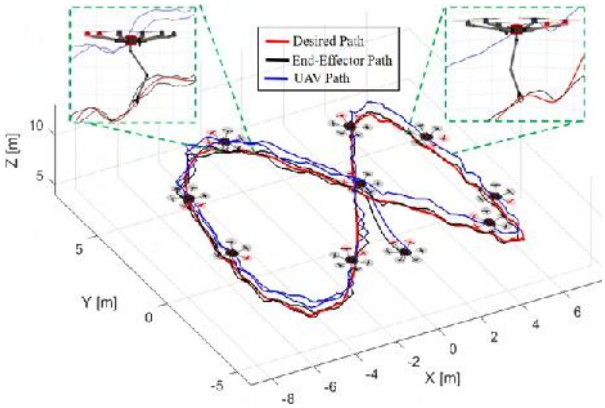


Figura 3.7: Movimiento ejecutado por el robot con el controlador propuesto.

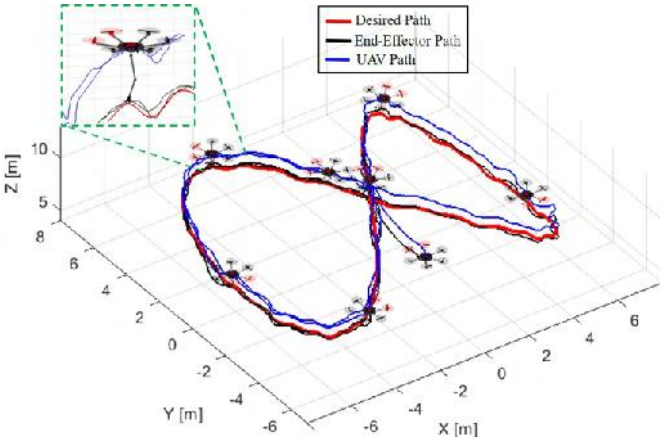


Figura 3.8: Movimiento ejecutado por el robot con el controlador estándar.

En la Figura 3.9 se muestran los errores de control de seguimiento de camino $\tilde{\mathbf{p}}_{\mathbf{r}}(t)$, obtenidos del experimento con el controlador propuesto. Por su parte, la Figura 3.10 presenta los errores correspondientes al experimento con el controlador estándar de seguimiento de camino. Se observa que ambos controladores conducen los errores de control a valores próximos a cero, aunque se hacen

notorios los efectos de las perturbaciones sobre dichos errores.

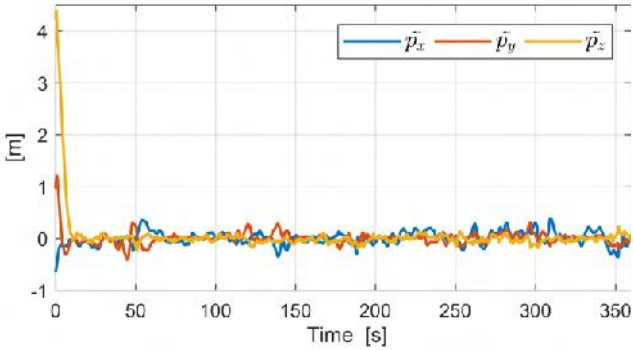


Figura 3.9: Errores producidos con el controlador propuesto.

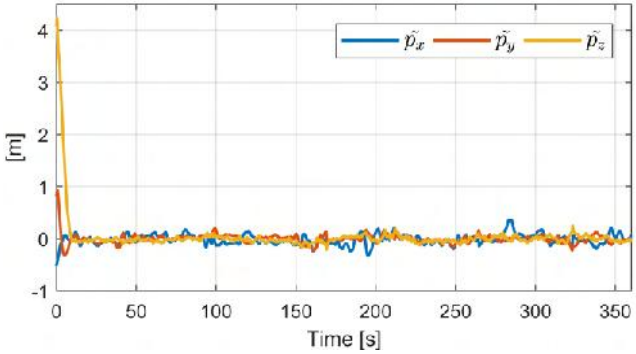


Figura 3.10: Errores producidos con el controlador estándar.

La norma del error de control ρ se presenta en la Figura 3.11. La línea azul corresponde al error de control con el controlador propuesto, mientras que la línea roja representa el error de control del controlador estándar de seguimiento de camino. Se observa cómo ambos controladores mantienen la norma del error cercana a cero. Ante perturbaciones inducidas, ambos sistemas son capaces de compensarlas, manteniendo el extremo operativo sobre el camino deseado.

La Figura 3.12 muestra la variación de las articulaciones del brazo robótico.

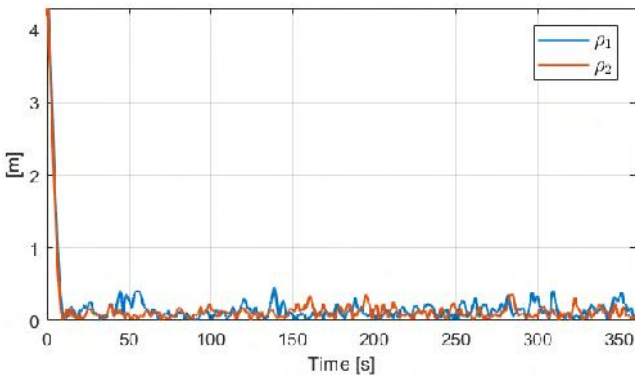


Figura 3.11: Módulos de los errores de control producidos con los dos controladores ρ.

Se aprecia que las articulaciones (q_{1_1}, q_{2_1}, q_{3_1}) cambian continuamente con el controlador propuesto, adaptándose a la curvatura de la trayectoria en el eje Z (línea azul), lo que evita que el hexarrotor realice movimientos adicionales para que el extremo operativo alcance el camino deseado. Como resultado, se contribuye a minimizar el consumo energético. Por el contrario, el controlador estándar mantiene fija la configuración interna deseada del brazo robótico (línea roja).

La potencia consumida por el robot se muestra en la Figura 3.13, la cual presenta los resultados de las seis pruebas experimentales realizadas bajo las mismas condiciones ambientales y con la carga inicial de las baterías al 100 %. Se observa que las mediciones de potencia correspondientes al controlador propuesto (línea azul) son inferiores en comparación con las del controlador estándar de seguimiento de camino (línea roja).

La Figura 3.14 muestra el comportamiento del índice de manipulabilidad (w) durante el experimento, para un intervalo de $t = 6$ [min]. Se observa que, en ambos casos, el valor del índice se mantiene por encima de 1 ($\mathrm{w} > 1$). Sin embargo, la manipulabilidad con el controlador de seguimiento de camino propuesto (línea azul) varía en función de los parámetros de la tarea, tal como se esperaba, a diferencia del controlador estándar (línea roja), cuyo valor permanece constante.

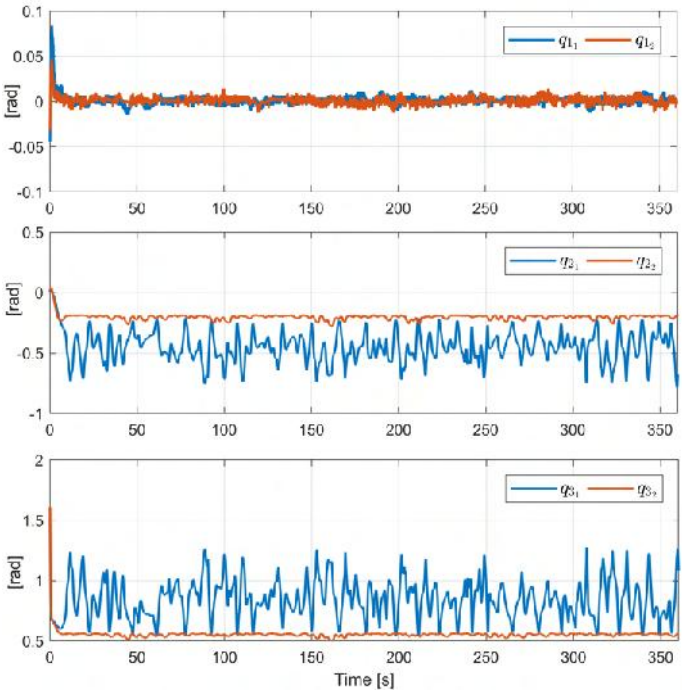


Figura 3.12: Variación de las articulaciones del brazo robóticos con ambos controladores.

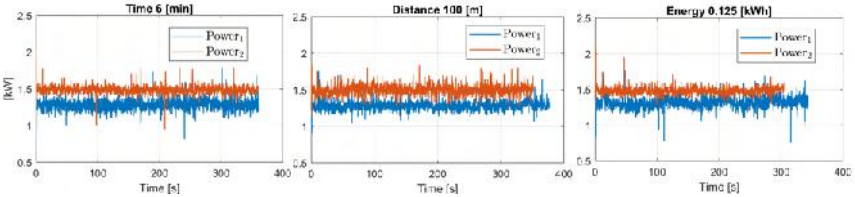


Figura 3.13: Potencia consumida en los experimentos ejecutados para la Configuración 1 con ambos controladores.

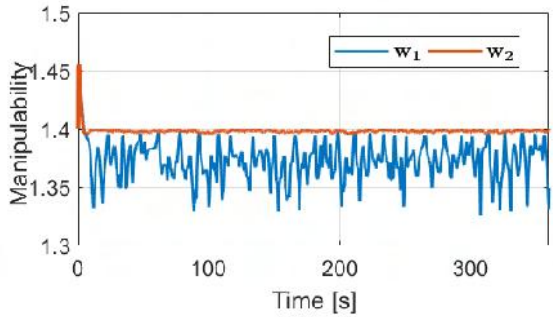


Figura 3.14: Variación del índice de manipulabilidad con ambos controladores.

Por último, la Figura 3.15 muestra que la velocidad deseada no es constante para el controlador propuesto, debido a la expresión definida en la Ecuación (3.25). En cambio, para el controlador estándar, la velocidad se mantiene constante durante toda la tarea.

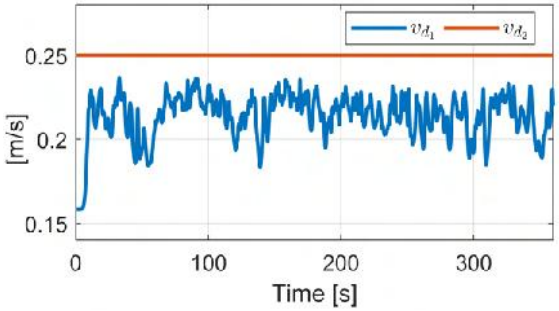


Figura 3.15: Velocidad deseada v_d para el seguimiento de camino con ambos controladores.

3.7.4.1. Análisis de los Experimentos (Configuración 1)

En la Tabla 3.2 se muestran los resultados obtenidos con el manipulador aéreo en los tres experimentos ejecutados para cada estrategia de control (E.1, E.2,

E.3). En el experimento E.1, que consiste en ejecutar la tarea durante 6 [min], se observa que el controlador propuesto recorre una mayor distancia y presenta un menor consumo de energía en comparación con el controlador estándar. En el experimento E.2, que implica recorrer la misma distancia sobre el camino deseado con el extremo operativo, el manipulador aéreo requiere más tiempo para completar la tarea, pero el consumo energético es inferior al registrado con el controlador estándar.

Finalmente, a partir de los resultados del experimento E.3, se observa que, con un mismo consumo energético, la autonomía del robot es mayor al utilizar el controlador propuesto. Además, el extremo operativo recorre una distancia superior en comparación con el controlador estándar. Esta mejora puede apreciarse claramente al analizar la potencia total consumida en los experimentos, lo que evidencia el aumento de autonomía asociado al uso del controlador propuesto.

Tabla 3.2
Comparación de los resultados experimentales para la Configuración 1.

	Control	**Tiempo** [min]	**Distancia** [m]	**Energía** [kWh]
E.1	Propuesta	**6**	94.93	0.1280
	Estándar	**6**	101.72	0.1485
E.2	Propuesta	6.277	**100**	0.1339
	Estándar	5.86	**100**	0.1561
E.3	Propuesta	5.713	93.0241	**0.125**
	Estándar	5.07	82.7484	**0.125**

3.7.5. Resultados Experimentales (Configuración 2)

Para validar ésta configuración se define un camino con curvaturas en el plano XY, de forma análoga que las pruebas anteriores, se realiza múltiples experimentos registrando el consumo de energía bajo las mismas condiciones ambientales. Los parámetros del controlador correspondientes a la Configuración 2 se presentan en la Tabla 3.3.

Tabla 3.3
Parámetros de control (Configuración 2)

Controlador Propuesto	**Controlador Estándar**
$p_x(s) = 13\big(0{,}25 - 0{,}04\cos^2(5s)\big)^{\frac{1}{2}}\cos(s) + 1$ [m] $p_z(s) = 7$ [m] $p_y(s) = 13\big(0{,}25 - 0{,}04\cos^2(5s)\big)^{\frac{1}{2}}\sin(s) + 3$ [m]	
$\psi_d = \alpha \quad q_{1d} = -\frac{1}{3}\pi$ $q_{2d} = \frac{1}{6}\pi \quad q_{3d} = \frac{1}{2}\pi$ [rad]	$\psi_d = \alpha \quad q_{1d} = 0$ $q_{2d} = \frac{1}{18}\pi \quad q_{3d} = \frac{5}{9}\pi$ [rad]
$v_d = f(v_{\text{máx}}, \rho, \Gamma)$ $v_{\text{máx}} = 0{,}2$ [m/s]	$v_d = v_{\text{máx}} = 0{,}2$ [m/s]
$k_1 = 0{,}25 \quad k_2 = 0{,}5$ $k_{q2} = 0{,}5 \quad k_{q3} = 0{,}7$ $k_\rho = 1{,}5$	N/A
$\mathbf{\Delta q_u} = [0 - v_f, 0 - v_l, 0, 0]^\intercal$	$\mathbf{\Delta q_u} = [0, 0, 0, 0]^\intercal$ $\mathbf{\Delta q_a} = [\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \tilde{q}_3]^\intercal$ con: $\tilde{q}_i = q_{id} - q_i$
$\mathbf{K}_1 = diag([0{,}75, 0{,}75, 0{,}5, 0{,}9])$ $\mathbf{L}_1 = diag([0{,}9, 0{,}9, 0{,}75, 1])$	
$\mathbf{K}_2 = diag([\mathbf{0}_{1\times4}, 0{,}15, 1{,}75, 1{,}75])$ $\mathbf{K}_2 = diag([\mathbf{0}_{1\times4}, 0{,}75, 1, 1])$	

Los resultados que se presentan a continuación corresponden a la prueba experimental en la que el manipulador aéreo consume determinada cantidad de energía de 0,1389 [kWh] durante la ejecución de la tarea. Las condiciones iniciales del hexarrotor y del brazo robótico son las siguientes:

$$x_u(t_0) = 3 \text{ [m]} \quad y_u(t_0) = 0 \text{ [m]} \quad z_u(t_0) = 8 \text{ [m]} \quad \psi_u(t_0) = \tfrac{1}{6}\pi \text{ [rad]}$$
$$q_1(t_0) = 0 \text{ [rad]} \quad q_2(t_0) = -\tfrac{5}{36}\pi \text{ [rad]} \quad q_3(t_0) = \tfrac{1}{2}\pi \text{ [rad]}$$

La Figura 3.16 indica el movimiento realizado por el manipulador aéreo con el control propuesto. Se aprecia cómo el hexarrotor se mantiene por dentro del camino mientras el extremo operativo se ajusta para alcanzar el camino deseado

$\mathcal{P}(s)$. El resultado del desplazamiento del extremo operativo con el controlador estándar se observa en la Figura 3.17. Se puede ver cómo el extremo operativo sigue el camino deseado mientras el hexarrotor permanece orientado en dirección al camino. El video recreado en Matlab con los datos experimentales obtenidos se puede ver en [115].

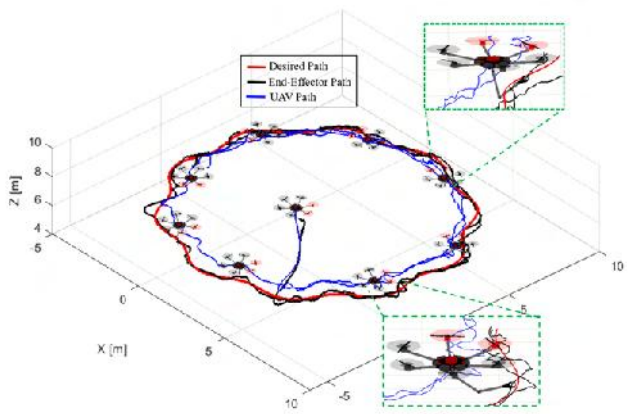


Figura 3.16: Movimiento ejecutado por el robot con el controlador propuesto.

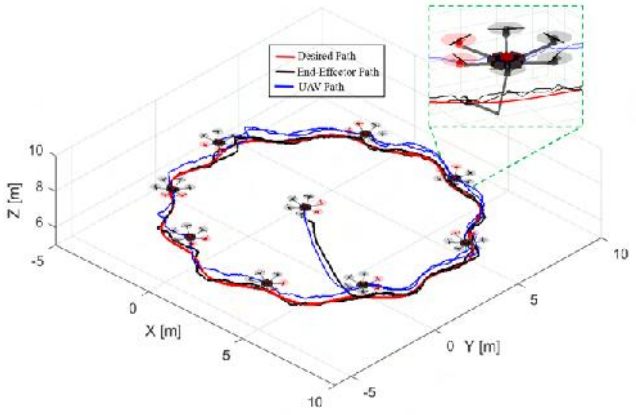


Figura 3.17: Movimiento ejecutado por el robot con el controlador estándar.

La Figura 3.18 presenta los errores de seguimiento de camino del extremo operativo del manipulador aéreo $\tilde{\mathbf{p}}_\mathbf{r}$, resultantes del experimento con el controlador propuesto. Mientras que la Figura 3.19 presenta los errores de control $\tilde{\mathbf{p}}_\mathbf{r}$ producidos durante el experimento con el controlador estándar de seguimiento de camino.

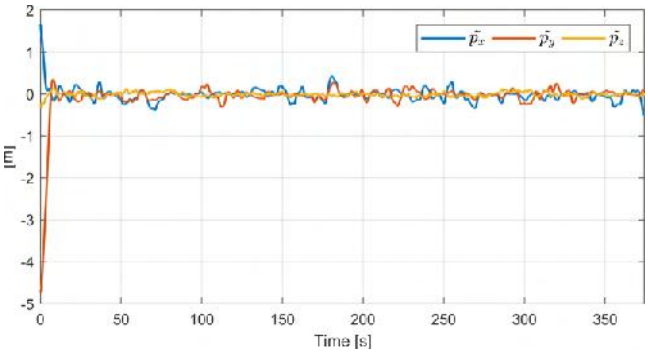


Figura 3.18: Errores producidos con el controlador propuesto.

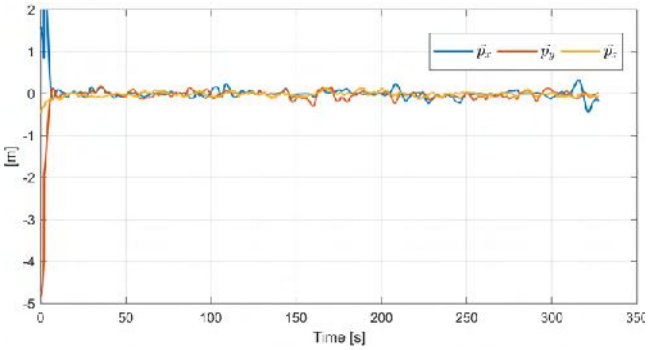


Figura 3.19: Errores producidos con el controlador estándar.

El módulo del error de control ρ se presenta en la Figura 3.20, el gráfico de color azul corresponde al error de control con el controlador propuesto, mientras que el de color rojo es el error de control del controlador estándar de seguimiento

de camino. Se observa cómo ambos controladores mantienen la norma del error cerca de cero $\rho \approx 0$.

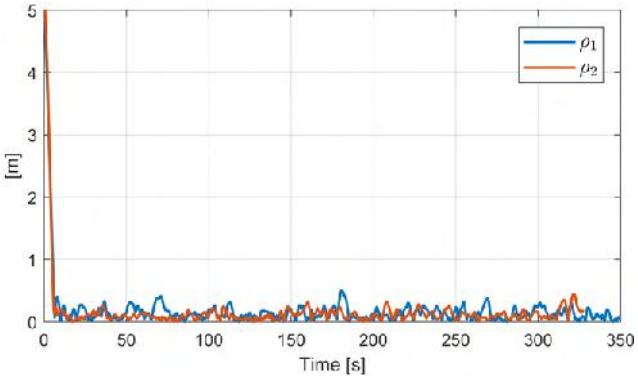


Figura 3.20: Módulos de los errores de control producidos con los dos controladores ρ.

El consumo de potencia del manipulador aéreo se presenta en la Figura 3.21. Esta figura muestra los resultados de las seis pruebas experimentales realizadas bajo las mismas condiciones ambientales, con la batería del sistema cargada al 100 %.

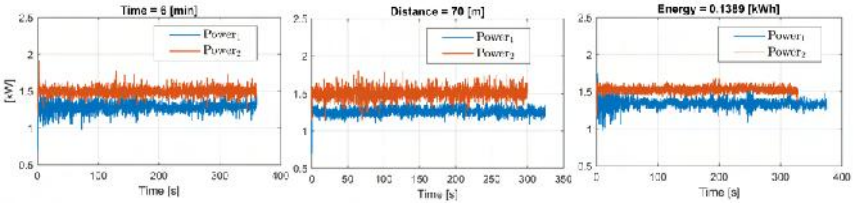


Figura 3.21: Potencia consumida en los experimentos ejecutados para la Configuración 2 con ambos controladores.

La Figura 3.22 muestra la variación de las articulaciones del brazo robótico durante el experimento. Se observa que las articulaciones (q_{1_1}, q_{2_1}, q_{3_1}) cambian continuamente bajo el control propuesto, adaptándose a la trayectoria en el plano-XY (curva en color azul), lo que evita que el hexarrotor deba realizar

movimientos adicionales para que el extremo operativo siga el camino deseado. En contraste, el controlador estándar mantiene fija la configuración interna del brazo robótico (curva en color rojo).

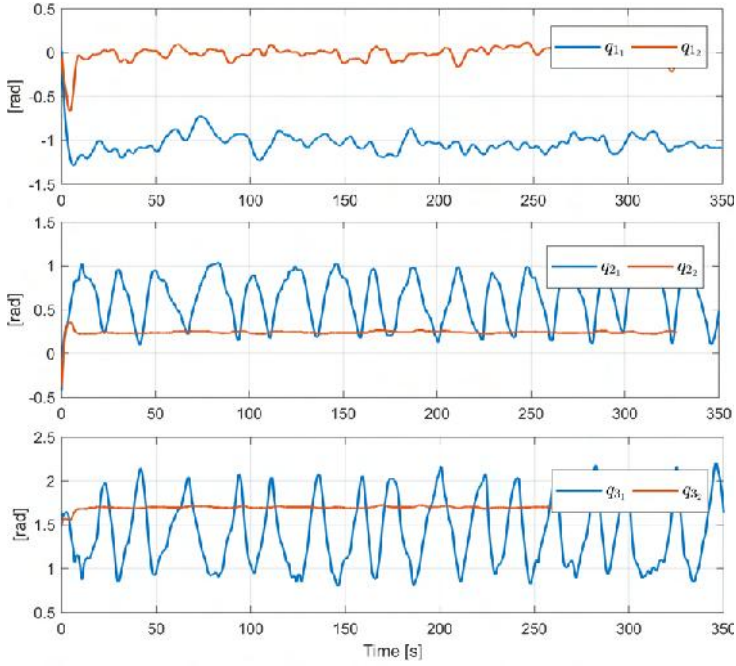


Figura 3.22: Variación de las articulaciones del brazo robóticos con ambos controladores.

La Figura 3.23 muestra el comportamiento de la manipulabilidad (w) durante el experimento con ambos controladores. Se observa que el valor de manipulabilidad se mantiene por encima de la unidad ($w > 1$), lo que indica que la modificación en la estructura interna preserva un nivel aceptable de manipulabilidad.

Por último, la Figura 3.24 muestra la velocidad deseada para cada controlador. Tal como se esperaba, en el caso del controlador propuesto, la velocidad deseada varía en función de los parámetros definidos, mientras que para el controlador estándar se mantiene constante.

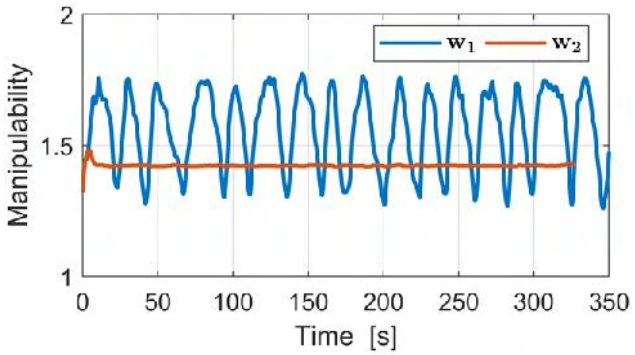


Figura 3.23: Variación de la manipulabilidad con ambos controladores.

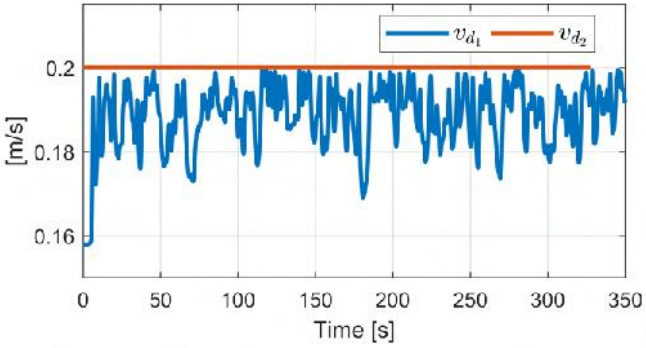


Figura 3.24: Velocidad deseada v_d para ambos controladores.

3.7.5.1. Análisis de los Experimentos (Configuración 2)

La Tabla 3.4 presenta los resultados de varios experimentos realizados con los dos controladores. Se puede observar que la energía consumida por el manipulador aéreo con el controlador propuesto es menor en comparación con la cantidad de energía consumida por el controlador estándar. Se puede ver que el controlador propuesto cumple con el objetivo de minimizar el consumo de energía, por lo tanto, hay más autonomía para ejecutar una tarea específica.

Tabla 3.4
Comparación de los resultados experimentales para la Configuración 2.

	Control	**Tiempo** [min]	**Distancia** [m]	**Energía** [kWh]
E.1	Propuesta	**6**	77.14	0.1277
	Estándar	**6**	84.442	0.1492
E.2	Propuesta	5.41	**70**	0.1129
	Estándar	4.996	**70**	0.1250
E.3	Propuesta	6.24	89.637	**0.1389**
	Estándar	5.4583	78.0742	**0.1389**

3.7.6. Resultados Experimentales (Configuración 3)

De forma similar que los experimentos anteriores, se lleva a cabo varios experimentos, ahora el comino deseado incluye curvaturas en el espacio-XYZ. Estas pruebas permiten evaluar el desempeño del controlador exigiendo una mayor coordinación entre el hexarrotor y el brazo robótico. Los parámetros utilizados se presentan en la Tabla 3.5.

Los resultados experimentales corresponden a la condición de igual distancia recorrida por el extremo operativo del robot. Se define que recorra una distancia de 80 [m] registrando la cantidad de energía consumida por los dos controladores. Las condiciones iniciales para el hexarrotor son:

$$x_u(t_0) = 2\ [\text{m}] \qquad y_u(t_0) = 2\ [\text{m}]$$

$$z_u(t_0) = 10\ [\text{m}] \quad \psi_u(t_0) = \tfrac{1}{4}\pi\ [\text{rad}]$$

y las condiciones iniciales del brazo robótico son:

$$q_1(t_0) = 0\ [\text{rad}] \quad q_2(t_0) = -\tfrac{1}{6}\pi\ [\text{rad}] \quad q_3(t_0) = \tfrac{1}{4}\pi\ [\text{rad}]$$

La Figura 3.25 y Figura 3.26 presentan el movimiento ejecutado por el hexarrotor y el extremo operativo con el controlador propuesto y el controlador estándar de seguimiento de camino respectivamente. Se puede observar cómo el hexarrotor,

Tabla 3.5
Parámetros de control (Configuración 3)

Controlador Propuesto	**Controlador Estándar**
$p_y\,(\mathrm{s}) = 10\big(0{,}25 - 0{,}04\cos^2(5s)\big)^{\frac{1}{2}}\sin(s) - 5$ [m]	
$p_y\,(\mathrm{s}) = 10\big(0{,}25 - 0{,}04\cos^2(5s)\big)^{\frac{1}{2}}\sin(s) - 5$ [m]	
$p_z\,(\mathrm{s}) = 0{,}25\sin(20\mathrm{s}) + 2\cos(4\mathrm{s}) + 0{,}3\sin(10s) + 15$ [m]	
$\psi_d = \alpha \quad q_{1d} = 0\ q_{2d} = -\frac{1}{6}\pi$ $q_{3d} = \frac{1}{2}\pi$ [rad]	$\psi_d = \alpha \quad q_{1d} = 0\ q_{2d} = -\frac{1}{18}\pi$ $q_{3d} = \frac{5}{12}\pi$ [rad]
$v_d = f\,(v_{\text{máx}}, \rho, \Gamma)$ $v_{\text{máx}} = 0{,}25$ [m/s]	$v_d = v_{\text{máx}} = 0{,}25$ [m/s]
$\Delta_k = 0{,}5 \quad k_1 = 0{,}2$ $k_2 = 0{,}3 \quad k_\rho = 2$ $k_{q2} = 0{,}5 \quad k_{q3} = 0{,}7$ $k_{xy_2} = 1{,}5 \quad k_{z_2} = 0{,}4$ $k_{xy_3} = 1{,}3 \quad k_{z_3} = 0{,}9$	N/A
$\mathbf{\Delta q_u} = [0,0,0,0]^\intercal$ $\mathbf{\Delta q_a} =$ Ec.(3.44)	$\mathbf{\Delta q_u} = [0,0,0,0]^\intercal$ $\mathbf{\Delta q_a} = [\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \tilde{q}_3]^\intercal$ con: $\tilde{q}_i = q_{id} - q_i$
$\mathbf{K}_1 = diag\,([0{,}75, 0{,}75, 0{,}6, 0{,}9])$ $\mathbf{L}_1 = diag\,([0{,}9, 0{,}9, 0{,}75, 1])$	
$\mathbf{K}_2 = diag\,([0,0,0,0,1,2,2])$ $\mathbf{K}_2 = diag\,([0,0,0,0,0{,}75,1,1])$	

durante la tarea se encuentra fuera del camino deseado, mientras que el extremo operativo se ajusta para alcanzar el camino deseado $\boldsymbol{\mathcal{P}}\,(s)$ con el controlador propuesto. Mientras que con el controlador estándar, se observa como el extremo operativo sigue el camino deseado manteniendo al hexarrotor sobre el camino.

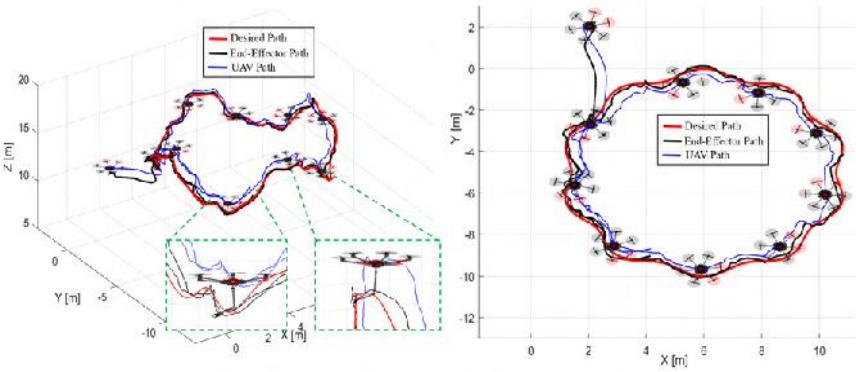


Figura 3.25: Evolución del extremo operativo con el controlador propuesto en el espacio-XYZ y sobre el plano-XY.

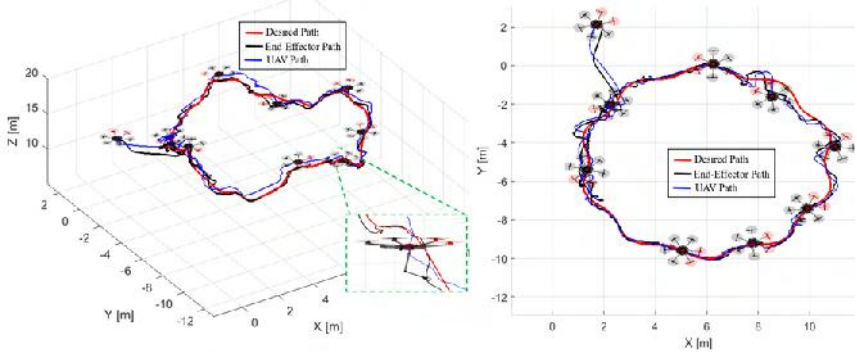


Figura 3.26: Evolución del extremo operativo con el controlador estándar en el espacio-XYZ y sobre el plano-XY.

La Figura 3.27 muestra la evolución de los errores de posición del extremo operativo durante el experimento de seguimiento de camino, $\tilde{\mathbf{p}}_{\mathbf{r}}$, con el controlador propuesto. Por su parte, la Figura 3.28 presenta la evolución de dichos errores durante el experimento realizado con el controlador estándar de seguimiento de camino.

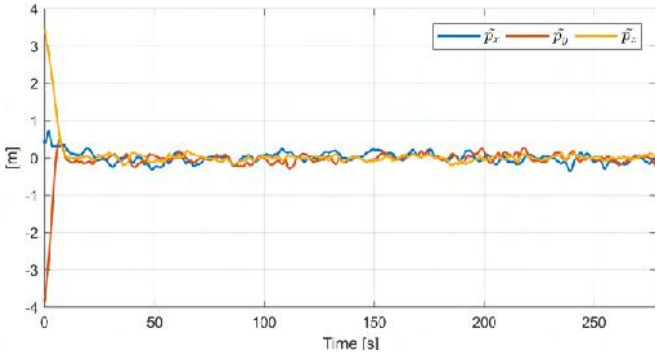


Figura 3.27: Errores producidos con el controlador propuesto.

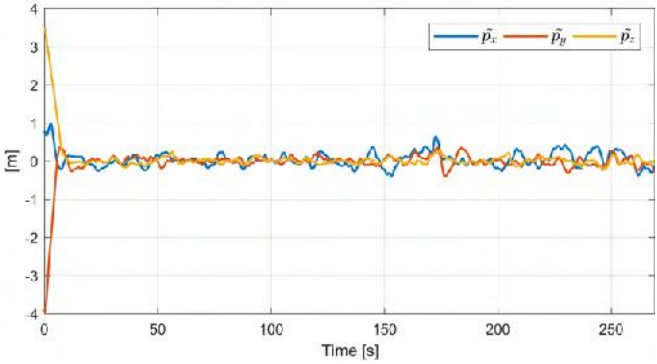


Figura 3.28: Errores producidos con el controlador estándar.

La norma de los errores de control, ρ, de ambos controladores se presenta en la Figura 3.29. La gráfica de línea azul corresponde al error de control obtenido con el controlador propuesto, mientras que la línea roja representa el error generado durante el experimento con el controlador estándar. Se observa cómo ambos controladores mantienen los errores próximos a cero, es decir, $\tilde{\mathbf{p}}_\mathbf{r} \approx \mathbf{0}$ lo que evidencia que se cumple con el objetivo de control. Además, se aprecia que la presencia de perturbaciones inducidas por el viento genera oscilaciones en la norma del error.

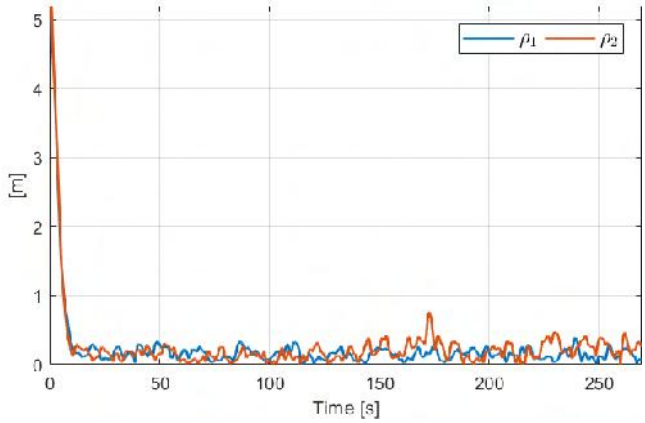


Figura 3.29: Módulo de los errores de control con ambos controladores ρ.

La Figura 3.30 muestra la variación del índice de manipulabilidad (w) del brazo robótico durante los experimentos, para una distancia de 80 [m]. Como se esperaba, el valor de la manipulabilidad varía según el camino deseado al utilizar el controlador propuesto, mientras que con el controlador estándar se mantiene constante. En ambos casos, el índice de manipulabilidad permanece por encima de uno ($w > 1$).

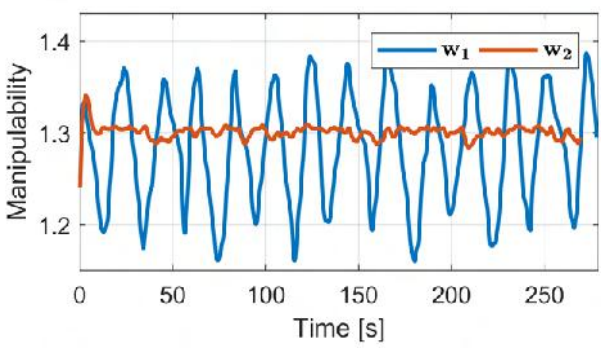


Figura 3.30: Variación de la manipulabilidad con ambos controladores.

La Figura 3.31 muestra la velocidad deseada para cada controlador. De forma similar a los experimentos anteriores, la velocidad con el controlador propuesto varía en función de la curvatura del camino, mientras que con el controlador estándar de seguimiento de camino se mantiene constante.

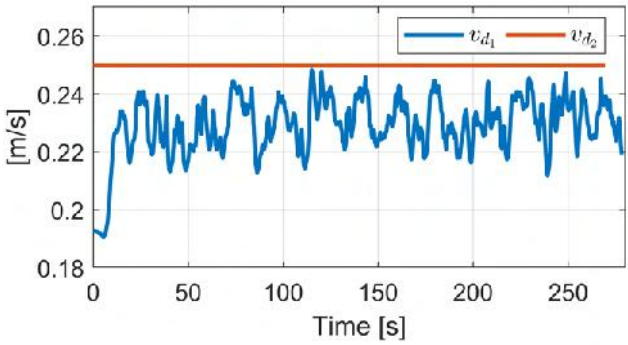


Figura 3.31: Velocidad deseada v_d para el seguimiento de camino con ambos controladores.

El consumo de potencia en cada período de muestreo del robot manipulador aéreo se presenta en la Figura 3.32. La gráfica muestra el consumo de las seis pruebas experimentales realizadas bajo las mismas condiciones ambientales y con la carga de las baterías al 100 %.

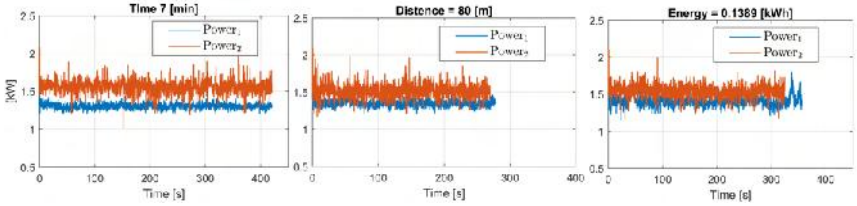


Figura 3.32: Potencia consumida en los experimentos ejecutados para la Configuración 3 con ambos controladores.

Finalmente, la Figura 3.33 presenta la evolución de las articulaciones del brazo robótico con ambos controladores. Las articulaciones con el controlador pro-

puesto (color azul) cambian continuamente, es decir, en función a la curvatura del camino, tal y como se lo esperaba. Mientras que con el controlador estándar (color rojo) mantiene fija la estructura interna del brazo robótico durante la ejecución de la tarea.

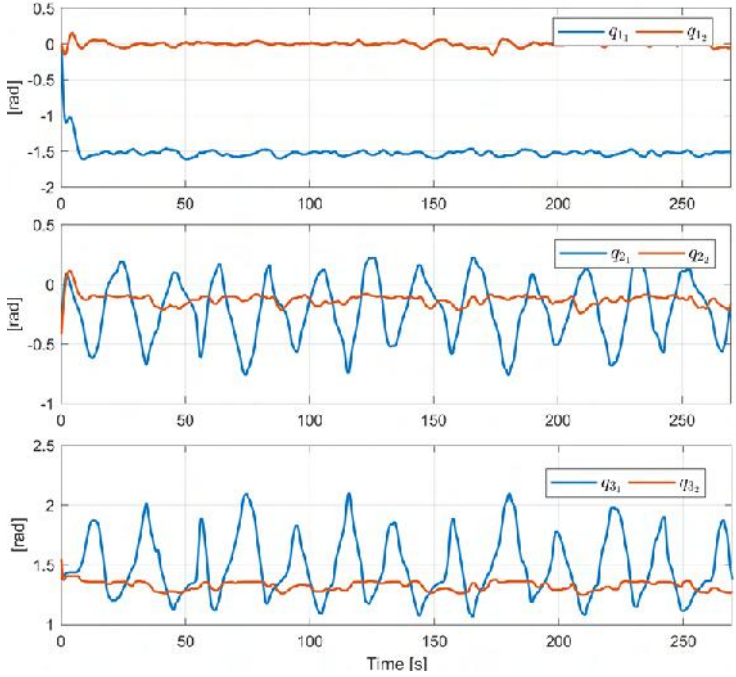


Figura 3.33: Variación de las articulaciones del brazo robótico registradas durante el experimento con el controlador propuesto y el controlador estándar.

3.7.6.1. Análisis de los Experimentos (Configuración 3)

La Tabla 3.6 presenta los resultados de varios experimentos ejecutados para cada estrategia de control (E.1, E.2, E.3). Se puede observar que la energía consumida por el manipulador aéreo con el controlador propuesto es menor en comparación con la cantidad de energía consumida por el controlador normal.

Tabla 3.6
Comparación de los resultados experimentales para la Configuración 3.

	Control	**Tiempo** [min]	**Distancia** [m]	**Energía** [kWh]
E.1	Propuesta	**7**	102.3678	0.1522
	Estándar	**7**	125.3184	0.1818
E.2	Propuesta	4.64	**80**	0.1042
	Estándar	4.4925	**80**	0.1134
E.3	Propuesta	5.93	95.4969	**0.1389**
	Estándar	5.4125	90.4609	**0.1389**

3.7.7. Análisis General

Las variaciones presentadas en la Figura 3.12, Figura 3.22 y Figura 3.33 muestran cómo las articulaciones del brazo robótico cambian durante las pruebas experimentales con el controlador propuesto. Sin embargo, hay que tomar en cuenta que dichas variaciones no interfieren con la configuración interna del manipulador aéreo, ya que los experimentos se realizan a bajas velocidades y las variaciones son moderadas. Además, la estructura interna del brazo robótico es liviana, por lo tanto, cuando el brazo realiza movimientos no afecta a la plataforma aérea.

Por último, la Figura 3.15, Figura 3.24 y Figura 3.31 representan la velocidad deseada para cada experimento. Sin embargo, esta velocidad no es la velocidad real que el robot ejecuta, ya que para corregir los errores de seguimiento de camino producidos por perturbaciones, hay velocidades adicionales generadas por el controlador (Ecuación (3.19)). Además, dado que se trata de un controlador cinemático, el objetivo principal es posicionar el extremo operativo sobre el camino deseado y no corregir el punto de ajuste de velocidad deseada, que es lo que hace un controlador con compensación dinámica, que en el próximo capítulo se verá con más detalle.

CAPÍTULO 4

Control Multitarea con Compensación Dinámica Basado en Métodos Numéricos

4.1. Introducción

Algunos de los algoritmos de control utilizados para resolver problemas de movimiento en manipuladores aéreos se basan en el modelo cinemático y el modelo dinámico del sistema robótico. En la literatura, existen diversas técnicas de control de movimiento que involucran cinemática y/o dinámica, por ejemplo, en [116] se presenta el seguimiento de trayectoria de un manipulador aéreo mediante un algoritmo adaptativo para compensar las variaciones en la dinámica del UAV por sus siglas en inglés, pero sin considerar la dinámica del brazo robótico. De manera similar, en [117] se propone un control de seguimiento de trayectoria basado en un algoritmo adaptativo de norma H-infinito, donde el brazo robótico se modela como una perturbación dentro del modelo del manipulador aéreo. En [118] se presentan algoritmos de control adaptativo basados en modelo para un

MA subactuado, compuesto por un multirrotor convencional y un brazo robótico. Los autores consideran la plataforma aérea y el brazo robótico como dos sistemas independientes para su modelado y control. En el mismo contexto, en [119] se introduce un control de posición basado en la técnica de modo deslizante, donde el modelo dinámico del robot supone que la masa de la plataforma aérea está incluida en la masa del primer eslabón, lo que genera problemas de control debido al cambio del centro de gravedad. Para solucionar esto, los autores implementan una ley de control adaptativo. Varios trabajos en la literatura [53, 120] presentan el modelo dinámico de un manipulador aéreo de manera independiente, es decir, analizan por separado el modelo dinámico de la plataforma aérea y el del brazo robótico. Por lo tanto, una de las contribuciones principales de esta tesis es obtener y validar el modelo dinámico de un manipulador aéreo como un sistema acoplado (plataforma aérea + brazo robótico). Otro aspecto a considerar que en la revisión del estado del arte realizado, es que el modelo dinámico de los robots suele expresarse en términos de las fuerzas y torques que actúan sobre los sistemas [63]. Sin embargo, para evitar la estimación o medición de fuerzas y torques del robot, en este capítulo se presenta un modelo dinámico en función de las velocidades de referencia, lo que facilita la aplicación de acciones de control al robot real. A diferencia del controlador cinemático presentado en el Capítulo **??**, en este capítulo se incorpora la compensación dinámica basada en un modelo acoplado del manipulador aéreo, manteniendo la estructura jerárquica de control.

Los problemas de control de movimiento que comúnmente existen en manipuladores aéreos son: *i*) *control de posición*; *ii*) *control de seguimiento de trayectoria*; y *iii*) *control de seguimiento de camino*. Algunos de los algoritmos de control desarrollados para resolver problemas de movimiento se basan en el modelo cinemático y el modelo dinámico del sistema robótico. En este contexto, se han realizado diversos trabajos, como en [121], donde se presenta un controlador basado en cinemática inversa para un manipulador aéreo con dos brazos robóticos, incorporando las restricciones de movimiento mediante el espacio nulo de la cinemática. En [122] se introduce un esquema de control con dinámica inversa para el control interno, utilizan un modelo matemático que recibe como entradas referencia de torque. Además, existen esquemas de optimización de trayectoria para el control de manipuladores aéreos [123]. Estos esquemas de optimización han sido aplicados para el análisis desacoplado de la plataforma aérea y el brazo robótico, lo que genera inconvenientes al abordar diferentes esquemas de control para cada sistema. Por otro lado, se han implementado esquemas de control más avanzados para el seguimiento de trayectorias, como

algoritmos basados en el espacio nulo y seguimiento de camino con objetivos secundarios [124, 125]. Sin embargo, estos métodos no consideran la dinámica acoplada del sistema, sino que emplean únicamente el modelo cinemático del robot. Además, estos trabajos se presentan a nivel de simulación, sin evaluar el comportamiento del sistema ante cambios en las inercias, los cuales están presentes en un sistema acoplado combinado. En consecuencia, el análisis de la dinámica de los manipuladores aéreos en los sistemas de control es totalmente pertinente y también debe investigarse su desempeño a nivel experimental. Por ejemplo, en [126] se desarrolla un control dinámico inverso para un manipulador aéreo con un brazo robótico de tipo paralelo de grados de libertad (DoF). En dicho estudio, los autores proponen la compensación dinámica únicamente del robot de base flotante omnidireccional y mencionan que, para mejorar la precisión del extremo operativo, se debe considerar la compensación dinámica del sistema completo de manera acoplada.

En este capítulo se presenta el uso un modelo dinámico acoplado del sistema robótico, no muy común en la literatura y además se propone un controlador en cascada de compensación dinámica inversa. El controlador mantiene el principio de movimiento coordinado entre la plataforma aérea y el brazo robótico, asignando de manera conjunta las acciones necesarias para cumplir los objetivos de movimiento.

El controlador está fundamentado en métodos numéricos. Se han realizado investigaciones sobre la implementación de la teoría de métodos numéricos en aplicaciones robóticas, como en [127], donde se lleva a cabo el seguimiento de trayectoria en robots móviles. El método de diseño del controlador se basa en la teoría del álgebra lineal, y se emplean técnicas de estimación numérica para determinar el valor de la incertidumbre en cada instante de muestreo. Asimismo, en [128] se presenta un controlador de modo deslizante basado en álgebra lineal para el seguimiento de trayectorias en un robot móvil. El modelo de los manipuladores aéreos se caracteriza por presentar una dinámica altamente no lineal y compleja, cuyo conocimiento es fundamental para el desarrollo de estrategias de control tradicionales, como el control por modo deslizante (SMC) o estrategias de control basadas en dinámica inversa.

El modelo dinámico se expresa en términos de velocidades de referencia, lo que facilita la aplicación de acciones de control en el robot real (Sección 2.5.4.5). El modelo dinámico se utiliza para implementar un controlador de compensación dinámica en cascada con un controlador cinemático, diseñado para cumplir de

manera unificada los tres objetivos de control de movimiento:

1. Control de Posición (**Position Control**).
2. Seguimiento de Trayectoria (**Trajectory Tracking**).
3. Seguimiento de Camino (**Path-Following**).

Todo esto, con la simple modificación de las referencias deseadas para el controlador. Además, se presentan el análisis de estabilidad y la evaluación de la robustez del sistema de control. Finalmente, se realizan pruebas experimentales en un entorno parcialmente estructurado para validar y evaluar el desempeño del esquema de control propuesto.

4.2. Formulación del Problema

Esta sección presenta el esquema multicapa (Figura 4.1). El esquema considera diferentes objetivos, en otras palabras, cada capa cumple una función específica y el sistema está compuesto por cinco capas principales:

1. **Capa de Configuración de Tareas**. El principal objetivo de esta capa es planificar y definir las tareas que ejecutará el manipulador aéreo. Esta capa se subdivide en: *i*) Configuración fuera de línea. En esta subcapa se definen los parámetros iniciales del robot, se selecciona el problema de movimiento a resolver, es decir, se determina si el robot ejecutará control de posición, seguimiento de trayectoria o seguimiento de camino, y se asigna el objetivo de control secundario a resolver mediante la redundancia del sistema robótico. Finalmente, *ii*) Configuración en línea. En esta subcapa es posible modificar el objetivo de control primario, así como modificar o añadir otro objetivo de control secundario.
2. **Capa de Control Cinemático**. En esta capa se implementa un controlador cinemático de norma mínima basado en métodos numéricos para resolver los problemas de control de posición, seguimiento de trayectoria y seguimiento de camino en un manipulador aéreo. En cada período de muestreo, el controlador recibe las posiciones y velocidades de referencia

en la forma deseada. Por lo tanto, esta capa es responsable del cálculo de las velocidades de maniobrabilidad para el sistema. Además, en la capa considera el control de objetivos secundarios.

3. **Capa de Compensación Dinámica**. Es la encargada de compensar la dinámica del manipulador aéreo con el fin de reducir el error de seguimiento de velocidad.

4. **Capa del Robot**. Representa el manipulador aéreo, compuesto por un brazo robótico ubicado en la parte inferior de un vehículo aéreo no tripulado.

5. **Capa del Entorno**. Representa el espacio de trabajo parcialmente estructurado en el que el manipulador aéreo ejecuta la tarea planificada en la primera capa.

El esquema multicapa propuesto presenta independencia de cada capa, es decir, los cambios dentro de cualquier capa no causan cambios estructurales en las otras capas. Se pueden probar varios algoritmos de control no lineal utilizando la misma estrategia de control. Cabe resaltar que, a partir del esquema presentado, se puede obtener una estructura simple; en otras palabras, algunas capas pueden ser añadidas o eliminadas manteniendo la estructura básica, es decir, la adición o eliminación de capas no afecta al resto de las capas. Por ejemplo, la capa de configuración en línea podría ser descartada en el caso de seguimiento de trayectoria en un entorno conocido y sin obstáculos. También se puede incluir una capa de control dinámico adaptativo para tareas a altas velocidades y transporte de cargas pesadas.

4.3. Problemas de Control de Movimiento

En esta sección se propone un esquema de control para resolver el problema de control de posición, seguimiento de trayectoria y seguimiento de camino para un manipulador aéreo de manera unificada. El esquema de control propuesto considera la posición y la velocidad deseadas del extremo operativo del manipulador aéreo como señales de referencia [129]. Por lo tanto, estas señales pueden ser representadas como:

$$\mathbf{r_d}(t, s, \mathbf{r}) = \begin{bmatrix} r_{1d} & r_{2d} & \dots & r_{md} \end{bmatrix}^\intercal \in \mathbb{R}^m \tag{4.1}$$

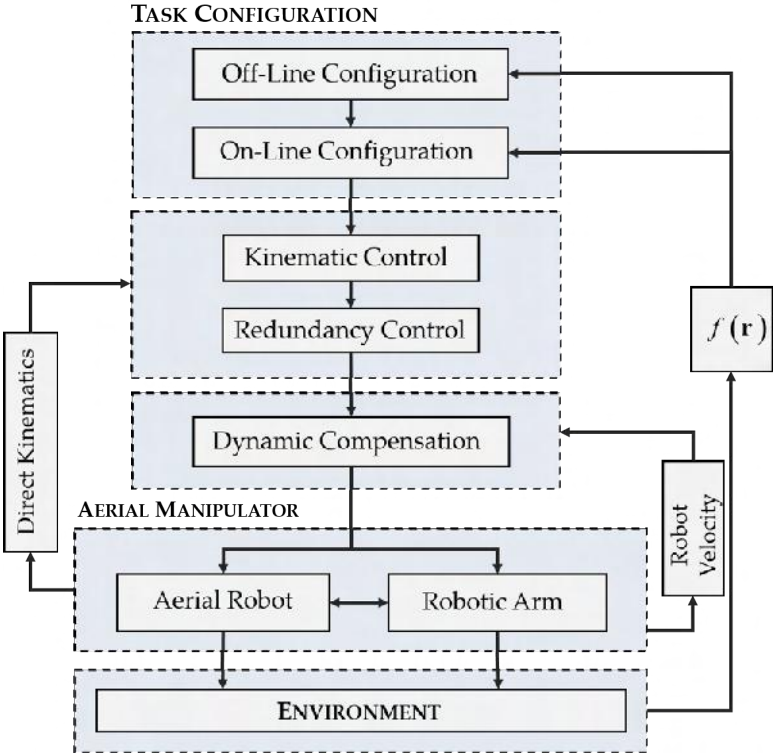


Figura 4.1: Esquema Multicapa.

$$\mathbf{v_d}(t, s, \mathbf{r}) = \begin{bmatrix} v_{1d} & v_{2d} & \dots & v_{md} \end{bmatrix}^\intercal \in \mathbb{R}^m \tag{4.2}$$

donde,

$$\mathbf{r_d} = \begin{bmatrix} \mathbf{p_{rd}}^\intercal & \mathbf{o_{rd}} \end{bmatrix}^\intercal \tag{4.3}$$

es el vector de posición y orientación deseada del extremo operativo; y

$$\mathbf{v_d} = \begin{bmatrix} \mathbf{v_{pd}}^\intercal & v_{od} \end{bmatrix}^\intercal \tag{4.4}$$

representa el vector de velocidad deseada del extremo operativo del robot en cada instante de tiempo. De acuerdo con el problema de control, la posición y velocidades deseadas pueden ser definidas como una función de:

- t: que representa la variable de tiempo.
- s: que representa la variable del perfil de la trayectoria deseada.
- $\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \mathbf{p_r}^\intercal & o_r \end{bmatrix}^\intercal$: es el vector que contiene el vector de posición actual $\mathbf{p_r}$ y la orientación actual o_r del extremo operativo del sistema robótico

4.3.1. Control de Posición

La Figura 4.2 muestra el problema de posicionamiento. Este consiste en maniobrar el robot con el objetivo de posicionar el extremo operativo en un punto deseado y con una orientación deseada, $\mathbf{r_d}$. Por lo tanto, la posición y orientación deseadas de la Ecuación (4.1), así como la velocidad deseada de la Ecuación (4.2) para el control de posición, se definen como:

$$\mathbf{r_d}(t, s, \mathbf{r}) = \mathbf{r_d} \in \mathbb{R}^m \tag{4.5}$$

$$\mathbf{v_d}(t, s, \mathbf{r}) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^m \tag{4.6}$$

El controlador recibe posición y orientación deseada $\left(\mathbf{r_d} \middle| \, t \in [t_0, t_f]\right)$ constante, por lo tanto, la velocidad deseada resulta $\left(\mathbf{v_d} = \mathbf{0} \middle| \, t \in [t_0, t_f]\right)$. Luego, el problema de control de movimiento consiste en determinar una ley de control:

$$\boldsymbol{\mu}_\mathbf{K}(t) = f(\tilde{\mathbf{r}}(t)) \tag{4.7}$$

con,

$$\tilde{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{r_d} - \mathbf{r}(t) \tag{4.8}$$

de manera que:

$$\lim_{t \to 0} \tilde{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^m \tag{4.9}$$

4.3.2. Seguimiento de Trayectoria

El problema de seguimiento de trayectoria de un sistema robótico consiste en maniobrar el robot a lo largo de un perfil continuo y suave, parametrizado en el tiempo. La Figura 4.3 muestra este problema, donde $\mathbf{r_d}(t)$ y $\dot{\mathbf{r}}\mathbf{d}(t)$ representan la posición-orientación y la velocidad deseadas del extremo operativo en el instante t, con respecto al sistema de referencia inercial $\mathcal{F}\mathrm{w}$. Por lo tanto, la posición

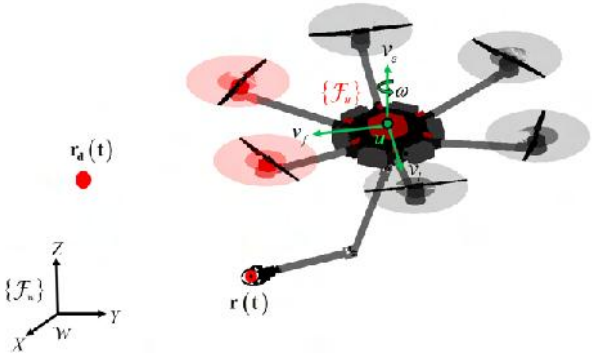


Figura 4.2: Problema de control de posición del manipulador aéreo.

deseada (Ecuación (4.1)) y la velocidad deseada (Ecuación (4.2)) para el control de seguimiento de trayectoria se definen como:

$$\mathbf{r_d}(t, s, \mathbf{r}) = \mathbf{r_d}(t) \tag{4.10}$$

$$\mathbf{v_d}(t, s, \mathbf{r}) = \dot{\mathbf{r}}_\mathbf{d}(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{r_d}(t) \tag{4.11}$$

El controlador de seguimiento de trayectoria recibe la trayectoria deseada y la orientación ($\mathbf{r_d}(t) | \, t \in [t_0, t_f]$) y la velocidad deseada ($\mathbf{v_d} = \dot{\mathbf{r}}_\mathbf{d}\,(t) | \, t \in [t_0, t_f]$). Por lo tanto, el problema de control de movimiento consiste en determinar una ley de control:

$$\boldsymbol{\mu}_\mathbf{K}(t) = f(\tilde{\mathbf{r}}(t), \dot{\mathbf{r}}_\mathbf{d}(t)) \tag{4.12}$$

con,

$$\tilde{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{r_d}(t) - \mathbf{r}(t) \tag{4.13}$$

de manera que:

$$\lim_{t \to 0} \tilde{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^m \tag{4.14}$$

4.3.3. Seguimiento de Camino

El control de seguimiento de camino consiste en maniobrar el robot de manera que el extremo operativo siga un camino deseado no parametrizado en el tiempo.

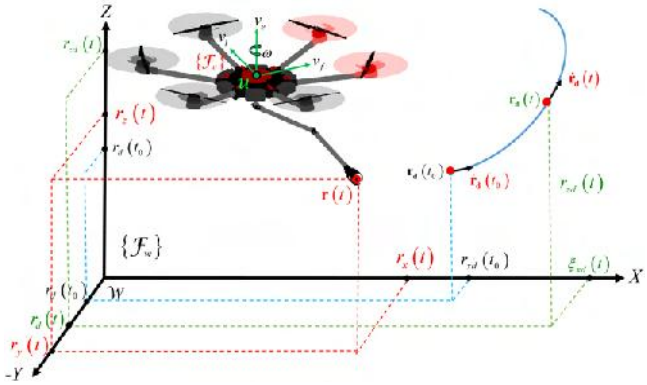


Figura 4.3: Problema de seguimiento de trayectoria del manipulador aéreo.

La Figura 4.4 muestra el problema de seguimiento de camino del robot, donde:

$$\boldsymbol{\mathcal{P}}(s) = \begin{bmatrix} p_x(s) & p_y(s) & p_z(s) \end{bmatrix}^\intercal \tag{4.15}$$

representa el camino deseado a seguir. El vector:

$$\mathbf{r_d} = \begin{bmatrix} \mathbf{p_d}^\intercal & \mathbf{o_d} \end{bmatrix}^\intercal = \begin{bmatrix} r_{xd} & r_{yd} & r_{zd} & r_{od} \end{bmatrix}^\intercal \tag{4.16}$$

donde, $\mathbf{p_d}$ representa el punto del camino más cercano a la posición actual del extremo operativo; $\mathbf{o_d}$ es la orientación deseada del extremo operativo descrita sobre plano-XY. La norma del error de posición es:

$$\rho = \|\tilde{r}_x, \tilde{r}_y, \tilde{r}_z\| \tag{4.17}$$

y $\mathbf{v_d}$ es la velocidad deseada del extremo operativo sobre el camino deseado, definida con respecto al marco de referencia inercial $\{\mathcal{F}_\mathrm{w}\}$. Por lo tanto, la posición deseada (Ecuación (4.1)) y la velocidad (Ecuación (4.2)) para el control de seguimiento de camino se definen como:

$$\mathbf{r_d}(t, s, \mathbf{r}) = \mathbf{r_d}(s, \mathbf{r}) \tag{4.18}$$

$$\mathbf{v_d}(t, s, \mathbf{r}) = \mathbf{v_d}(s, \mathbf{r}) \tag{4.19}$$

La posición y velocidad deseadas sobre el camino no dependen del tiempo como variable independiente, sino únicamente de la posición actual del sistema robótico.

Por lo tanto, $(\mathbf{r_d}(s,\mathbf{r})|\, t \in [t_0, t_f])$ representa al vector que contiene la posición más cercana del camino deseado al extremo operativo del manipulador aéreo y la orientación deseada sobre el plano-XY. Asimismo, la velocidad deseada:

$$\mathbf{v_d}(s,\mathbf{r}) = \left[\mathbf{v_{p_d}}(s,\mathbf{r})^\intercal \quad v_{o_d}(s,\mathbf{r})\right]^\intercal \,|\, t \in [t_0, t_f] \tag{4.20}$$

donde $\mathbf{v_{p_d}} \in \mathbb{R}^3$ es la velocidad tangencial deseada al camino en el punto $\mathbf{p_d}$ y su norma:

$$\|\mathbf{v_{p_d}}\| = v_d \tag{4.21}$$

representa la velocidad deseada en este punto. Mientras que $v_{o_d} \in \mathbb{R}$ es la velocidad de rotación deseada del extremo operativo. Por lo tanto, el objetivo de control es diseñar una ley de control para el sistema robótico:

$$\boldsymbol{\mu}_\mathbf{K}(t) = f(\tilde{\mathbf{r}}(t), \mathbf{v_d}(s,\mathbf{r})) \tag{4.22}$$

con,

$$\tilde{\mathbf{r}}\,(t) = \mathbf{r_d}(t) - \mathbf{r}(t) \tag{4.23}$$

para garantizar la convergencia de la posición del extremo operativo $\mathbf{r}(t)$ al camino deseado $\boldsymbol{\mathcal{P}}(s)$, es decir:

$$\lim_{t\to\infty} \tilde{\mathbf{r}}\,(t) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^m \tag{4.24}$$

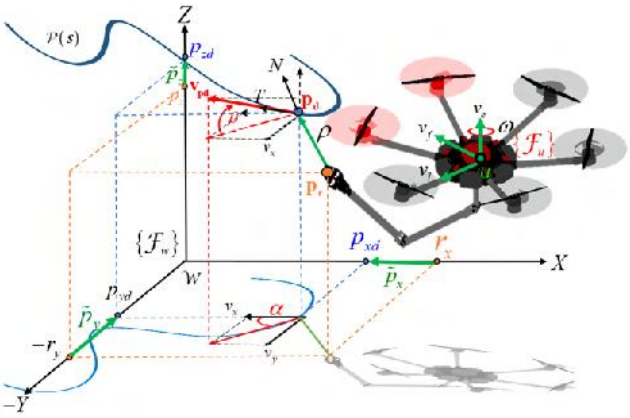


Figura 4.4: Problema de seguimiento de camino del manipulador aéreo.

4.4. Esquema de Control

El esquema de control propuesto para un manipulador aéreo se muestra en la Figura 4.5. Este controlador puede aplicarse para resolver el problema de control de movimiento en tareas de posicionamiento, seguimiento de trayectoria y seguimiento de camino, mediante una selección adecuada de las referencias de control en la capa de configuración de tareas del esquema multicapa propuesto (ver Figura 4.1).

4.4.1. Controlador Cinemático

Es un controlador cinemático de norma mínima con saturación de los comandos de maniobrabilidad del manipulador aéreo. Este controlador recibe como entradas $\mathbf{r_d}(k) \in \mathbb{R}^m$ y $v_d(k) \in \mathbb{R}^+$, que describen la posición y orientación deseadas, así como la velocidad deseada del extremo operativo con respecto al marco de referencia inercial $\{\mathcal{F}_\mathrm{w}\}$, donde k representa el instante de tiempo discreto. Los errores de control se definen como:

$$\tilde{\mathbf{r}}(k) = \mathbf{r_d}(k) - \mathbf{r}(k) = \Delta\mathbf{r}(k) \in \mathbb{R}^m \tag{4.25}$$

Por lo tanto, el objetivo de control del manipulador aéreo se define como:

$$\lim_{k\to\infty} \left(\mathbf{r_d}(k) - \mathbf{r}(k)\right) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^m \tag{4.26}$$

4.4.2. Controlador Dinámico

Es una ley de control que compensa la dinámica del manipulador aéreo con el fin de reducir los errores de seguimiento de velocidad y las perturbaciones causadas por las condiciones del entorno y los efectos dinámicos del sistema. Este controlador recibe como entradas el vector $\boldsymbol{\mu}_\mathbf{K}(k) \in \mathbb{R}^n$ calculado por el controlador cinemático no lineal y genera los comandos de maniobrabilidad del manipulador aéreo $\boldsymbol{\mu}_\mathbf{D}(k) \in \mathbb{R}^n$. Los errores de control se definen como:

$$\tilde{\boldsymbol{\mu}}(k) = \boldsymbol{\mu}_\mathbf{K}(k) - \boldsymbol{\mu}(k) = \Delta\tilde{\boldsymbol{\mu}}(k) \in \mathbb{R}^n \tag{4.27}$$

Por lo tanto, el objetivo del control de compensación dinámica se puede definir como:

$$\lim_{k\to\infty} \left(\boldsymbol{\mu}_\mathbf{K}(k) - \boldsymbol{\mu}(k)\right) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n \tag{4.28}$$

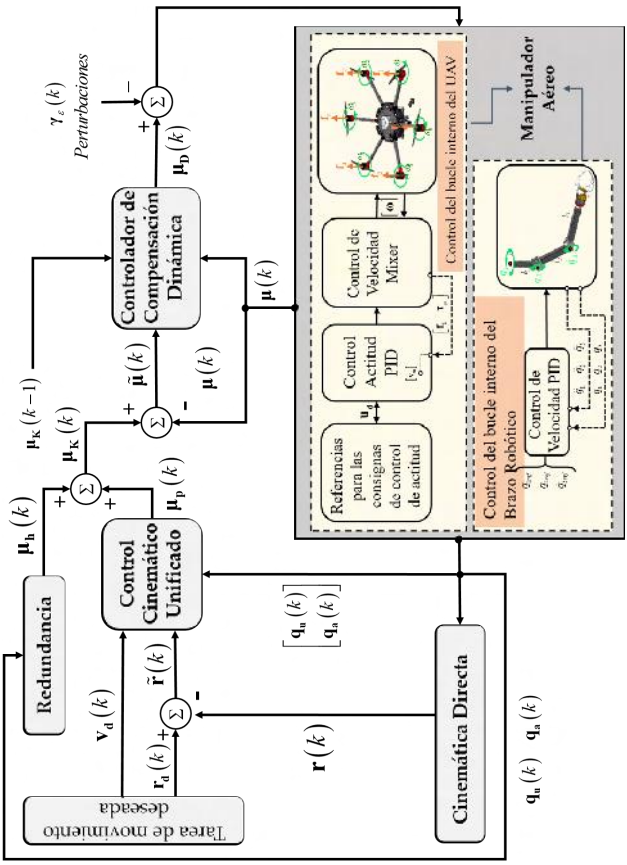


Figura 4.5: Esquema de control en cascada.

4.5. Control Cinemático No Lineal Unificado

El controlador cinemático no lineal en $t = kT_0$, donde T_0 representa el período de muestreo según el teorema de Nyquist, y $k \in \{0, 1, 2, 3, ...\}$ son las muestras de la respuesta continua. Recibe la posición deseada y la velocidad deseada del extremo operativo del robot $\mathbf{r_d}(k) \in \mathbb{R}^m$ y $\upsilon_d\,(k) \in \mathbb{R}^+$, respectivamente. Este controlador genera las velocidades de maniobrabilidad del sistema robótico $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{K}}(k) \in \mathbb{R}^n$. En otras palabras, el movimiento del extremo operativo deseado del robot es una función de $\mathbf{r_d}(k)$ y $\upsilon_d(k)$. Por lo tanto, el problema de control de movimiento consiste en determinar el vector de maniobrabilidad $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{K}}(k)$ para lograr el movimiento deseado del sistema robótico. La evolución correspondiente de todo el robot está dada por el vector de coordenadas generalizadas del manipulador aéreo $\mathbf{q}\,(k)$.

4.5.1. Diseño del Controlador

El diseño de la ley de control propuesta se basa en herramientas de métodos numéricos y en propiedades del álgebra lineal [130]. Por lo tanto, el modelo cinemático de un manipulador aéreo (Ecuación (2.46)):

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{J}(\mathbf{q_u}(t), \mathbf{q_a}(t))\boldsymbol{\mu}(t) \tag{4.29}$$

puede discretizarse mediante el método de Euler, es posible determinar el estado del sistema en el instante $(k + 1)$ y considerando el tiempo de muestreo T_0 de tal manera que la Ecuación (4.29) discretizada resulta:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}(t) &= \mathbf{J}(\mathbf{q_u}(t), \mathbf{q_a}(t)\boldsymbol{\mu}(t) \\ \frac{\mathbf{r}(k+1) - \mathbf{r}(k)}{T_0} &= \mathbf{J}(\mathbf{q_u}(k), \mathbf{q_a}(k)\boldsymbol{\mu}(k) \\ \mathbf{r}(k+1) - \mathbf{r}(k) &= T_0\mathbf{J}(\mathbf{q_u}(k), \mathbf{q_a}(k)\boldsymbol{\mu}(k) \end{aligned} \tag{4.30}$$

Resultando:

$$\mathbf{r}(k+1) = T_0\mathbf{J}\left(\mathbf{q}\left(k\right)\right)\boldsymbol{\mu}(k) + \mathbf{r}(k) \tag{4.31}$$

Por otro lado, el uso de métodos numéricos para calcular la evolución de los sistemas se basa principalmente en la posibilidad de determinar el estado del sistema en el instante $(k + 1)$, siempre que se tenga conocimiento del estado y

de la acción de control en el instante (k). Entonces, una variable en el instante $(k+1)$ puede ser sustituida por la variable deseada, y posteriormente se puede calcular la acción de control necesaria para que la salida del sistema cambie de su valor actual a uno deseado. Por lo tanto, para alcanzar este objetivo de control, se propone que la dinámica del error siga la siguiente expresión:

$$\dot{\tilde{\mathbf{r}}}(t) + \mathbf{\Phi}\tilde{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{0} \tag{4.32}$$

donde, $\mathbf{\Phi}$ es una matriz cuadrada de ponderación. Posteriormente, discretizando la ecuación del error mediante el método de Euler y considerando que el error en el instante (k)está dado por:

$$\tilde{\mathbf{r}}(k) = \mathbf{r_d}(k) - \mathbf{r}(k) \tag{4.33}$$

resulta que el estado en el instante $(k+1)$ del sistema en función del estado deseado y de la acción de control es:

$$\mathbf{r}(k+1) = \mathbf{r_d}(k+1) - \mathbf{r_d}(k) + \mathbf{r}(k) + T_0\mathbf{\Phi}(k)(\mathbf{r_d}(k) - \mathbf{r}(k)) \tag{4.34}$$

con $\mathbf{\Phi}(k) \in \mathbb{R}^{m\times m}$ como matriz diagonal que pondera y satura los errores de control definida como:

$$\mathbf{\Phi} = \text{diag}\left(\frac{\Phi_i}{\sigma_i + |\tilde{r}_i(k)|}\right) \tag{4.35}$$

donde, $\sigma_i \in \mathbb{R}^+$ define la velocidad de saturación de $\tilde{r}_i(k)$; $T_0\Phi_i \in \mathbb{R}^+$ representa el valor máximo de saturación del componente i-ésimo del vector de error de control $\tilde{\mathbf{r}}(k)$.

Por otro lado, igualando la Ecuación (4.31) y Ecuación (4.34) obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}(k))\boldsymbol{\mu}(k) = \frac{1}{T_0}(\mathbf{r_d}(k+1) - \mathbf{r_d}(k)) + \mathbf{\Phi}(k)(\mathbf{r_d}(k) - \mathbf{r}(k)) \tag{4.36}$$

Ahora, como el manipulador aéreo es un sistema redundante (Apéndice B), es decir:

$$\mathbf{J}(\mathbf{q_u}, \mathbf{q_a}(k)) \in \mathbb{R}^{m\times n} \quad \text{con} \quad m < n \tag{4.37}$$

es necesario considerar la pseudo inversa por la derecha de $\mathbf{J}\left(\mathbf{q}(k)\right)$. Además, se sabe que un sistema de ecuaciones lineales es homogéneo si puede escribirse en la forma,

$$\mathbf{J}\left(\mathbf{q_u}(k), \mathbf{q_a}(k)\right)\boldsymbol{\mu}(k) = \mathbf{0} \tag{4.38}$$

Ahora bien, si se considera que la configuración del sistema robótico es redundante, por lo tanto, $\mathbf{J}\left(\mathbf{q}\left(k\right)\right) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tiene más incógnitas que ecuaciones con rango $r = n$ para cada:

$$\left(\frac{1}{T_0}\left(\mathbf{r_d}(k+1) - \mathbf{r_d}(k)\right) + \mathbf{\Phi}(k)\left(\mathbf{r_d}\left(k\right) - \mathbf{r}(k)\right)\right) \tag{4.39}$$

y teniendo en cuenta que la ecuación homogénea tiene una solución no trivial, el sistema podría tener soluciones infinitas.

En este caso, considere que la Ecuación (4.36) es consistente para:

$$\left(\frac{1}{T_0}\left(\mathbf{r_d}(k+1) - \mathbf{r_d}(k)\right) + \mathbf{\Phi}(k)\left(\mathbf{r_d}(k) - \mathbf{r}(k)\right)\right) \tag{4.40}$$

y dado que, $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{p}}\left(k\right) \in \mathbb{R}^n$ es una solución particular del sistema, entonces, la solución de la Ecuación (4.36) es el conjunto de todos los vectores de la forma:

$$\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{K}}(k) = \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{p}}(k) + \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{h}}(k) \tag{4.41}$$

donde, $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{h}}(k) \in \mathbb{R}^n$ es cualquier solución del sistema homogéneo:

$$\mathbf{J}\left(\mathbf{q}\left(k\right)\right)\boldsymbol{\mu}(k) = \mathbf{0}$$

Un método de solución viable consiste en formular el problema como un problema de optimización lineal sujeto a restricciones:

$$\tfrac{1}{2}\left\|\boldsymbol{\mu}\left(k\right)\right\|_2^2 = \text{mín} \tag{4.42}$$

obteniendo como solución particular:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{p}}(k) = \mathbf{J}(\mathbf{q}(k))^{\dagger}\left(\frac{\mathbf{r_d}(k+1) - \mathbf{r_d}(k)}{T_0}\right) + \ldots \\ \ldots + \mathbf{J}(\mathbf{q}(k))^{\dagger}\left(\mathbf{\Phi}(k)\left(\mathbf{r_d}(k) - \mathbf{r}(k)\right)\right)\end{aligned} \tag{4.43}$$

donde,

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}\left(k\right))^{\dagger} = \mathbf{J}(\mathbf{q}\left(k\right))^{\intercal}(\mathbf{J}\left(\mathbf{q}\left(k\right)\right)\mathbf{J}(\mathbf{q}\left(k\right))^{\intercal})^{-1} \tag{4.44}$$

es la matriz pseudo inversa por la derecha de $\mathbf{J}\left(\mathbf{q}\left(k\right)\right)$. El segundo término de la Ecuación (4.43) permite realizar tareas de posicionamiento, mientras que el primer término permite realizar el seguimiento de velocidad. Por lo tanto, la

Ecuación (4.43) puede unificarse de manera que permita realizar ambas tareas con tan solo modificar los parámetros de velocidad, de tal forma que:

$$\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{p}}(k) = \mathbf{J}(\mathbf{q}(k))^{\dagger} \left(\mathbf{v_d}\left(k\right) + \boldsymbol{\Phi}(k) \left(\mathbf{r_d}\left(k\right) - \mathbf{r}\left(k\right)\right)\right) \tag{4.45}$$

donde, $\mathbf{v_d}\left(k\right) \in \mathbb{R}^m$ representa la velocidad de seguimiento deseada. Ahora, $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{h}}(k)$ como una solución homogénea de la Ecuación (4.36) es el conjunto de soluciones donde:

$$\mathbf{J}\left(\mathbf{q}\left(k\right)\right) \boldsymbol{\mu}(k) = \mathbf{0}$$

Por lo tanto, para el problema de optimización es necesario definir la función de costo como:

$$\text{mín} \left(\tfrac{1}{2} \left\|\boldsymbol{\mu}(k) - \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{0}}(k)\right\|_2^2\right) \quad \text{con} \quad \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{0}}(k) \in \mathbb{R}^n \tag{4.46}$$

obteniendo así la solución homogénea:

$$\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{h}}(k)) = \left(\mathbf{I}_{n\times n} - \mathbf{J}(\mathbf{q}\left(k\right))^{\dagger} \mathbf{J}\left(\mathbf{q}\left(k\right)\right)\right) \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{0}}\left(k\right) \tag{4.47}$$

donde,

$$\left(\mathbf{I}_{n\times n} - \mathbf{J}(\mathbf{q}\left(k\right))^{\dagger} \mathbf{J}\left(\mathbf{q}\left(k\right)\right)\right)$$

es el operador de proyección ortogonal en el espacio nulo de $\mathbf{J}\left(\mathbf{q}\left(k\right)\right)$ y $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{0}}\left(k\right)$ es el vector de velocidad que solo afecta la estructura interna del sistema y no afecta la posición del extremo operativo del manipulador aéreo.

Finalmente, considerando la Ecuación (4.45) y Ecuación (4.47) en la Ecuación (4.36), se propone la siguiente ley de control:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{K}}(k)) = & \underbrace{\mathbf{J}(\mathbf{q}(k)))^{\dagger} \left(\mathbf{v_d}(k) + \boldsymbol{\Phi}(k) \left(\mathbf{r_d}(k)) - \mathbf{r}(k)\right)\right)}_{\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{p}}(k))} + \ldots \\ & \ldots + \underbrace{\left(\mathbf{I}_{n\times n} - \mathbf{J}(\mathbf{q}\left(k\right))^{\dagger} \mathbf{J}\left(\mathbf{q}\left(k\right)\right)\right) \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{0}}(k))}_{\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{h}}(k))} \end{aligned} \tag{4.48}$$

En la ley de control propuesta (Ecuación (4.48)), el primer término en el lado derecho describe la tarea principal a realizar por el extremo operativo, que minimiza el término $\frac{1}{2} \left\|\boldsymbol{\mu}\left(k\right)\right\|_2^2$. El segundo término, por su parte, define el

movimiento de la configuración interna del robot. En consecuencia, este tipo de sistema permite establecer varios objetivos de control secundarios que no afectan la tarea principal. La redundancia de los robots manipuladores aéreos (Apéndice B) puede ser utilizada de manera efectiva para lograr características adicionales tales como la evasión de obstáculos en el espacio de trabajo, evitar configuraciones singulares, establecer configuraciones seguras para el brazo robótico y optimizar diversos criterios de movimiento del robot.

4.5.2. Análisis de Estabilidad

Ahora, en esta sección se analiza la estabilidad de la ley de control propuesta (Ecuación (4.48)). Para lo cual, se considera un seguimiento perfecto de la velocidad, es decir,

$$\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{K}}(k) \equiv \boldsymbol{\mu}(k)$$

Por lo tanto, la ecuación de lazo cerrado se obtiene al igualar la Ecuación (4.48) con la Ecuación (4.31), que pertenece al modelo cinemático discretizado del sistema:

$$\begin{aligned}\frac{(\mathbf{r}(k+1)-\mathbf{r}(k))}{T_0} =& \mathbf{J}(\mathbf{q}(k))\Big(\mathbf{J}(\mathbf{q}(k))^{\dagger}(\mathbf{v_d}(k)+\boldsymbol{\Phi}(k)(\mathbf{r_d}(k)-\mathbf{r}(k))) \\ &\ldots+(\mathbf{I}_{n\times n})-\mathbf{J}(\mathbf{q}(k))^{\dagger}\mathbf{J}(\mathbf{q}(k))\boldsymbol{\mu_0}(k)\Big)\end{aligned} \tag{4.49}$$

Considerando que $\mathbf{J}(\mathbf{q}(k))\mathbf{J}(\mathbf{q}(k))^{\dagger} = \mathbf{I} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ y después de simplificar, se obtiene:

$$\mathbf{r}(k+1)-\mathbf{r}(k) = T_0\nu_{\mathbf{d}}(k)+T_0\boldsymbol{\Gamma}(k)(\mathbf{r_d}(k)-\mathbf{r}(k)) \tag{4.50}$$

A continuación, se estudia la convergencia del controlador cinemático unificado hacia cualquiera de los objetivos básicos de control de movimiento.

4.5.2.1. Caso 1: Control de Seguimiento de Trayectoria

Para analizar la evolución del error de control en el problema de seguimiento de trayectoria dentro de la Ecuación (4.50) de lazo cerrado se considera que:

$$\mathbf{v_d}(k) = \frac{1}{T_0}(\mathbf{r_d}(k+1)-\mathbf{r_d}(k))$$

por consiguiente,

$$\tilde{\mathbf{r}}\,(k+1) = (\mathbf{I}_{m\times m} - T_0\mathbf{\Phi})\,\tilde{\mathbf{r}}\,(k) \tag{4.51}$$

La Tabla 4.1 representa la evolución del i-ésimo error de control de la Ecuación (4.51) para el problema de seguimiento de trayectoria.

Tabla 4.1
Evolución del error de control $\tilde{r}_i\,(k)$ en el instante de tiempo k .

k	$\tilde{r}_i(k+1)$	$(1 - T_0\Phi_{ii})\,\tilde{r}_i(k)$
1	$\tilde{r}_i(2)$	$(1 - T_0\Phi_{ii})\,\tilde{r}_i(1)$
2	$\tilde{r}_i(3)$	$(1 - T_0\Phi_{ii})\tilde{r}_i(2) = (1 - T_0\Phi_{ii})^2\tilde{r}_i\,(1)$
3	$\tilde{r}_i(4)$	$(1 - T_0\Phi_{ii})\,\tilde{r}_i(3) = (1 - T_0\Phi_{ii})^3\tilde{r}_i\,(1)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$\tilde{r}_i(n+1)$	$(1 - T_0\Phi_{ii})\,\tilde{r}_i(n) = (1 - T_0\Phi_{ii})^n\tilde{r}_i\,(1)$

Si $n \to \infty$, el error de control $\tilde{r}_i(n+1)$ será:

$$\tilde{r}_i(\infty) = (1 - T_0\Phi_{ii})^\infty\tilde{r}_i\,(1)$$

Por lo tanto, si $0 < T_0\Phi_{ii} < 1$, el error de control resulta ser $\tilde{r}_i(\infty) = 0$ cuando $k \to \infty$. A partir de un análisis similar al realizado para el error de control $\tilde{r}_i(k)$, se puede concluir que:

$$\lim_{k\to\infty} \tilde{\mathbf{r}}(kT_0) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^m$$

con,

$$0 < T_0\,\text{máx}\,(diag\,(\mathbf{\Phi})) < 1 \quad \text{cuando} \quad k \to \infty$$

el i-ésimo error de control del manipulador aéreo es asintóticamente estable satisfaciendo el objetivo de control.

4.5.2.2. Caso 2: Control de Posición

El análisis de estabilidad para el problema de control de posición es similar al problema de seguimiento de trayectoria, con la diferencia de que

$$\mathbf{r_d}(k+1) = \mathbf{r_d}(k)$$

De este modo, se puede concluir directamente que:

$$\lim_{k\to\infty} \tilde{\mathbf{r}}\,(kT_0) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^m$$

4.5.2.3. Caso 3: Seguimiento de Camino

Este análisis se desarrolla de forma análoga al presentado en el Capítulo 3, extendiéndose ahora al dominio discreto e incorporando la compensación dinámica en la ecuación de lazo cerrado.

Ahora, a partir de la Ecuación (4.50), se analiza la evolución del error de control para el problema de seguimiento de camino. Donde $\mathbf{r_d}(t)$ viene a ser el vector que contiene el punto más cercano del camino al extremo operativo del robot $\mathbf{p_d}(t)$ y la posición angular deseada $o_d(t)$ y

$$\mathbf{v_d}\,(t) = \begin{bmatrix}\mathbf{v_{p_d}}\,(t)^\intercal & v_{o_d}(t)\end{bmatrix}^\intercal$$

donde, $\mathbf{v_{p_d}}(t) \in \mathbb{R}^3$ es la velocidad deseada en la dirección tangencial al punto más cercano del extremo operativo; y $v_{o_d}(t) = \dot{o}_d(t) \in \mathbb{R}$ es la velocidad deseada de rotación del extremo operativo.

- ***Estabilidad de la orientación en el seguimiento de camino.*** De la Ecuación (4.50) consideremos únicamente la parte para la orientación, tal que:

$$o_r(k+1) - o_r(k) = T_0 v_{o_d}(k) + T_0 \Phi_o\,(o_{r_d}(k) - o_r(k)) \tag{4.52}$$

  La velocidad deseada de rotación del extremo operativo se define como:

$$v_{o_d}(k) = \frac{o_d(k+1) - o_d(k)}{T_0} \tag{4.53}$$

  donde $o_d(k)$ es la orientación deseada en el punto más cercano $\mathbf{p_d}(k)$ en el instante k, lo que implica que la ecuación en lazo cerrado para la orientación resulta en:

$$\tilde{o}_r(k+1) = (1 - \Phi_o)\,\tilde{o}_r\,(k) \tag{4.54}$$

  Usando un análisis similar al de la Ecuación (4.51), se obtiene,

$$\tilde{o}_r(\infty) = (1 - T_0\Phi_o)^\infty \tilde{o}_r\,(1) \tag{4.55}$$

Si se cumple que $0 < T_0\Phi_o < 1$, entonces

$$\lim_{k\to\infty} \tilde{o}_r\left(kT_0\right) = 0 \tag{4.56}$$

En consecuencia, el sistema de control para la orientación es asintóticamente estable.

- ***Estabilidad de posición en el seguimiento de camino***. Ahora, de la Ecuación (4.50), se considera únicamente la ecuación para la posición del extremo operativo, de modo que:

$$\mathbf{p_r}\left(k\right) = \begin{bmatrix} r_x(k) & r_y(k) & r_z(k) \end{bmatrix}^\intercal$$

es el vector de posición del extremo operativo y $\mathbf{p_d} \in \mathbb{R}^3$ como el vector deseado que representa el punto más cercano al extremo operativo del manipulador aéreo, entonces se obtiene que:

$$\mathbf{p_r}\left(k+1\right) - \mathbf{p_r}\left(k\right) = T_0\mathbf{v_{p_d}}\left(k\right) + T_0\mathbf{\Phi_p}\left(\mathbf{p_d}\left(k\right) - \mathbf{p_r}\left(k\right)\right) \tag{4.57}$$

Nótese que $\mathbf{v_{p_d}}\left(k\right)$ es una velocidad tangencial en $\mathbf{p_d}\left(k\right)$ que no proviene de una derivada con respecto al tiempo y tiene una rapidez deseada $\|\mathbf{v_{p_d}}\| = v_d$. Ahora, reescribiendo la Ecuación (4.57) de la siguiente manera:

$$\frac{\mathbf{p_r}\left(k+1\right) - \mathbf{p_r}\left(k\right)}{T_0} = \mathbf{v_{p_d}}\left(k\right) + \mathbf{\Phi_p}\left(\mathbf{p_d}\left(k\right) - \mathbf{p_r}\left(k\right)\right) \tag{4.58}$$

Ahora, considerando el método de derivación de Euler, se obtiene que:

$$\mathbf{p_r}\left(k+1\right) - \mathbf{p_r}\left(k\right) = T_0\dot{\mathbf{p}}_\mathbf{r}\left(k\right)$$

y tomando en cuenta que error de posición con respecto al punto más cercano al extremo operativo es

$$\tilde{\mathbf{p}}_\mathbf{r}\left(k\right) = \left(\mathbf{p_d}\left(k\right) - \mathbf{p_r}\left(k\right)\right)$$

la Ecuación (4.58) se reduce a:

$$\dot{\mathbf{p}}_\mathbf{r}\left(k\right) = \mathbf{v_{p_d}}\left(k\right) + \mathbf{\Phi_o}\left(\tilde{\mathbf{p}}_\mathbf{r}\left(k\right)\right) \tag{4.59}$$

Ahora, el vector de posición del extremo operativo $\mathbf{p_r}\left(k\right)$, de acuerdo con las coordenadas de Frenet [111, 112], tiene dos componentes:

- $\mathbf{p_{r_T}}$ es la componente Tangencial en $\mathbf{T_p}$ en el camino.
- $\mathbf{p_{r_N}}$ es la componente Normal en $\mathbf{N_p}$ en el camino.

La velocidad en la componente tangencial $\mathbf{T_p}$ en el instante (k) está dada por:

$$\dot{\mathbf{p}}_{r_T}(k) = \mathbf{v}_{\mathbf{p_d}}(k) \tag{4.60}$$

lo que representa la velocidad deseada tangencial al camino. Mientras que la velocidad en la componente normal es:

$$\dot{\mathbf{p}}_{\mathbf{r_N}}(k) = \mathbf{\Phi_p}(\tilde{\mathbf{p}}_{\mathbf{r}}(k)) \tag{4.61}$$

lo que significa una velocidad normal a la tangente del camino a la cual el extremo operativo se aproxima a dicho camino. De acuerdo con las coordenadas de Frenet, la velocidad $\dot{\mathbf{p}}_{\mathbf{r_N}}(k)$ tiene dirección hacia el punto más cercano $\mathbf{p_d}(k)$ en el camino. Así, cuando el extremo operativo se mueve en esa dirección, el error disminuye. Por lo tanto, la velocidad de movimiento en esa dirección es la velocidad decreciente del error, que se expresa como,

$$\dot{\mathbf{p}}_{\mathbf{r_N}}(k) = -\dot{\tilde{\mathbf{p}}}_{\mathbf{r}}(k)$$

Ahora, al sustituir esta velocidad decreciente en la Ecuación (4.61), se obtiene:

$$\dot{\tilde{\mathbf{p}}}_r(k) + \mathbf{\Phi_p}(\tilde{\mathbf{p}}_{\mathbf{r}}(k)) = \mathbf{0} \tag{4.62}$$

Discretizando $\dot{\tilde{\mathbf{p}}}_r(k)$ para T_0 resulta:

$$\dot{\tilde{\mathbf{p}}}_r(k) = \frac{\tilde{\mathbf{p}}_{\mathbf{r}}(k+1) - \tilde{\mathbf{p}}_{\mathbf{r}}(k)}{T_0} \tag{4.63}$$

luego, considerando la Ecuación (4.63) en la Ecuación (4.62) resulta:

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{\mathbf{p}}_{\mathbf{r}}(k+1) - \tilde{\mathbf{p}}_{\mathbf{r}}(k)}{T_0} + \mathbf{\Phi_p}\tilde{p}_r(k) &= \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{p}}_{\mathbf{r}}(k+1) - \tilde{\mathbf{p}}_{\mathbf{r}}(k) &= -T_0\mathbf{\Phi_p}\tilde{\mathbf{p}}_{\mathbf{r}}(k) \\ \tilde{\mathbf{p}}_{\mathbf{r}}(k+1) &= \tilde{\mathbf{p}}_{\mathbf{r}}(k) - T_0\mathbf{\Phi_p}\tilde{\mathbf{p}}_{\mathbf{r}}(k) \end{aligned} \tag{4.64}$$

Entonces, despejando el error $\tilde{\mathbf{p}}_{\mathbf{r}}(k+1)$ se obtiene:

$$\tilde{\mathbf{p}}_{\mathbf{r}}(k+1) = (\mathbf{I} - T_0\mathbf{\Phi_p})\,\tilde{\mathbf{p}}_{\mathbf{r}}(k) \tag{4.65}$$

Analizando el error para el i-ésimo valor de la Ecuación (4.65), de manera similar a la Ecuación (4.51), y tomando en cuenta que vector es $\tilde{\mathbf{p}}_\mathbf{r} = \begin{bmatrix}\tilde{r}_x & \tilde{r}_y & \tilde{r}_z\end{bmatrix}^\mathsf{T}$ se obtiene que:

$$\tilde{r}_i\left(n+1\right) = \left(1 - T_0\Phi_{p_{ii}}\right)^n \tilde{r}_i\left(1\right) \tag{4.66}$$

Entonces, si $n \to \infty$, el error de control $\tilde{p}_{r_i}\left(n+1\right)$ será igual a:

$$\tilde{r}_i\left(\infty\right) = \left(1 - T_0\Phi_{p_{ii}}\right)^\infty \tilde{r}_i\left(1\right) \tag{4.67}$$

Por consiguiente, si $0 < T_0\Phi_{p_{ii}} < 1$, el error de control $\tilde{r}_i\left(\infty\right) = 0$ cuando $k \to \infty$. Realizando un análisis similar al del error de control $\tilde{\mathbf{p}}_\mathbf{r}\left(k\right)$, se concluye que:

$$\lim_{k\to\infty} \tilde{\mathbf{p}}_\mathbf{r}(k) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^3$$

Con $0 < T_0 \max\left(diag\left(\mathbf{\Phi}_\mathbf{p}\right)\right) < 1$, cuando $k \to \infty$, el i-ésimo error de control del manipulador aéreo converge a cero, verificándose que el sistema es asintóticamente estable logrando cumplir con el objetivo de control de seguimiento de camino.

Observación 9 *Cabe mencionar que el período de muestreo T_0 se expresa en segundos y, por lo general, es menor a 1 [s] para obtener una mejor retroalimentación de datos en tiempo real.*

Observación 10 *Para lograr el objetivo del control de seguimiento de camino, la velocidad deseada tangente al camino está definida en la Ecuación* (3.23)*, y la velocidad de rotación deseada en la Ecuación* (3.26)*, mientras que los ángulos α y β están definidos en la Ecuación* (3.11)*.*

4.6. Control de Compensación Dinámica

El controlador de compensación dinámica en cascada recibe las velocidades generadas por el controlador cinemático no lineal $\boldsymbol{\mu}_\mathbf{K}(k)$ y genera nuevas velocidades de maniobra para el manipulador aéreo. El seguimiento de la velocidad deseada del robot es una aplicación de $\boldsymbol{\mu}_\mathbf{K}\left(k\right)$, mientras que el problema de control consiste en determinar un vector de maniobrabilidad $\mu_\mathbf{D}\left(k\right)$ para alcanzar la

velocidad deseada del sistema robótico. La velocidad del sistema robótico está dada por el vector $\boldsymbol{\mu}(k)$. Por lo tanto, si no existe un seguimiento perfecto de velocidad, existe un error de velocidad definido como,

$$\tilde{\boldsymbol{\mu}}(k) = \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{K}}(k) - \boldsymbol{\mu}(k) \tag{4.68}$$

4.6.1. Diseño del Controlador

La ley de control propuesta para la compensación dinámica se basa en la discretización mediante el método de Euler, por lo que el modelo dinámico del sistema robótico descrito en la Ecuación (2.120), discretizado para $t = kT_0$, resulta:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{ref}}(k) =& \mathbf{M}(\mathbf{q}(k))\left(\frac{\boldsymbol{\mu}(k) - \boldsymbol{\mu}(k-1)}{T_0}\right) + \ldots \\ &\ldots + \mathbf{C}(\mathbf{q}(k), \boldsymbol{\mu}(k))\boldsymbol{\mu}(k) + \mathbf{g}(\mathbf{q}(k))\end{aligned} \tag{4.69}$$

Ahora, para determinar la acción de control necesaria para que la salida pase de su valor actual al valor deseado, se considera la siguiente expresión:

$$\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{D}}(k) = \mathbf{M}(\mathbf{q}(k))\,\mathbf{a}_{\boldsymbol{\mu}}(k) + \mathbf{C}(\mathbf{q}(k), \boldsymbol{\mu}(k))\boldsymbol{\mu}(k) + \mathbf{g}(\mathbf{q}(k)) \tag{4.70}$$

donde,

$$\mathbf{a}_{\boldsymbol{\mu}}(k) = \left(\frac{\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{K}}(k) + \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{K}}(k-1) - \boldsymbol{\mu}(k-1)) - \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{K}}(k-1)}{T_0}\right) \tag{4.71}$$

es la ley de control para determinar la aceleración del sistema para compensar los errores de velocidad.

Aquí, $\boldsymbol{\Omega}(\bullet)$ es una matriz diagonal compuesta por funciones sigmoides que ponderan y saturan los errores de control en el instante $(k-1)$,

$$\tilde{\boldsymbol{\mu}}(k-1) = \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{K}}(k-1) - \boldsymbol{\mu}(k-1)$$

y está definida como:

$$\boldsymbol{\Omega} = \operatorname{diag}\left(\frac{\Omega_i}{\varrho_i + |\tilde{\mu}_i(k-1)|}\right) \tag{4.72}$$

donde $\varrho_i \in \mathbb{R}^+$ define la pendiente de la función de saturación, y $\Omega_i \in \mathbb{R}^+$ representa los valores máximos y mínimos de saturación de la matriz diagonal de $\boldsymbol{\Omega}(\bullet)$, ponderando la i-ésima componente del vector de error de control.

4.6.2. Análisis de Estabilidad

Para demostrar la estabilidad de la ley de control propuesta para la compensación dinámica, se considera que no existen errores de modelado ni perturbaciones ambientales (Ecuación (2.122)), es decir,

$$\boldsymbol{\delta}_{\tilde{\boldsymbol{\mu}}}(k) = \mathbf{0}$$

En otras palabras,

$$\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{D}}(k) \equiv \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{ref}}(k)$$

Así, la ecuación en lazo cerrado se puede obtener igualando la Ecuación (4.70) con la Ecuación (4.69):

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{D}}(k) &= \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{ref}}(k) \\ \mathbf{M}(\mathbf{q}(k)) \left(\frac{\boldsymbol{\mu}(k) - \boldsymbol{\mu}(k-1)}{T_0} \right) &= \mathbf{M}(\mathbf{q}(k)) \, \mathbf{a}_{\boldsymbol{\mu}}(k) \\ \left(\frac{\boldsymbol{\mu}(k) - \boldsymbol{\mu}(k-1)}{T_0} \right) &= \mathbf{M}(\mathbf{q}(k))^{-1} \mathbf{M}(\mathbf{q}(k)) \, \mathbf{a}_{\boldsymbol{\mu}}(k) \\ \frac{\boldsymbol{\mu}(k) - \boldsymbol{\mu}(k-1)}{T_0} &= \mathbf{a}_{\boldsymbol{\mu}}(k) \end{aligned} \tag{4.73}$$

reemplazando $\mathbf{a}_{\boldsymbol{\mu}}(k)$ de la Ecuación (4.71) se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\boldsymbol{\mu}(k) - \boldsymbol{\mu}(k-1)}{T_0} = & \frac{\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{K}}(k) + \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{K}}(k-1))}{T_0} \ldots \\ & \ldots - \frac{\boldsymbol{\mu}(k-1)) + \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{K}}(k-1)}{T_0} \\ \boldsymbol{\mu}(k) - \boldsymbol{\mu}(k-1) = & \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{K}}(k) + \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{K}}(k-1)) \ldots \\ & \ldots - \boldsymbol{\mu}(k-1)) - \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{K}}(k-1) \end{aligned} \tag{4.74}$$

Considerando que $\tilde{\boldsymbol{\mu}}(k-1) = \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{K}}(k-1) - \boldsymbol{\mu}(k-1)$, es posible reescribir la Ecuación (4.74) como:

$$\tilde{\boldsymbol{\mu}}(k) = (\mathbf{I}_{7\text{x}7} - \boldsymbol{\Omega}) \, \tilde{\boldsymbol{\mu}}(k-1) \tag{4.75}$$

La Tabla 4.2 representa la evolución del i-ésimo error de control de la Ecuación (4.75) en lazo cerrado.

Tabla 4.2
Evolución del error de control $\tilde{\mu}_i(k)$ en el instante de tiempo k.

k	$\tilde{\mu}_i(k)$	$(I_{ii} - \Omega_{ii})\,\tilde{\mu}_i(k-1)$
1	$\tilde{\mu}_i(1)$	$(I_{ii} - \Omega_{ii})\,\tilde{\mu}_i(0)$
2	$\tilde{\mu}_i(2)$	$(I_{ii} - \Omega_{ii})\,\tilde{\mu}_i(1) = (I_{ii} - \Omega_{ii})^2\,\tilde{\mu}_i(0)$
3	$\tilde{\mu}_i(3)$	$(I_{ii} - \Omega_{ii})\,\tilde{\mu}_i(2) = (I_{ii} - \Omega_{ii})^3\,\tilde{\mu}_i(0)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$\tilde{\mu}_i(n)$	$(I_{ii} - \Omega_{ii})\,\tilde{\mu}_i(n-1) = (I_{ii} - \Omega_{ii})^n\,\tilde{\mu}_i(0)$

Si $n \to \infty$, el error de control $\tilde{\mu}_i(n)$ en un instante de tiempo será,

$$\tilde{\mu}_i(\infty) = (I_{ii} - \Omega_{ii})^{\infty}\tilde{\mu}_i(0)$$

Por lo tanto, si $0 < \Omega_{ii} < 1$, el error de control $\tilde{\mu}_i(\infty) = 0$ cuando $k \to \infty$. De manera similar al error de control $\tilde{\mu}(k)$, se puede concluir que:

$$\lim_{k\to\infty} \tilde{\boldsymbol{\mu}}(k) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$$

Con $0 < \max(diag(\boldsymbol{\Omega})) < 1$, cuando $k \to \infty$, es decir, el i-ésimo error de control del manipulador aéreo converge a cero, verificándose la propiedad de estabilidad asintótica del sistema de control de compensación dinámica.

4.6.3. Análisis de Robustez

Para el análisis de robustez, se considera que existen perturbaciones y/o errores de modelado,

$$\boldsymbol{\delta}_{\tilde{\boldsymbol{\mu}}}(k) \neq \mathbf{0}$$

en consecuencia:

$$\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{ref}}(k) = (\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{D}}(k) - \boldsymbol{\delta}_{\tilde{\boldsymbol{\mu}}}(k)) \in \mathbb{R}^n \tag{4.76}$$

donde, $\boldsymbol{\delta}_{\tilde{\boldsymbol{\mu}}}(k) = f(\boldsymbol{\gamma}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(k), \boldsymbol{\gamma}_{\boldsymbol{\mu}}(k))$ es el vector que representa las perturbaciones y errores en el modelado (Ecuación (2.122)). Este vector se asume acotado

(Ecuación (2.126)), es decir,

$$\|\boldsymbol{\delta}_{\tilde{\boldsymbol{\mu}}}(k)\| \leq k_{\delta} \quad \forall k \tag{4.77}$$

donde $k_{\delta} \in \mathbb{R}^{+}$.

Por lo tanto, para obtener la ecuación en lazo cerrado, se combinan la Ecuación (4.76) y Ecuación (4.69):

$$\tilde{\boldsymbol{\mu}}\left(k\right) = \left(\mathbf{I}_{7\text{x}7} - \boldsymbol{\Omega}\right)\tilde{\boldsymbol{\mu}}\left(k-1\right) + T_0\mathbf{M}(k)^{-1}\boldsymbol{\delta}_{\tilde{\boldsymbol{\mu}}}(k) \tag{4.78}$$

La evolución del error de velocidad de la Ecuación (4.78) se analiza en la Tabla 4.3.

Tabla 4.3
Evolución del vector error de velocidad $\tilde{\boldsymbol{\mu}}(k)$ en el instante de tiempo k .

k	$\tilde{\boldsymbol{\mu}}\left(k\right)$	$\left(\mathbf{I} - \boldsymbol{\Omega}\right)\tilde{\mu}\left(k-1\right) + T_o\mathbf{M}(k)^{-1}\boldsymbol{\delta}_{\tilde{\boldsymbol{\mu}}}(k)$
1	$\tilde{\boldsymbol{\mu}}\left(1\right)$	$\left(\mathbf{I} - \boldsymbol{\Omega}\right)\tilde{\boldsymbol{\mu}}\left(0\right) + T_0\mathbf{M}(1)^{-1}\boldsymbol{\delta}_{\tilde{\boldsymbol{\mu}}}(1)$
2	$\tilde{\boldsymbol{\mu}}\left(2\right)$	$\left(\mathbf{I} - \boldsymbol{\Omega}\right)^{2}\tilde{\boldsymbol{\mu}}\left(0\right) + \ldots$ $\ldots + T_0\left(\left(\mathbf{I} - \boldsymbol{\Omega}\right)\mathbf{M}(1)^{-1}\boldsymbol{\delta}_{\tilde{\boldsymbol{\mu}}}(1) + \mathbf{M}(2)^{-1}\boldsymbol{\delta}_{\tilde{\boldsymbol{\mu}}}(2)\right)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$\tilde{\boldsymbol{\mu}}\left(n\right)$	$\underbrace{\left(\mathbf{I} - \boldsymbol{\Omega}\right)^{n}\tilde{\boldsymbol{\mu}}\left(0\right)}_{\boldsymbol{\Delta}_{\tilde{\boldsymbol{\mu}}}(n)} + \ldots$ $\ldots + \underbrace{T_o\sum_{i=1}^{n}\left(\mathbf{I} - \boldsymbol{\Omega}\right)^{i-1}\mathbf{M}(n+1-i)^{-1}\delta_{\tilde{\boldsymbol{\mu}}}\left(n+1-i\right)}_{\boldsymbol{\Delta}_{\boldsymbol{\delta}}(n)}$

Ahora, la norma del i-ésimo valor del error de velocidad $\tilde{\boldsymbol{\mu}}(n)$ se puede escribir como:

$$\|\tilde{\boldsymbol{\mu}}\left(n\right)\| = \|\boldsymbol{\Delta}_{\tilde{\boldsymbol{\mu}}}\left(n\right) + \boldsymbol{\Delta}_{\boldsymbol{\delta}}\left(n\right)\| \leq \|\boldsymbol{\Delta}_{\tilde{\boldsymbol{\mu}}}\left(n\right)\| + \|\boldsymbol{\Delta}_{\boldsymbol{\delta}}\left(n\right)\| \tag{4.79}$$

donde,

$$\|\boldsymbol{\Delta}_{\tilde{\boldsymbol{\mu}}}(n)\| = \|\left(\mathbf{I} - \boldsymbol{\Omega}\right)^{n}\tilde{\boldsymbol{\mu}}\left(0\right)\| \tag{4.80}$$

y $\|\boldsymbol{\Delta}_{\boldsymbol{\delta}}(n)\|$ está dado por:

$$\|\boldsymbol{\Delta}_{\boldsymbol{\delta}}(n)\| =\leq T_o \sum_{i=1}^{n} k_{\Omega}^{i-1} \left\| \left(\mathbf{M}(n+1-i)\right)^{-1} \boldsymbol{\delta}_{\tilde{\mathbf{u}}}(n+1-i) \right\| \tag{4.81}$$

donde, $k_{\Omega} = \lambda_{\text{máx}}(\mathbf{I} - \boldsymbol{\Omega})$ y $\lambda_{\text{máx}}(\bullet)$ representa el auto valor máximo de una matriz. Teniendo en cuenta las propiedades de la matriz $\mathbf{M}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{+}$, se consideran las siguientes constantes:

1. Máximo valor singular de $\mathbf{M}(n)^{-1}$ como:

$$k_M = \sqrt{\lambda_{\text{máx}} \left(\mathbf{M}(n)^{-\intercal} \mathbf{M}(n)^{-1} \right)} \quad \forall n$$

2. Cota del error $\boldsymbol{\delta}_{\tilde{\mathbf{u}}}(n)$ (Ecuación (2.126)) como:

$$k_{\delta} \in \mathbb{R}^{+}$$

Reescribiendo la Ecuación (4.81) se obtiene:

$$\|\boldsymbol{\Delta}_{\boldsymbol{\delta}}(n)\| \leq T_o \sum_{i=1}^{n} k_{\Omega}^{i-1} k_M k_{\delta} \tag{4.82}$$

Ahora, obtenemos una serie geométrica [131], donde,

$$a = k_M k_{\delta} \quad \text{y} \quad r = k_{\Omega}$$

En consecuencia, la serie converge si y solo si $|r| < 1$, de modo que los términos disminuyen hasta acercarse a cero en el límite. En efecto, como:

$$0 < \text{máx}\left(diag\left(\boldsymbol{\Omega}\right)\right) < 1$$

entonces,

$$0 < \lambda_{\text{máx}}\left(\mathbf{I} - \boldsymbol{\Omega}\right) < 1$$

En consecuencia, la serie converge. La suma de los primeros (n) términos de la serie geométrica está dada por:

$$\sum_{i=1}^{n} k_{\Omega}^{i-1} k_M k_{\delta} = k_M k_{\delta} \left(1 - {k_{\Omega}}^{n}\right) \left(1 - k_{\Omega}\right)^{-1} \tag{4.83}$$

y la convergencia de la serie es:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} k_{\Omega}^{i-1} k_M k_\delta = k_M k_\delta (1 - k_\Omega)^{-1} \tag{4.84}$$

Por lo tanto, si $n \to \infty$ la Ecuación (4.82) resulta:

$$\left\| \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{\Delta}_\delta (n) \right\| \leq T_0 k_M k_\delta (1 - k_\Omega)^{-1} \tag{4.85}$$

Ahora, reescribiendo la Ecuación (4.76) y considerando la Ecuación4.83, el valor del error de velocidad en cada instante de muestreo k es:

$$\|\tilde{\boldsymbol{\mu}}(k)\| \leq \|\boldsymbol{\Delta}_{\tilde{\boldsymbol{\mu}}}(k)\| + T_0 k_M k_\delta \left(1 - k_\Omega{}^k\right) (1 - k_\Omega)^{-1} \tag{4.86}$$

Por último, la evolución del error de velocidad cuando $k \to \infty$ está dado por:

$$\left\| \lim_{k\to\infty} \tilde{\boldsymbol{\mu}}(k) \right\| = \left\| \lim_{k\to\infty} \boldsymbol{\Delta}_{\tilde{\boldsymbol{\mu}}}(k) \right\| + \left\| \lim_{k\to\infty} \boldsymbol{\Delta}_{\boldsymbol{\delta}}(k) \right\| \tag{4.87}$$

En primer lugar, calculemos:

$$\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{\Delta}_{\tilde{\boldsymbol{\mu}}}(k) = \lim_{k\to\infty} (\mathbf{I} - \boldsymbol{\Omega})^k \tilde{\boldsymbol{\mu}}(0) \tag{4.88}$$

Como $0 < \max(diag(\boldsymbol{\Omega})) < 1$, se obtiene que $(\mathbf{I} - \boldsymbol{\Omega})^k \tilde{\mu}(0) \to 0$ cuando $k \to \infty$. Por consiguiente, resulta:

$$\|\boldsymbol{\Delta}_{\tilde{\boldsymbol{\mu}}}(k)\| = \left\| (\mathbf{I} - \boldsymbol{\Omega})^k \tilde{\boldsymbol{\mu}}(0) \right\| \to 0 \tag{4.89}$$

Por último, tomando en cuenta la Ecuación (4.85), el error de velocidad $\tilde{\boldsymbol{\mu}}(k)$ cuando $k \to \infty$ resulta:

$$\|\tilde{\boldsymbol{\mu}}(k)\| \leq T_0 k_M k_\delta (1 - k_\Omega)^{-1} \tag{4.90}$$

Esto significa, que en presencia de perturbaciones $\boldsymbol{\gamma_\varepsilon} \in \mathbb{R}^n$ y/o errores de modelado $\boldsymbol{\gamma_\mu} \in \mathbb{R}^n$, el error de velocidad $\tilde{\boldsymbol{\mu}}(k)$ es acotado. Además, el valor máximo del error de velocidad puede ser estimado mediante la Ecuación (4.90) si k_M y k_δ son conocidas. En caso de que no existan perturbaciones o errores en el modelo $\boldsymbol{\delta}_{\tilde{\boldsymbol{\mu}}}(k) = \mathbf{0}$, el error $\tilde{\boldsymbol{\mu}}(k) \to \mathbf{0}$ cuando $k \to \infty$ y se verifica que el sistema es asintóticamente estable.

4.7. Resultados Experimentales

En esta sección se presentan los siguientes experimentos:

1. Validación experimental del control de posición.
2. Validación experimental del control de seguimiento de trayectorias.
3. Validación experimental del controlador para el seguimiento de caminos.

Para los experimentos, se estableció un período de muestreo de $T_0 = 0{,}1$ segundos, durante el cual el robot es capaz de recibir y enviar datos de posición y velocidad para retroalimentar el lazo de control. Los experimentos se llevaron a cabo en un entorno parcialmente estructurado, donde las condiciones ambientales (velocidad del viento) en el momento de las pruebas experimentales pueden consultarse en [132].

Observación 11 *Dado que el sistema es redundante, se define una tarea secundaria para evitar configuraciones no deseadas del brazo robótico durante los experimentos y facilitar la tarea con el extremo operativo. El vector de velocidad en la ley de control $\mu_{\mathbf{0}}(k)$, que afecta únicamente la configuración del brazo robótico, se define mediante:*

$$\mu_{\mathbf{0}}(k) = \mathbf{K}_2 \tanh\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{q}_1(k) & \tilde{q}_2(k) & \tilde{q}_3(k) \end{bmatrix}\right) \tag{4.91}$$

donde $\tilde{q}_i(k) = q_{id} - q_i(k)$, con $i = 1, 2, 3$, es el error de las articulaciones del brazo robótico; q_{id} es el valor deseado de la posición para cada articulación del brazo robótico; $\mathbf{K}_2 \in \mathbb{R}^{7\times 7}$ es una matriz diagonal positiva que pondera los errores de las articulaciones; y $\tanh(\bullet)$ es una función impar que satura los errores de las articulaciones. Por lo tanto, los valores deseados para las articulaciones q_{id} se definen con el fin de maximizar el índice de manipulabilidad $\mathrm{w} = \sqrt{\det(\mathbf{J}\mathbf{J}^{\intercal})}$ [110] como objetivo secundario de control.

4.7.1. Pruebas Experimentales del Control de Posición

Para validar el control de posición, se proponen múltiples experimentos. Los experimentos consisten en hacer que el extremo operativo del manipulador aéreo

Tabla 4.4
Parámetros del controlador de posición.

Parámetro	**Valor**
Posición y Orientación Deseada $\mathbf{r_d}$	$r_{xd} = 2$ [m] $\quad r_{yd} = 3$ [m] $r_{zd} = 2$ [m] $\quad o_d = 0{,}5$ [rad]
Condiciones iniciales del Hexarrotor y del Brazo Robótico: $\mathbf{q_u}(t_0)$ y $\mathbf{q_a}(t_0)$	$\mathbf{q}_1(t_0) = \left[12, 9, 14, 0, \frac{\pi}{4}, 0, \frac{\pi}{3}\right]^\intercal$ $\mathbf{q}_2(t_0) = \left[-10, 8, 9, \frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, 0, \frac{\pi}{3}\right]^\intercal$, $\mathbf{q}_3(t_0) = \left[-10, 12, 5, -\frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{4}, 0, \frac{\pi}{3}\right]^\intercal$ y $\mathbf{q}_4(t_0) = \left[14, -7, 3, \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{4}, 0, \frac{\pi}{3}\right]^\intercal$
Ganancias del Controlador	$\Phi_1 = 0{,}5, \Phi_2 = 0{,}5, \Phi_3 = 0{,}1, \Phi_o = 0{,}1,$ $\sigma_i = 1 \quad i = 1, 2, 3, 4$ y $\mathbf{K}_2 = diag\left([0, 0, 0, 0, 1{,}5, 1{,}75, 1{,}75]\right)$
Posiciones Deseadas de las Articulaciones	$q_{1d} = 0 \quad q_{2d} = -\frac{\pi}{3}$ $q_{3d} = \frac{3}{4}\pi$ [rad]

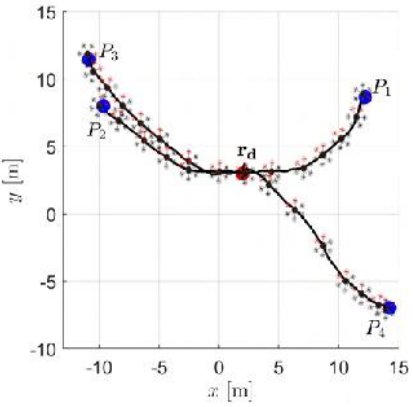
converja a una posición deseada, partiendo de diversas condiciones iniciales. La Tabla 4.4 muestra las condiciones establecidas para el experimento.

La Figura 4.6 muestra el comportamiento del manipulador aéreo en los distintos experimentos realizados. El video recreado en MATLAB con datos reales obtenidos durante el experimento está disponible en [133].

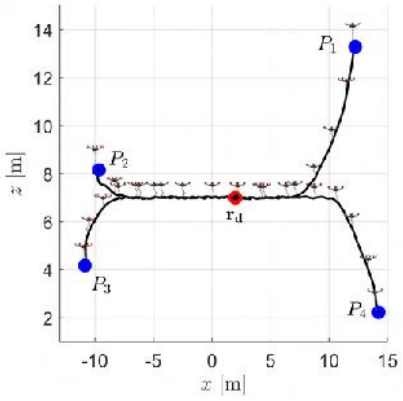
La Figura 4.7 muestra la evolución de la posición del extremo operativo en el espacio-XYZ, comenzando desde la condición inicial de $\mathbf{q_4}(t_0)$.

La evolución de los errores de control de posición y orientación se puede observar en la Figura 4.8. Se puede ver cómo los errores convergen cerca de cero cuando el extremo operativo se ajusta al punto deseado $\tilde{\mathbf{r}}(k) \approx \mathbf{0}$.

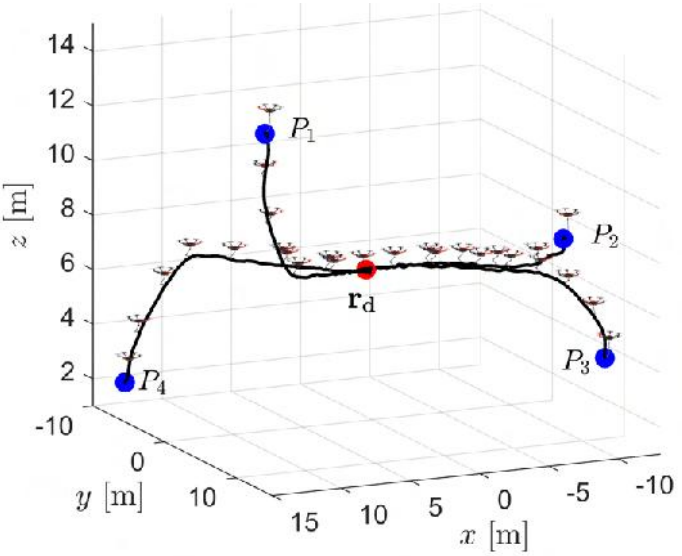
La evolución de las articulaciones del brazo robótico se presenta en la Figura 4.9. Se observa cómo cada articulación converge a los valores deseados $\mathbf{q_{ad}} \approx \mathbf{q}_a$ gracias a la acción de control en el espacio nulo.



(a) Vista en el plano-XY.



(b) Vista en el plano-XZ



(c) Vista en en el espacio-XYZ

Figura 4.6: Movimiento del manipulador aéreo para posicionar el extremo operativo en la posición y orientación deseada.

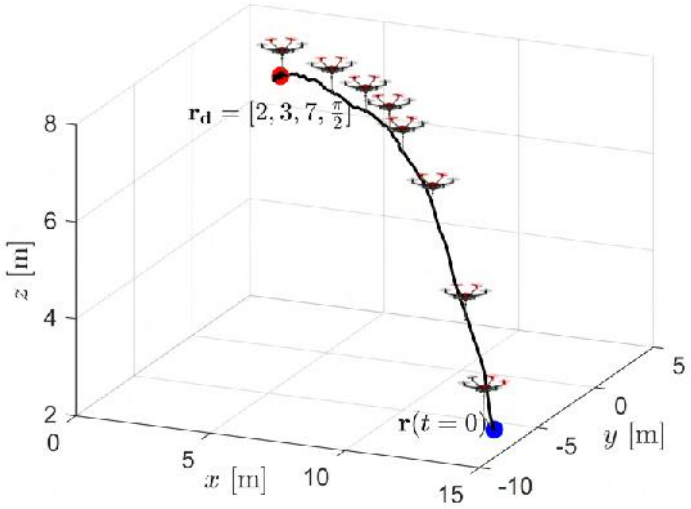


Figura 4.7: Evolución de la posición y orientación del extremo operativo durante el experimento para la condición inicial de $\mathbf{q_4}\,(t_0)$.

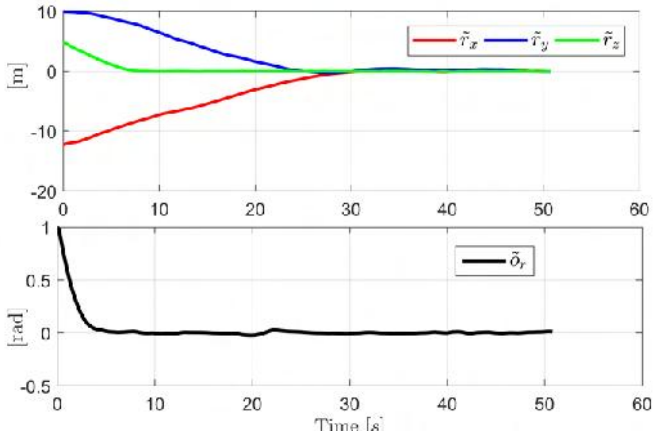


Figura 4.8: Errores de posición y orientación del extremo operativo para $\mathbf{q_4}\,(t_0)$.

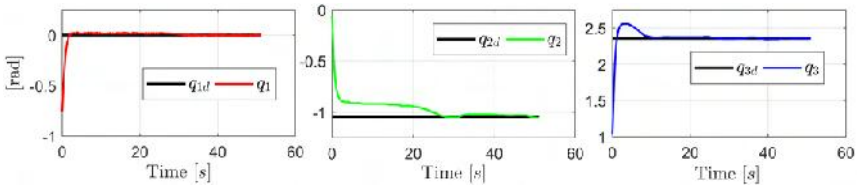


Figura 4.9: Evolución de las articulaciones del brazo robótico para el experimento con condición inicial de $\mathbf{q_4}\,(t_0)$.

4.7.2. Experimento de Seguimiento de Trayectoria

Para la validación del controlador de seguimiento de trayectoria con compensación dinámica, se realizan dos tipos de experimentos:

1. Prueba experimental que consiste en que el extremo operativo siga una trayectoria parametrizada en el tiempo sin compensación dinámica (aplicando solo la acción de control cinemático al robot), y posteriormente se activa la compensación dinámica en cascada.

2. Prueba experimental con control cinemático vs. control en cascada con compensación.

La Tabla 4.5 muestra los parámetros establecidos para los experimentos.

4.7.2.1. Primer Experimento de Seguimiento de Trayectoria

La Figura 4.10 muestra la evolución del extremo operativo en el plano y en el espacio XYZ. Es evidente el efecto de la compensación dinámica en la reducción del error de seguimiento de trayectorias, al observar cómo el extremo operativo se ajusta mejor a la trayectoria deseada (línea verde). El video recreado en Matlab con datos reales obtenidos durante el experimento está disponible en [134].

La tendencia de los errores de control se muestra en la Figura 4.11. Como se puede observar, en la primera parte del experimento los errores de control son mayores, con un error cuadrático medio (Root Mean Square Error) de RMSE $= 0{,}636$ [m], utilizando solo el control cinemático. Mientras que, a partir de $t = 75$ [s], con el control de compensación dinámica activado, el RMSE $= 0{,}205$ [m]. Así,

Tabla 4.5
Parámetros del controlador se seguimiento de trayectoria.

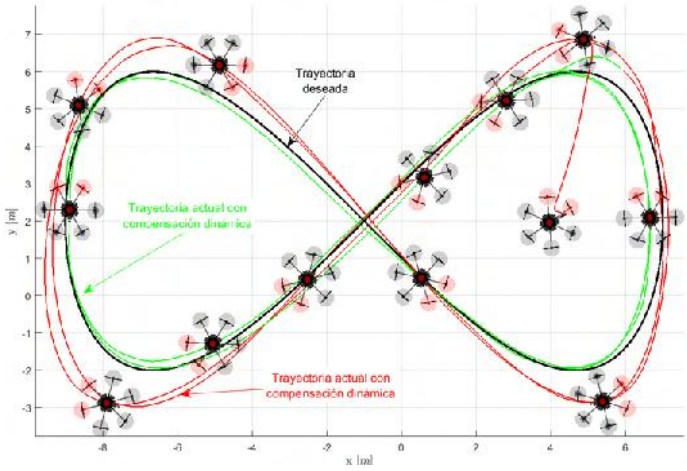
Parámetro	**Valor**
Trayectoria y Orientación Deseada $\mathbf{r_d}(t)$	$r_{xd}(t) = 4\sin(0{,}35t) + 2$ [m] $r_{yd}(t) = 8\sin(0{,}175t) - 1$ [m] $r_{zd}(t) = 0{,}5\sin(0{,}525t) + 7$ [rad] $o_d(t) = \arctan\left(\frac{\dot{r}_{yd}(t)}{\dot{r}_{xd}(t)}\right)$ [rad]
Condiciones Iniciales del Hexarrotor y del Brazo Robótico: $\mathbf{q_u}(t_0)$ y $\mathbf{q_a}(t_0)$	$x_u(t_0) = 4$ [m] $\quad y_u(t_0) = 2$ [m] $z_u(t_0) = 9$ [m] $\quad \psi_u(t_0) = \frac{\pi}{3}$ [rad] $q_1(t_0) = -\frac{\pi}{6}$ [rad] $\quad q_2(t_0) = 0$ [rad] $q_3(t_0) = \frac{\pi}{2}$ [rad]
Ganancias del Controlador $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{K}}(t)$	$\Phi_1 = 0{,}8$, $\Phi_2 = 0{,}8$, $\Phi_3 = 1{,}5$, $\Phi_o = 2$, $\sigma_i = 1 \quad i = 1, 2, 3, 4$ y $\mathbf{K}_2 = diag([0, 0, 0, 0, 1{,}5, 1{,}75, 2{,}75])$
Ganancias del Controlador $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{D}}(t)$	$\Omega_1 = 0{,}85$, $\Omega_2 = 0{,}85$, $\Omega_3 = 0{,}8$, $\Omega_4 = 0{,}64$, $\Omega_5 = 0{,}8$, $\Omega_6 = 0{,}8$ y $\Omega_7 = 0{,}8$
Posiciones Deseadas de las Articulaciones	$q_{1d} = 0 \quad q_{2d} = -\frac{\pi}{3}$ $q_{3d} = \frac{3}{4}\pi$ [rad]

se verifica que el error es menor y que la compensación dinámica mejora el seguimiento de trayectorias del extremo operativo.

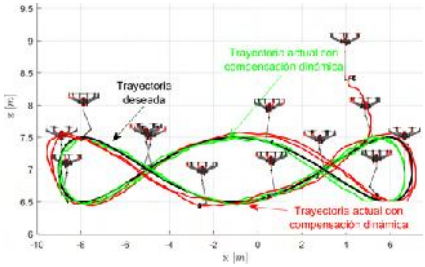
La Figura 4.12 muestra la evolución de las articulaciones del brazo robótico durante el experimento.

El objetivo del controlador de compensación dinámica en cascada consiste en reducir los errores de velocidad a cero, para que el extremo operativo se ajuste mejor a la trayectoria deseada. La Figura 4.13 muestra los errores de las velocidades del hexarrotor (UAV) y de las articulaciones del brazo robótico durante el experimento.

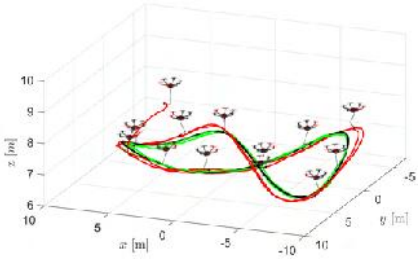
Finalmente, en la Figura 4.14 se muestra la evolución del consumo de energía durante el experimento. La incorporación de la compensación dinámica suaviza



(a) Vista en el plano-XY.



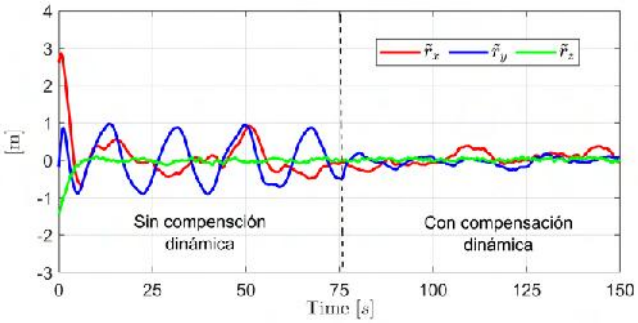
(b) Vista en en el plano-XZ



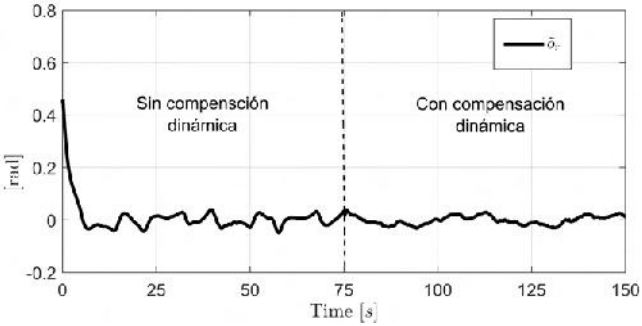
(c) Vista en en el espacio-XYZ

Figura 4.10: Movimiento realizado del manipulador aéreo durante el experimento de seguimiento de trayectoria.

las velocidades de maniobra del sistema, lo que impacta directamente en el consumo energético. Los resultados evidencian una reducción apreciable del gasto total una vez que el controlador con compensación dinámica entra en funcionamiento.



(a) Errores de posición.



(b) Error de orientación

Figura 4.11: Errores de posición y orientación del extremo operativo durante el experimento de seguimiento de trayectoria.

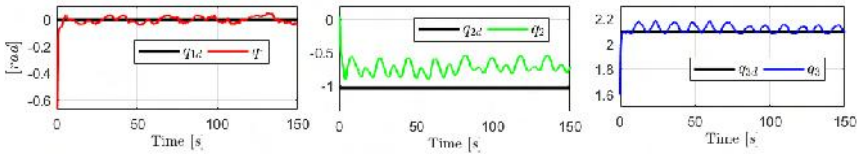
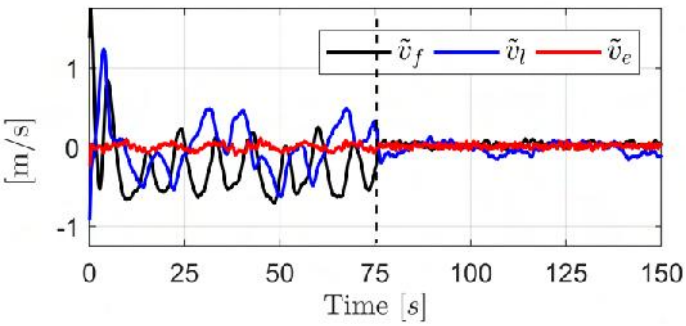
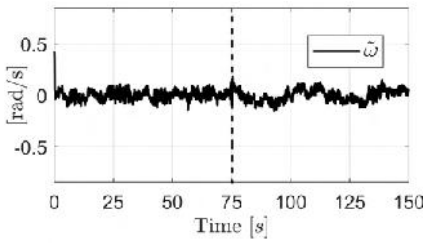


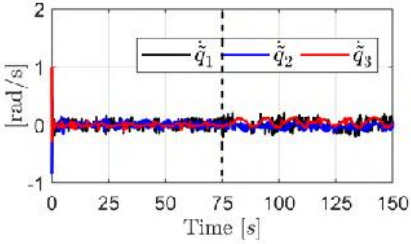
Figura 4.12: Evolución de las articulaciones del brazo robótico durante el experimento de seguimiento de trayectoria.



(a) Errores de las velocidades lineales del UAV.



(b) Error de velocidad angular del UAV.



(c) Errores de velocidades articulares.

Figura 4.13: Errores de las velocidades del manipulador aéreo.

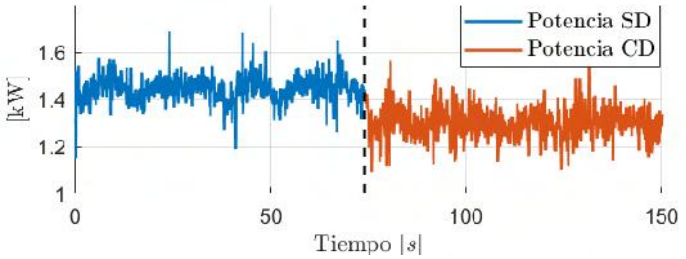


Figura 4.14: Comportamiento de la potencia durante el experimento (SD sin dinámica, CD con dinámica).

4.7.2.2. Segundo Experimento de Seguimiento de Trayectoria

El experimento consiste en comparar el desempeño de cada controlador, es decir, se realizan dos experimentos: el primer experimento consiste en el control de seguimiento de trayectoria sin compensación dinámica (NDC = no dynamic compensation), es decir, únicamente control cinemático; y el segundo experimento emplea el controlador en cascada propuesto, con el compensador de dinámica activo (WDC = with dynamic compensation). Las condiciones iniciales para el hexarrotor y para el brazo robótico son:

$$x_u(t_0) = 2\ [\text{m}] \quad y_u(t_0) = 3\ [\text{m}] \quad z_u(t_0) = 9\ [\text{m}] \quad \psi_u(t_0) = -\tfrac{1}{3}\pi\ [\text{rad}]$$

$$q_1(t_0) = -\tfrac{1}{9}\pi\ [\text{rad}] \quad q_2(t_0) = 0\ [\text{rad}] \quad q_3(t_0) = \tfrac{1}{2}\pi\ [\text{rad}]$$

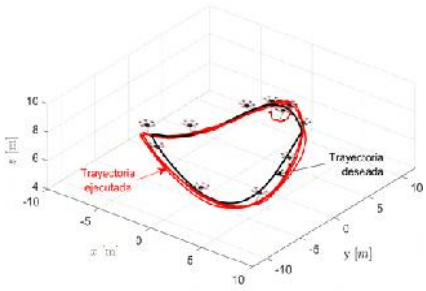
En la Figura 4.15 se presenta el movimiento del robot durante la ejecución de la tarea deseada. Se observa cómo el controlador con compensación dinámica (Figura 4.15d, Figura 4.15e y Figura 4.15f) tiene mejor desempeño a comparación del controlador solo con la cinemática del sistema (Figura 4.15a, Figura 4.15b y Figura 4.15c).

La norma $\mathbb{R}^2$ del error de control de posición $\rho = \|\tilde{r}_x, \tilde{r}_y, \tilde{r}_z\|$ de los experimentos realizados se presenta en la Figura 4.16. Es evidente que el error de posición del extremo operativo con compensación dinámica es menor que el error sin compensación dinámica.

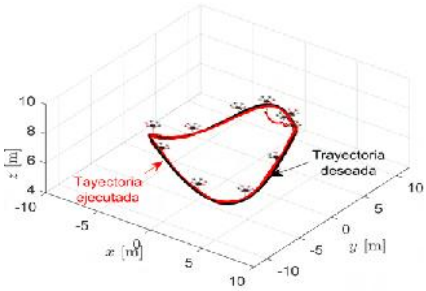
La Figura 4.17 representa la evolución del error de orientación del extremo operativo en cada experimento. Mientras que la Figura 4.18 muestra el comportamiento de los errores de velocidad del hexarrotor, la Figura 4.19 la evolución de los errores de velocidad del brazo robótico por experimento (color azul = NDC) y (color rojo = WDC).

En la Figura 4.20 se presenta una comparación cuantitativa y estadística del desempeño del sistema para los dos experimentos, evaluando la distribución del error y su magnitud promedio mediante un diagrama de caja y el RMSE, respectivamente. La Figura 4.20a muestra la distribución estadística de la norma de control para cada experimento realizado. El experimento sin compensación dinámica (NDC) presenta una media del error considerablemente mayor que el experimento con compensación dinámica (WDC), así como una mayor dispersión. Dado que el rango intercuartílico del experimento WDC es más reducido,

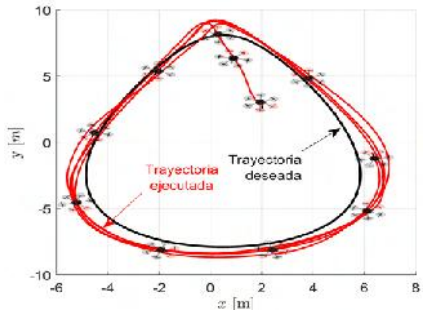
Sin compensación dinámica **Con compensación dinámica**



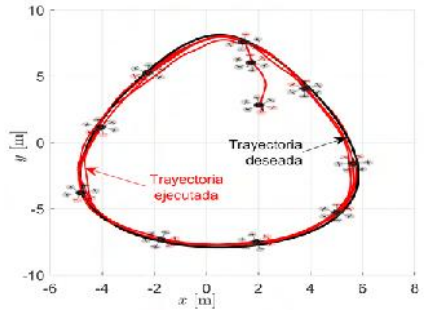
(a) Vista en en el espacio-XYZ



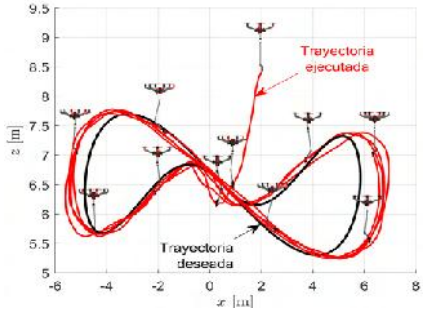
(d) Vista en en el espacio-XYZ



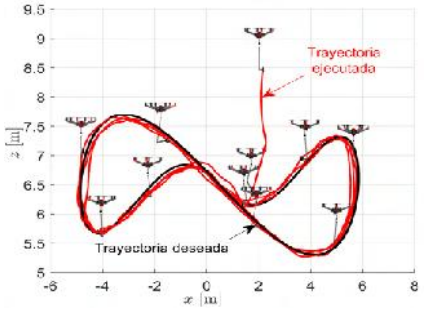
(b) Vista en en el plano-XY



(e) Vista en en el plano-XY



(c) Vista en en el plano-XZ



(f) Vista en en el plano-XZ

Figura 4.15: Evolución del extremo operativo sin compensación dinámica (a, b, c) y con compensación dinámica (d, e, f).

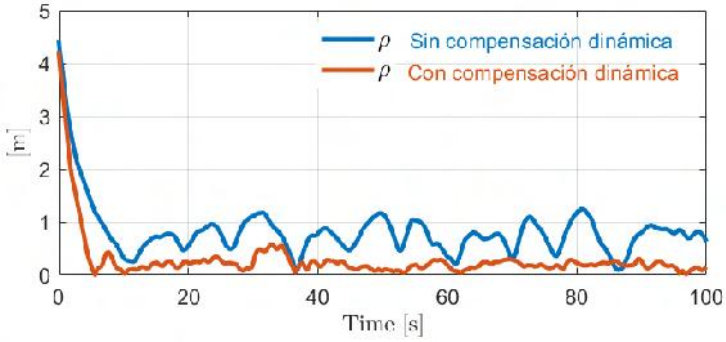


Figura 4.16: Norma del error de control ρ.

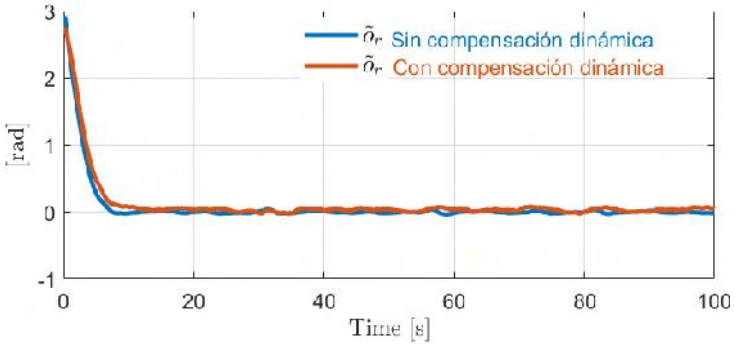


Figura 4.17: Error de orientación del extremo operativo $\tilde{o}_r$.

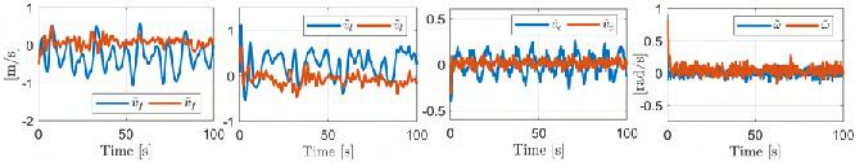


Figura 4.18: Errores de velocidad del hexarrotor ($\tilde{\mathbf{v}}_\mathbf{u}$).

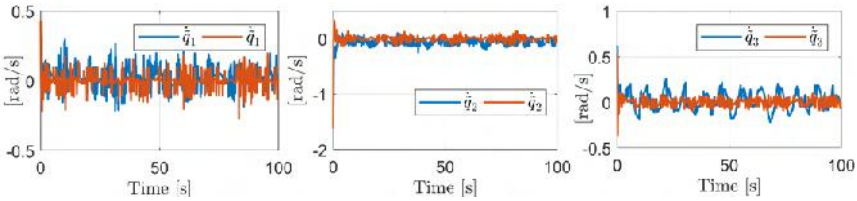
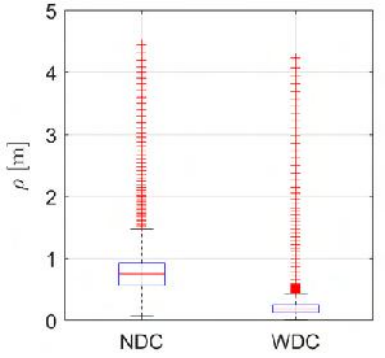
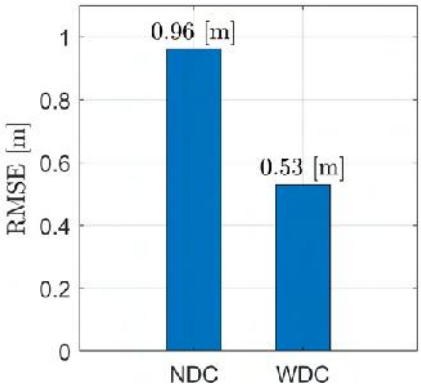


Figura 4.19: Errores de velocidad de las articulaciones del brazo robótico ($\tilde{\mathbf{v}}_\mathbf{a}$).

y además presenta una mediana y una dispersión menores, se valida que el controlador es más estable y preciso. Esto se corrobora en la Figura 4.20b, donde se compara el error cuadrático medio (RMSE) de cada experimento. Se aprecia que $\mathrm{RMSENDC} = 0{,}96$ [m] es superior a $\mathrm{RMSEWDC} = 0{,}53$ [m]. En otras palabras, se confirma que el controlador en cascada con compensación dinámica mejora el seguimiento de trayectoria, al compensar los errores de velocidad presentes en el sistema.



(a) Diagrama de caja de la norma del error.



(b) Error cuadrático medio (RMSE).

Figura 4.20: Análisis comparativo del desempeño del control NDC vs. WDC.

4.7.3. Experimento de Seguimiento de Camino

El experimento consiste en definir un camino deseado no parametrizado en el tiempo para el extremo operativo. Se presentan dos experimentos: uno con compensación dinámica y otro sin compensación dinámica. En la Tabla 4.6 se detallan los parámetros del experimento. La Figura 4.21 muestra la evolución del extremo operativo durante el experimento de seguimiento de camino. La Figura 4.21a, la Figura 4.21b y la Figura 4.21c corresponden al experimento con el controlador sin compensación dinámica, mientras que la Figura 4.21d, la Figura 4.21e y la Figura 4.21f corresponden al experimento de seguimiento de camino con compensación dinámica. Los videos recreados en Matlab con datos reales obtenidos durante los experimentos están disponibles en [135, 136].

Tabla 4.6
Parámetros del controlador de seguimiento de camino.

Parámetro	**Valor**
Camino Deseado $\boldsymbol{\mathcal{P}}(s)$ y Orientación Deseada para el Extremo Operativo.	$p_x(s) = 8\sin(12s) + 3$ [m] $p_y(s) = 6\cos(12s) + 12$ [m] $p_d(s) = 0{,}5\sin(60s) + 10$ [m] $o_d(s) = \arctan\left(\frac{dp_{yd}}{ds} / \frac{dp_{yd}}{ds}\right)$ [rad]
Rapidez Deseada	$\|\mathbf{v_{pd}}\| = 1{,}5$ [m/s]
Condiciones iniciales del Hexarrotor y del Brazo Robótico: $\mathbf{q_u}(t_0)$ y $\mathbf{q_a}(t_0)$	$x_u(t_0) = 3$ [m] $\quad y_u(t_0) = 2$ [m] $z_u(t_0) = 8$ [m] $\quad \psi(t_0) = \frac{\pi}{3}$ [rad] $q_1(t_0) = -\frac{\pi}{9}$ [rad] $\quad q_2(t_0) = 0$ [rad] $q_3(t_0) = \frac{\pi}{2}$ [rad]
Ganancias del Controlador $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{K}}(t)$	$\Phi_1 = 1, \Phi_2 = 1, \Phi_3 = 1{,}5, \Phi_o = 1{,}8,$ $\sigma_i = 1 \quad i = 1, 2, 3, 4$ y $\mathbf{K}_2 = diag([0, 0, 0, 0, 1{,}5, 2, 4])$
Ganancias del Controlador $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{D}}(t)$	$\Omega_1 = 0{,}85$, $\Omega_2 = 0{,}85$, $\Omega_3 = 0{,}8$, $\Omega_4 = 0{,}64$, $\Omega_5 = 0{,}8$, $\Omega_6 = 0{,}8$ y $\Omega_7 = 0{,}8$
Posiciones Deseadas de las Articulaciones	$q_{1d} = 0 \quad q_{2d} = -\frac{\pi}{3}$ $q_{3d} = \frac{3}{2}\pi$ [rad]

La Figura 4.22 presenta los errores de posición del extremo operativo durante el experimento de seguimiento de camino. La Figura 4.22a corresponde a los errores producidos con el controlador sin compensación dinámica, mientras que la Figura 4.22b corresponde a los errores producidos con el controlador con compensación dinámica.

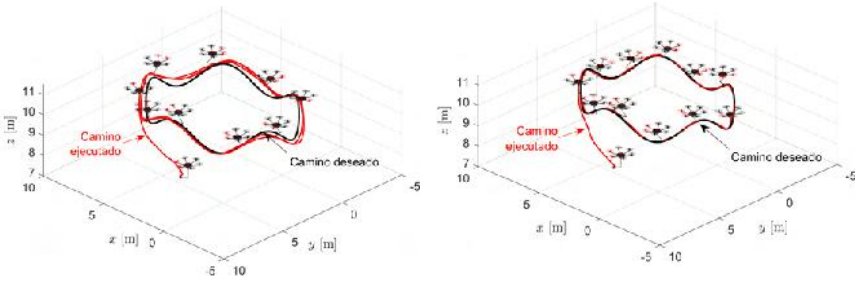
La norma $\mathbb{R}^2$ del error de control $\rho = |\tilde{r}_x, \tilde{r}y, \tilde{r}z|$ de los experimentos se presenta en la Figura 4.23, siendo esta muy cercana a cero. Se observan pequeñas oscilaciones, las cuales son producidas por las condiciones ambientales, obteniéndose un valor de $\mathrm{RMSEWDC} = 0{,}175$ [m] para el experimento con compensación dinámica y $\mathrm{RMSENDC} = 0{,}4817$ [m] para el caso del control sin compensación dinámica, es decir, solo el control cinemático de seguimiento de camino.

El error de orientación del extremo operativo en los experimentos de seguimiento de camino se presenta en la Figura 4.24, donde es evidente que el error de orientación con compensación dinámica es menor que el error sin compensación dinámica.

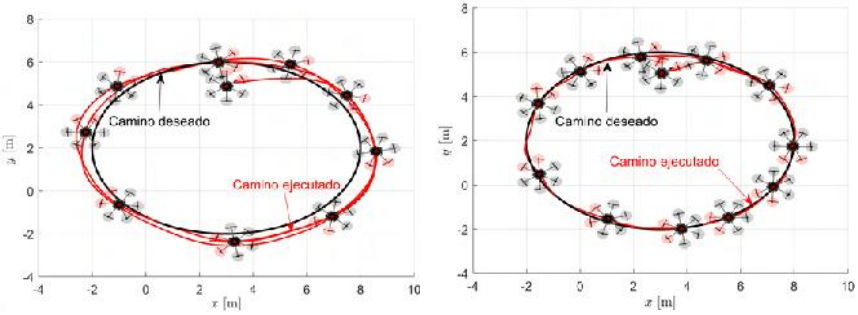
La Figura 4.25 muestra los errores de velocidad del hexarrotor, y la Figura 4.26 presenta los errores de velocidad del brazo robótico durante los experimentos de seguimiento de camino sin compensación dinámica (color azul) y con compensación dinámica (color rojo). Los errores de velocidad del robot con compensación dinámica son menores que los errores sin compensación dinámica; por lo tanto, se verifica que la compensación dinámica cumple con su objetivo.

La Figura 4.27 y la Figura 4.28 presentan la potencia y la corriente consumida durante el experimento con compensación dinámica (línea azul) y sin compensación dinámica (línea roja). Se observa una diferencia notable en el consumo energético entre ambos controladores. En particular, el experimento con compensación dinámica mostró un ahorro de energía de aproximadamente $12{,}5\,\%$ respecto al controlador sin el bloque de compensación dinámica (**CD**).

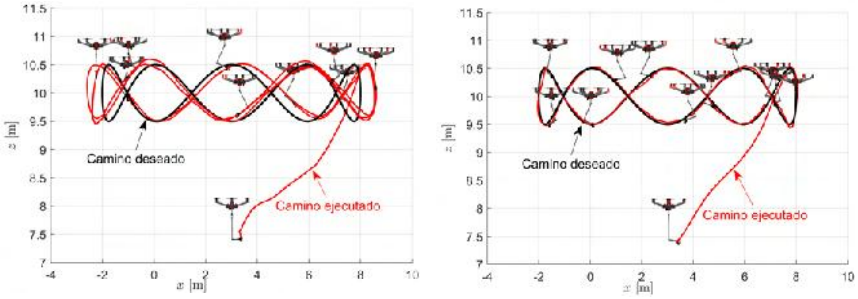
Sin compensación dinámica **Con compensación dinámica**



(a) Vista en en el espacio-XYZ **(d)** Vista en en el espacio-XYZ

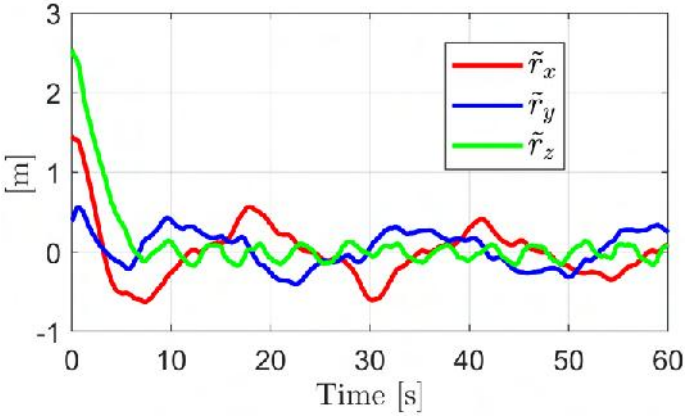


(b) Vista en en el plano-XY **(e)** Vista en en el plano-XY

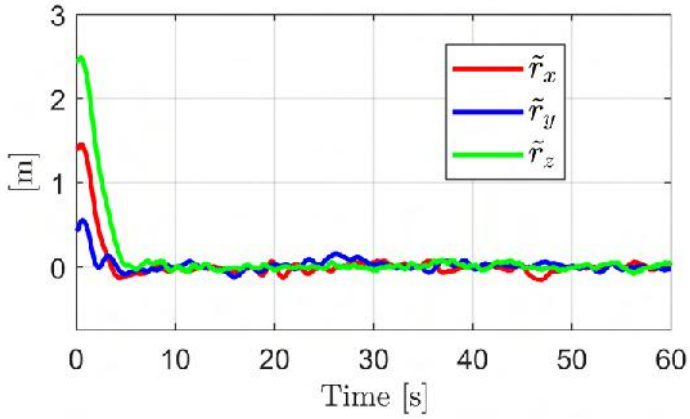


(c) Vista en en el plano-XZ **(f)** Vista en en el plano-XZ

Figura 4.21: Evolución del extremo operativo durante el experimento de seguimiento de camino sin compensación dinámica (a, b, c) y con compensación dinámica (d, e, f).



(a) Errores sin compensación dinámica.



(b) Errores con compensación dinámica.

Figura 4.22: Errores de posición del extremo operativo del manipulador aéreo.

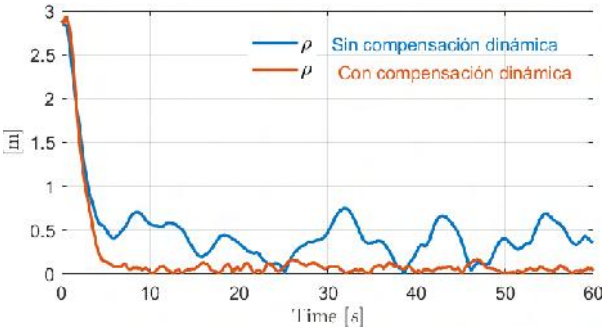


Figura 4.23: Norma del error de control ρ.

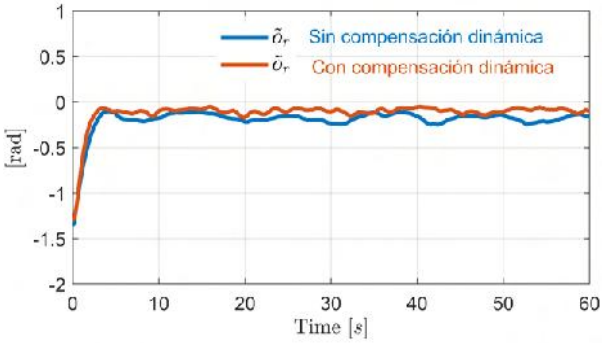


Figura 4.24: Error de orientación del extremo operativo $\tilde{o}_r$.

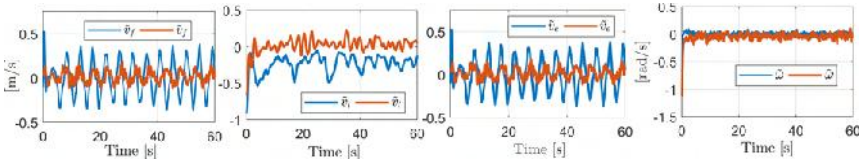


Figura 4.25: Errores de velocidad del hexarrotor.

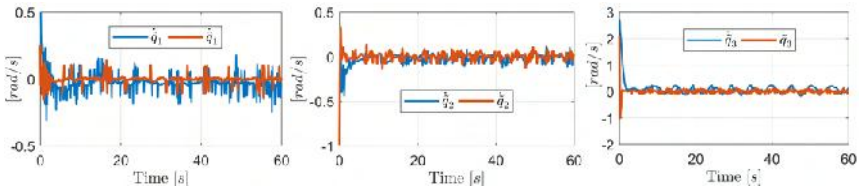


Figura 4.26: Errores de las velocidad de las articulaciones del brazo robótico.

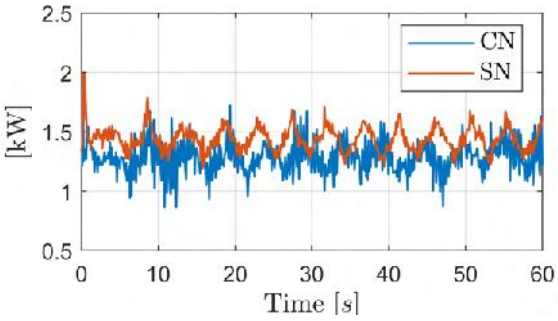


Figura 4.27: Consumo de potencia durante el experimento.

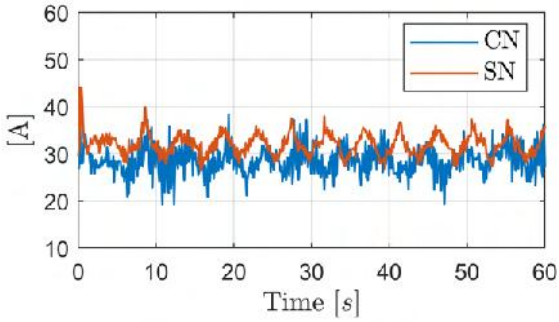


Figura 4.28: Consumo de corriente durante el experimento.

4.7.4. Análisis de Resultados

En los experimentos de control de posición, seguimiento de trayectoria y seguimiento de camino, se pueden observar pequeñas oscilaciones en los errores de control, las cuales son producidas por el viento en el entorno de experimentación o por dinámicas no consideradas en el modelo. Por lo tanto, los errores de control se mantienen acotados, tal como se prevé en la Sección 4.6.3.

En condiciones de operación a velocidades altas, se observa que la estrategia **SN** (sin compensación dinámica) presenta picos de potencia y errores de control más pronunciados en comparación con el esquema **CN** (con compensación dinámica). En contraste, la estrategia **CN** mantiene una potencia más estable y con menor amplitud de oscilación a lo largo del tiempo; además, disminuye la norma del error de control a lo largo del tiempo (Figura 4.23).

Esto evidencia una mayor precisión en el control de posición, el seguimiento de trayectorias y el seguimiento de caminos, así como una mejora en la eficiencia energética al emplear la compensación dinámica. En consecuencia, el esquema que incorpora dicha compensación logra estabilizar el sistema de manera más efectiva, reduciendo esfuerzos innecesarios en los actuadores y mitigando el error acumulado.

4.8. Control de Ahorro de Energía con Compensación Dinámica

En esta sección se implementa el control de ahorro de energía detallado en el Capítulo 3. El controlador propuesto considera, además, un controlador en cascada de compensación dinámica similar al detallado en este capítulo.

4.8.1. Esquema de Control

La Figura 4.29 presenta el esquema de control en cascada considerando el ahorro de energía, tal como se detalla en el Capítulo 3. A diferencia del control en cascada multitarea descrito en el presente capítulo, este controlador se implementa en tiempo continuo y no mediante métodos numéricos.

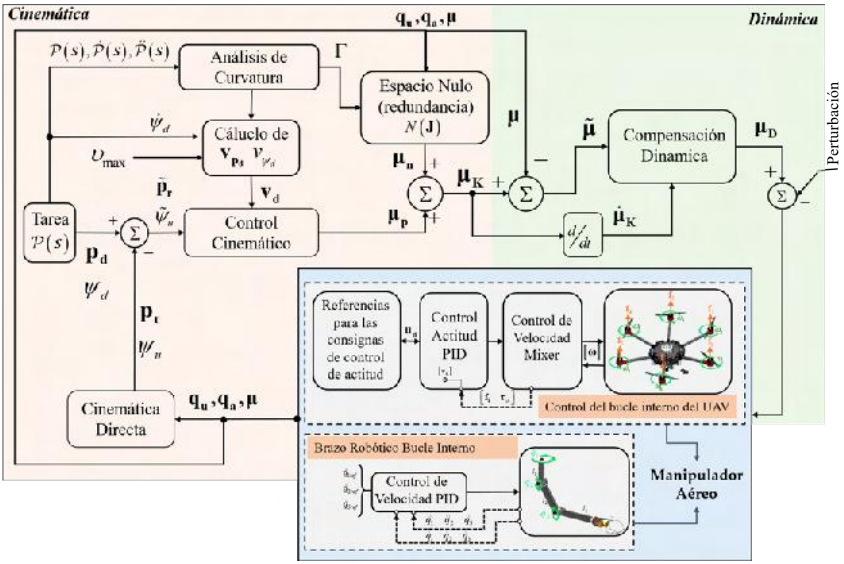


Figura 4.29: Esquema de control en cascada para el ahorro de energía.

El controlador en cascada está compuesto por dos bloques. El primero es un

controlador cinemático no lineal, enfocado en el seguimiento de camino con el extremo operativo del manipulador aéreo como objetivo primario, y considerando el ahorro de energía como objetivo secundario. El segundo bloque corresponde a un compensador dinámico, encargado de corregir los errores en las velocidades que se producen debido a la dinámica del robot durante la ejecución de la tarea.

1. La ley de control cinemática que considera el ahorro de energía está dada por la Ecuación (3.18), tal que:

$$\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{K}}(t) = \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{p}}(t) + \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{n}}(t) \tag{4.92}$$

donde $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{p}}(t) \in \mathbb{R}^7$ es la acción de control primaria, encargada de cumplir el objetivo principal del extremo operativo, que consiste en el seguimiento de camino. Esta acción de control está definida en la Ecuación (3.19). Por otro lado, $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{n}}(t) \in \mathbb{R}^7$ representa la acción de control asociada al objetivo secundario definida en la Ecuación (3.29), la cual permite la modificación interna del robot para optimizar el consumo energético durante la ejecución de la tarea. Considerando ambas acciones de control, resulta:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{K}}(t) =& \mathbf{J}^{\dagger}(\mathbf{q})(\mathbf{v_d}(t) + \mathbf{L}_1 \tanh(\mathbf{L}_1^{-1}\mathbf{K_1}\tilde{\mathbf{r}}(t))) + \ldots \\ & \ldots + (\mathbf{I}_{7\times 7} - \mathbf{J}(\mathbf{q})^{\dagger}\mathbf{J}(\mathbf{q}))\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{m}}(t)\end{aligned} \tag{4.93}$$

donde, $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{m}}(t) \in \mathbb{R}^7$ es el vector de velocidad proyectado en el espacio nulo definido en la Ecuación (3.33).

2. La ley de compensación dinámica está definida por la siguiente expresión:

$$\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{D}}(t) = M(\mathbf{q}(t))\mathbf{a}_{\boldsymbol{\mu}}(t) + \mathbf{C}(\mathbf{q}(t), \boldsymbol{\mu}(t))\,\boldsymbol{\mu}(t) + \mathbf{g}(\mathbf{q}(t)) \tag{4.94}$$

donde, $\mathbf{M}(\mathbf{q}(t)) \in \mathbb{R}^{7\times 7}$, $\mathbf{C}(\mathbf{q}(t)) \in \mathbb{R}^{7\times 7}$ y $\mathbf{g}(\mathbf{q}(t)) \in \mathbb{R}^7$ son las matrices cuadradas de masa o inercia, la matriz de fuerzas centrípetas y de Coriolis y el vector de gravedad respectivamente del modelo dinámico del manipulador aéreo en función a velocidades de referencia (Sección 2.5.4.5); $\mathbf{a}_{\boldsymbol{\mu}}(t)$ es la acción de control de aceleración para compensar la dinámica del sistema, la acción está propuesta por:

$$\mathbf{a}_{\boldsymbol{\mu}}(t) = \dot{\boldsymbol{\mu}}_{\mathbf{K}}(t) + \mathbf{L_D}\tanh\left(\mathbf{K_D}\mathbf{L_D}^{-1}\tilde{\boldsymbol{\mu}}(t)\right) \tag{4.95}$$

donde, el vector $\dot{\boldsymbol{\mu}}_{\mathbf{K}}(t) \in \mathbb{R}^7$ es la aceleración deseada que se obtiene del controlador no lineal cinemático; el vector de error de velocidades está dado por $\tilde{\boldsymbol{\mu}}(t) = \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{K}}(t) - \boldsymbol{\mu}(t)$; y $\mathbf{L_D}, \mathbf{K_D} \in \mathbb{R}^{7\times 7}$ son matrices cuadradas definidas positivas que pesan los errores de velocidad.

Observación 12 *El esquema de control tiene la misma estructura propuesta en este capítulo a diferencia de que se trabaja en tiempo continuo.*

4.8.2. Resultados Experimentales

Para validar el controlador en cascada con ahorro de energía y compensación dinámica, se considera un camino con variación en el eje Z, correspondiente a la Configuración 1 definida para el análisis energético. Se realizan experimentos con cuatro variaciones del esquema de control:

i) Control sin ahorro de energía y sin compensación dinámica (**NSND**).

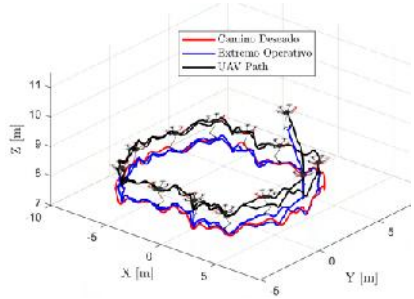
ii) Control con ahorro de energía y sin compensación dinámica (**WSND**).

iii) Control sin ahorro de energía y con compensación dinámica (**NSWD**).

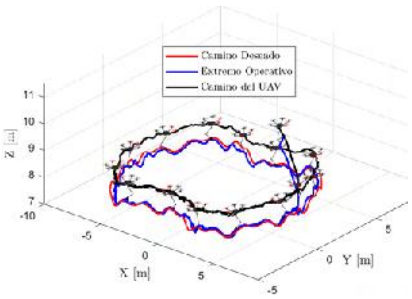
iv) Control con ahorro de energía y con compensación dinámica (**WSWD**).

Las pruebas se realizaron bajo dos condiciones comunes: mismo tiempo de ejecución de la tarea (**E.1**) y mismo consumo total de energía durante la tarea (**E.2**). La Figura 4.30 muestra el comportamiento del manipulador aéreo durante el experimento (**E.1**). Se compara el comportamiento de la estrategia **NSND** con la estrategia **WSWD**.

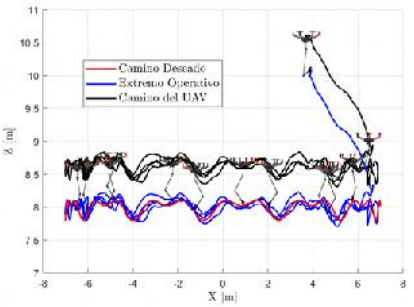
La Figura 4.31a muestra el módulo del error de control de posición del extremo operativo, $\|\tilde{\mathbf{p}}_\mathbf{r}\|$, para cada experimento, mientras que la Figura 4.31b presenta el error de control de orientación. Se observa claramente que el controlador con compensación **WD** mejora el comportamiento del error, logrando una mayor precisión tanto en la posición como en la orientación del extremo operativo durante la ejecución de la tarea. La Figura 4.32a presenta el análisis de la norma del error $\|{}^\mathbf{w}\mathbf{p}_\mathbf{r}\|$ para las cuatro configuraciones evaluadas en (E.1). En dicha figura se incluye un diagrama de caja, en el cual se aprecia que la mediana del error es similar en los cuatro casos. No obstante, el esquema de control con compensación dinámica y estrategia de ahorro energético **WSWD** presenta una menor dispersión, lo que indica un comportamiento más estable. Además, el esquema **WSWD** muestra una dispersión reducida, lo que resulta en un control más consistente y fiable. Adicionalmente, la Figura 4.32b muestra el comportamiento del error cuadrático medio (RMSE). Se evidencia que, al incorporar la



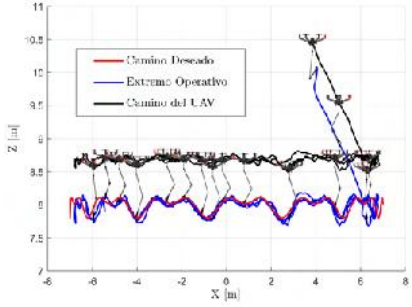
(a) NSND en el espacio-XYZ.



(b) WSWD en el espacio-XYZ.

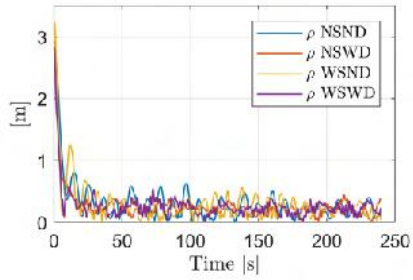


(c) NSND en el plano-XZ.

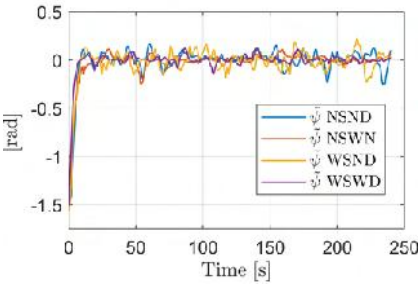


(d) WSWD en el plano-XZ.

Figura 4.30: Movimiento estroboscópico del comportamiento del manipulador aéreo para el (E.1) con **NSND** y **WSWD** durante la experimentación.



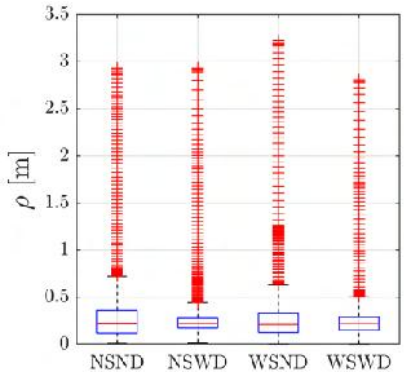
(a) Módulo del error de posición del extremo operativo $\|{}^{\mathbf{w}}\mathbf{p_r}\|$.



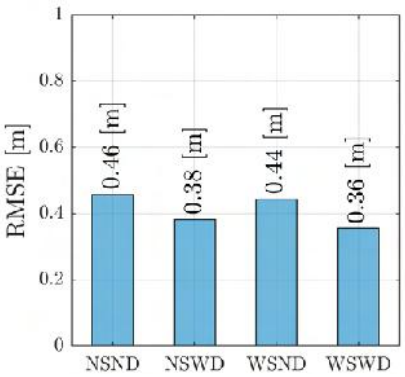
(b) Error de orientación del extremo operativo $\tilde{o}_r$.

Figura 4.31: Comportamiento del error de posición y error orientación del extremo operativo en cada caso de control.

compensación dinámica, **WD** contribuye a una reducción significativa del RMSE, tanto en las configuraciones sin estrategia de ahorro **NS** como en aquellas que incluyen la estrategia de ahorro **WS**.



(a) Diagrama de caja de $\|{}^{\mathbf{w}}\mathbf{p_r}\|$.



(b) Análisis del RMSE.

Figura 4.32: Análisis del comportamiento del error de control para los diferentes casos del experimento.

La Figura 4.33 muestra la variación de la velocidad generada por los controladores durante el experimento. En particular, para los controladores que incorporan la estrategia de ahorro energético **WS**, puede notarse que la velocidad varía en función tanto del error de seguimiento como de la curvatura del camino. Esta adaptación permite una regulación dinámica de la velocidad, optimizando el consumo energético sin comprometer el desempeño del control.

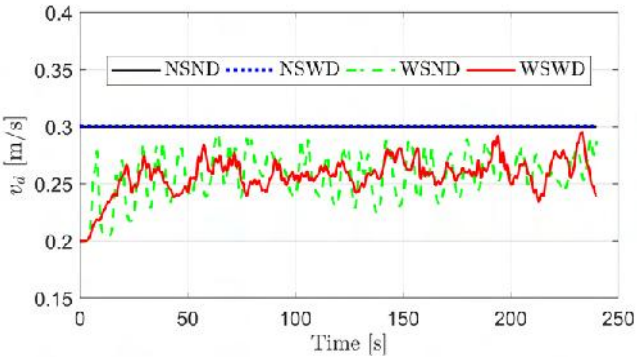


Figura 4.33: Comportamiento de la velocidad deseada en función a cada estrategia aplicada en el experimento (E.1).

La Figura 4.34 muestra el comportamiento del índice de manipulabilidad durante la ejecución de la tarea. Como era de esperarse, en los esquemas que no consideran la estrategia de ahorro energético (**NS**), la manipulabilidad permanece prácticamente constante. En contraste, en el esquema que incorpora dicha estrategia, la manipulabilidad varía a lo largo de la tarea. Esto indica que el brazo robótico realiza ajustes en su configuración para alcanzar la posición deseada de manera eficiente, adaptando su postura con el fin de optimizar el desempeño energético sin comprometer la capacidad de maniobra.

En la Figura 4.35 se presentan dos gráficos que resumen el análisis del consumo de potencia para el controlador con las cuatro configuraciones. La Figura 4.35a muestra la evolución temporal de la potencia eléctrica; puede notarse que el control **NSND** presenta el mayor consumo de potencia promedio, con valores que oscilan principalmente alrededor de $\approx 1{,}5$ kW, seguido por las configuraciones de los controladores **NSWD** y **WSND**, los cuales muestran una tendencia más baja y estable. Finalmente, el control **WSWD** presenta el menor consumo de

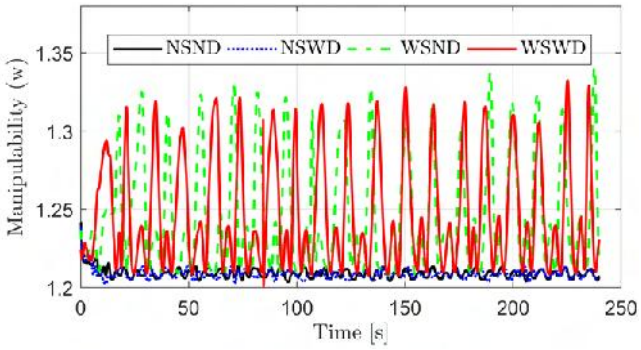
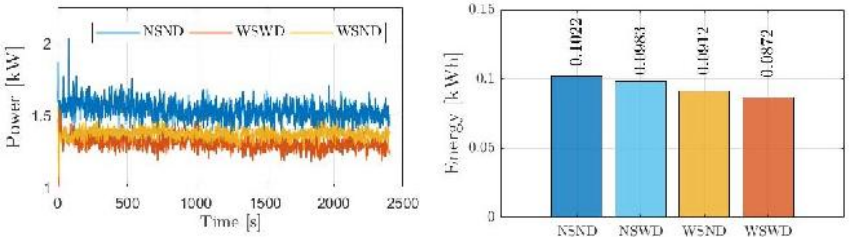


Figura 4.34: Comportamiento del índice de manipulabilidad para cada configuración de control en el experimento (E.1).

potencia, manteniéndose alrededor de $\approx 1{,}3$ kW. Esta diferencia de consumo refleja el impacto positivo de la incorporación de las estrategias de control **WS** y **WD** en la reducción de la demanda energética. Por otro lado, en la Figura 4.35b se presenta un diagrama de barras del consumo total de energía durante el experimento para $t = 4$ min. Se observa que cada modificación, ya sea la incorporación de **WD** (compensación dinámica) o el control con ahorro energético **WS**, produce una disminución progresiva en el consumo total. En otras palabras, el esquema **WSWD**, que combina ambas estrategias, logra una reducción de aproximadamente $\approx 14{,}7\,\%$ respecto al control **NSND**. Esto evidencia que la combinación de control eficiente y modelado dinámico del sistema mejora significativamente el rendimiento energético total del manipulador aéreo.

Por último, en la Figura 4.36 se presenta el comportamiento del consumo energético obtenido en los experimentos (E.1) y (E.2), comparando las configuraciones sin compensación ni optimización energética **NSND** y con ambas estrategias activas **WSWD**. Se evidencia que el consumo energético del controlador propuesto para optimizar energía y con compensación dinámica **WSWD** es inferior al del controlador que no contempla dichas configuraciones, lo cual demuestra la eficiencia energética del enfoque propuesto sin afectar negativamente el desempeño del sistema. Según la Tabla 4.7 se tiene un ahorro de energía $\approx 14.677\,\%$ del esquema **WSWD** respecto al **NSND** en el experimento para $t = 4$ min.



(a) Potencia eléctrica consumida en con tres configuraciones de control.

(b) Consumo de energía acumulada por configuración.

Figura 4.35: Análisis de potencia y consumo de energía para los diferentes esquemas de control para (E.1).

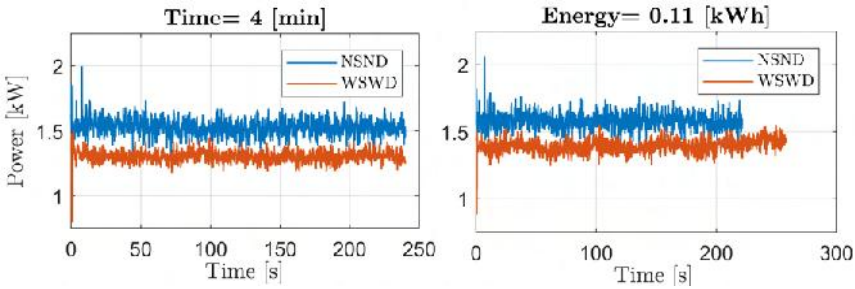


Figura 4.36: Consumo energético con (E.1) y (E.2) obtenido con las estrategias **NSND** y **WSWD**.

4.8.3. Análisis de Resultados

A partir de los resultados obtenidos en los experimentos correspondientes a las condiciones (E.1) y (E.2), y considerando las distintas estrategias de control evaluadas, se resumen en la Tabla 4.7 los principales indicadores de desempeño. La tabla destaca los valores relevantes que permiten comparar el efecto de cada configuración sobre el comportamiento del sistema, incluyendo métricas de precisión, robustez y eficiencia energética.

Tabla 4.7
Resultados obtenidos de los experimentos.

	Control	Tiempo [min]	Distancia [m]	Energía [kWh]
E.1	NSND	**4**	75.0027	0.1022
	NSWD	**4**	78.8831	0.0983
	WSND	**4**	71.2951	0.0912
	WSWD	**4**	69.3194	0.0872
E.2	NSND	4.5750	84.6207	**0.11**
	NSWD	4.9183	86.9028	**0.11**
	WSND	5.2083	93.4237	**0.11**
	WSWD	5.3200	97.8156	**0.11**

En el Experimento 1 (E.1), donde se mantuvo constante el tiempo de ejecución, es evidente que el consumo de energía disminuye progresivamente desde el control **NSND** hasta **WSWD**. Esto indica que las estrategias de control con ahorro energético y con la incorporación de la compensación dinámica permiten una operación más eficiente, reduciendo el consumo energético total. En el Experimento 2 (E.2), donde el consumo energético se fijó en 0.11 kWh para todos los casos, se evidencia que las estrategias más avanzadas **WSND** y **WSWD** permiten recorrer mayores distancias en el mismo consumo, concluyendo que el control **WSWD** logró la mayor distancia, lo que sugiere una mayor eficiencia en términos de desplazamiento por unidad de energía.

Finalmente, del error de seguimiento **RMSE** muestra que el control **NSND** presenta el mayor error, mientras que **WSWD** obtiene el menor. Estos resultados confirman que el uso conjunto de estrategias de ahorro y compensación dinámica mejora tanto la precisión del seguimiento como el desempeño energético del manipulador aéreo.

CAPÍTULO 5

Control Servo-Visual Bioinspirado para el Agarre Aéreo de Objetivos en Movimiento

5.1. Introducción

Para ejecutar tareas que requieran mayor complejidad y precisión, es indispensable que el robot cuente con más información del entorno [137, 138]. Hoy en día, la mayoría de los robots cuentan con sensores exteroceptivos. Este tipo de sensores tienen la capacidad de medir variables del entorno, por ejemplo, sensores de fuerza, sensores láser para medir distancia, sensores de intensidad de luz, cámaras, entre otros, que ayudan a los robots a mejorar la autonomía y la capacidad de interactuar con el entorno [139, 140, 141, 142]. Como consecuencia, los esquemas de control tienden a ser más complejos de implementar, por ejemplo, existen algoritmos de control que utilizan algoritmos como SLAM [143, 144, 145], V-SLAM [146, 147] y algoritmos de visión que permiten guiar al robot en los diferentes entornos de trabajo, de modo que el robot navegue de forma autónoma,

segura y precisa. En [148, 149] presentan un estudio del avance en la robótica agrícola, en donde incorporan robots móviles para ejecutar tareas agrícolas de forma autónoma para lo cual hacen uso de sensores LiDAR y cámaras multiespectrales e hiperespectrales. Además de dotar de mayor información los sensores exteroceptivos permiten desarrollar esquemas de control para interactuar con el entorno o con personas [150, 151, 152]. En [151, 153] diseñan controladores que ocupan sensores de fuerza para interactuar con personas y para agarrar objetos. Por medio de los sensores de fuerza y torque, el robot interactúa con el medio e inclusive con las personas, permitiendo ejecutar tareas colaborativas [154, 155]. Hoy en día uno de los sensores más ocupados en los robots son las cámaras, principalmente en los robots aéreos [156, 157]. Este tipo de sensor proporciona una amplia cantidad de información del entorno para cumplir uno o varios objetivos específicos, ya sea para el control autónomo o para el control tele-operado. La mayor parte de aplicaciones con robots aéreos requieren de cámaras que permiten al robot detectar, procesar, captar y/o transmitir imágenes para llegar a un objetivo final [158, 159]. Esto permite que los robots aéreos realicen tareas más complejas y a gran precisión.

En consecuencia de este análisis, en este capítulo se presenta un esquema de control para un manipulador aéreo basado en el modelo cinemático y dinámico del robot. El robot cuenta con una cámara a bordo que permite detectar y agarrar objetivos fijos o en movimiento. El controlador es basado en la redundancia del sistema logrando cumplir varios objetivos de control, manteniendo movimiento coordinado entre la plataforma aérea y el brazo robótico durante la maniobra de captura.

La estructura de control propuesta permite transportar y/o manipulador objetos a través de la realimentación visual por medio una cámara en el robot para cumplir con la tarea de forma autónoma. Se presenta una novedosa configuración denominada “Aerial-Eye-to-Hand”, mediante la cual se aumenta el campo de visión para detectar tanto el objetivo a agarrar como el extremo operativo del robot, garantizando el agarre aéreo preciso. Esta configuración se inspira en el comportamiento de caza de las águilas, aplicando principios bioinspirados para mejorar la precisión y eficiencia en la captura de objetos en vuelo. A través de esta inspiración, el esquema de control optimiza tanto la manipulación como el vuelo, adaptándose de manera eficiente a las variaciones del entorno.

La ley de control propuesta cuenta con el respectivo desarrollo analítico del análisis detallado de estabilidad y robustez, con el objetivo de garantizar la con-

vergencia de los errores durante la tarea de agarre aéreo, incluso en presencia de perturbaciones. Además, se utiliza la redundancia del sistema para optimizar el consumo energético, logrando un equilibrio entre la eficiencia operativa y la precisión en el agarre del objetivo. Finalmente, se realizan pruebas experimentales con el robot manipulador aéreo en un entorno no estructurado, es decir, con perturbaciones como viento y suelos irregulares. Estas pruebas validan la efectividad del esquema de control propuesto, para demostrar su robustez y fiabilidad en condiciones desafiantes.

5.2. Formulación del Problema

El transporte de objetos a largas distancias mediante los robots aéreos es una cualidad significativa que tiene este tipo de robots. Además, si sumamos un brazo robótico a los robots aéreos, como es el caso de los manipuladores aéreos, aparte de transportar objetos pueden manipular cargas, llegando a lugares remotos inaccesibles para las personas e incluso para otros robots móviles [160]. Con el objetivo de realizar tareas autónomas de inspección, manipulación, rescate, entre otras tareas, es necesario disponer con una realimentación visual. La realimentación visual permite al robot ubicar con mayor precisión a objetos [161, 162], personas [163, 164], detectar fallas en instalaciones o en edificios [165, 166], en cableados eléctricos [81, 167], entre muchas aplicaciones más.

En la literatura existen varios esquemas de control servo-visual para manipuladores aéreos, por ejemplo, en [168] presentan un esquema de control servo-visual basado en imagen para robots aéreos con un brazo robótico, los autores emplean el control para posicionar el extremo operativo sobre un objetivo. La estrategia que proponen es una configuración llamada onboard-eye-to-hand, la que consiste en colocar la cámara sobre el UAV y que observe el extremo operativo y también al objetivo. Como el sistema es subactuado, plantean un control basado en el espacio nulo para definir una tarea secundaria sobre el brazo robótico. Usan una matriz de peso para ponderar la pseudo-inversa del Jacobiano del sistema, es decir, ponderan las tareas a través de una matriz de peso. Los resultados presentados son realizados mediante simulación. En [169] presentan una estrategia de control híbrida, en donde combinan el control basado en imagen y el control basado en posición. La cámara del robot está colocada en el UAV, a diferencia de [168], los autores definen múltiples tareas para el sistema sobreactuado. En

otras palabras, modifican el orden de las tareas según el sistema lo requiera, sin embargo, hay que tomar en cuenta que para realizar el cambio de tareas hay que considerar una entrada suave de paso de una tarea hacia otra, ya que esto puede afectar a la estabilidad del sistema. Por lo tanto, los autores deben considerar realizar un análisis de estabilidad para lograr hacer switching-control [170, 171]. En [172] de igual forma que en [169] los autores ponderan los objetivos de control para limitar el espacio de trabajo, a través de un Jacobiano aumentado, donde asignan directamente los objetivos. Estos se definen al diseñar la tarea, sin necesidad de modificar durante la ejecución. Los autores proponen el control servo-visual basado en imagen para agarrar objetos únicamente estáticos. Utilizan el ORB (Oriented FAST and Rotated BRIEF) para la extracción de las características del objetivo [173] y no usan marcadores como se mencionó en los trabajos anteriores. En forma similar, en [174] los autores realizan el control con sub-tareas y presentan resultados del controlador únicamente por simulación. En [175] realizan el control de un manipulador aéreo para pintar puentes, el control es basado en impedancia, que permite determinar el contacto con el puente a pintar. Utilizan IBVS (Image-Based Visual Servoing) enfocado a seguir líneas para determinar la línea a pintar del puente, esto permite alinear el extremo operativo con la línea obtenida por visión del puente. Los resultados presentados son mediante simulación. Un trabajo novedoso es presentado en [176] donde los autores proponen una estrategia de control basado en imagen IBVS por sus siglas en inglés, que permite seguir y agarrar un objetivo en movimiento. Además, presentan un estimador de velocidad a través de un observador para estimar la velocidad del objetivo en movimiento. Generan una cámara virtual para obtener la posición del objeto con respecto al gripper, sin embargo, la cámara del robot está ubicada en el UAV. La cámara en la plataforma aérea asegura la visión global del objetivo, mientras que la virtual garantiza el agarre del objetivo. Utilizan marcadores para determinar la posición del objeto y los resultados que presentan son a nivel de laboratorio en un entorno estructurado.

En función de todo esto, se propone un nuevo esquema de control servo-visual para el agarre aéreo de objetivos estáticos o en movimiento, utilizando una configuración **"Aerial-Eye-To-Hand"**, donde la cámara del robot está ubicada en el UAV, lo que permite observar el extremo operativo y el objetivo de interés a agarrar. Esta configuración tiene varias ventajas, como:

a) **Mayor campo de visión global del objetivo (FoV).** Al tener un mayor campo de visión, se asegura que el manipulador aéreo detecte y agarre

el objetivo, ya que la cámara puede observar tanto el extremo operativo como el objetivo de interés.

b) **Evitar error en la imagen.** Permite eludir los errores inducidos en la imagen a causa de las perturbaciones o vibraciones generadas por el movimiento del brazo robótico. Dado que el extremo operativo es propenso a mayores perturbaciones y al ser la etapa final de la cadena, estas se reflejan directamente en el sistema, generando información errónea y, por tanto, comprometiendo la garantía del agarre del objetivo.

c) **Evitar golpes directos en la cámara.** Si la cámara estuviera ubicada sobre el extremo operativo, estaría en contacto directo con el objetivo, lo que podría ocasionar golpes y, en consecuencia, perturbaciones en el sistema.

Además, el esquema que se presenta en este capítulo está bioinspirado en el agarre aéreo de las águilas o halcones. Estas aves son conocidas por su habilidad para agarrar a sus presas en el aire, utilizando tácticas y movimientos específicos que les permiten capturarlas con precisión (ver Figura 5.1).



Figura 5.1: Estrategia de agarre aéreo de un águila [177].

La técnica empleada por este tipo de aves por lo general se divide en cuatro etapas [177, 178, 179, 180]:

1. **Localización de la presa:** las águilas, gracias a su excelente visión, son capaces de detectar a sus objetivos a largas distancias y gran altura. Una vez que localizan su objetivo, estas aves comienzan a planificar su estrategia de ataque o acercamiento hacia la presa.

2. **Inmersión en picado:** una vez que ubica a su presa, el ave se lanza en picada hacia su objetivo sin perderlo de vista. Este movimiento le permite acercarse a altas velocidades.

3. **Agarre:** para atrapar a su objetivo, el águila realiza movimientos con sus garras afiladas para sujetar a su presa. Este tipo de agarre le garantiza capturarla sin dejar que escape.

4. **Etapa de transporte:** es la etapa final, que ocurre una vez que la presa ha sido capturada con éxito. Mediante sus garras, el águila la sujeta con fuerza y la transporta a un lugar seguro para alimentarse.

Esta técnica de agarre aéreo demuestra la gran destreza y habilidad para cazar en el aire. En consecuencia, esta técnica natural ha inspirado a las industrias robóticas en el diseño y desarrollo de robots, en especial en los drones para agarrar y/o transportar objetos [181, 182, 183]. En la Figura 5.2 se presentan las etapas para el agarre aéreo mediante un robot manipulador aéreo, que se propone en este capítulo.

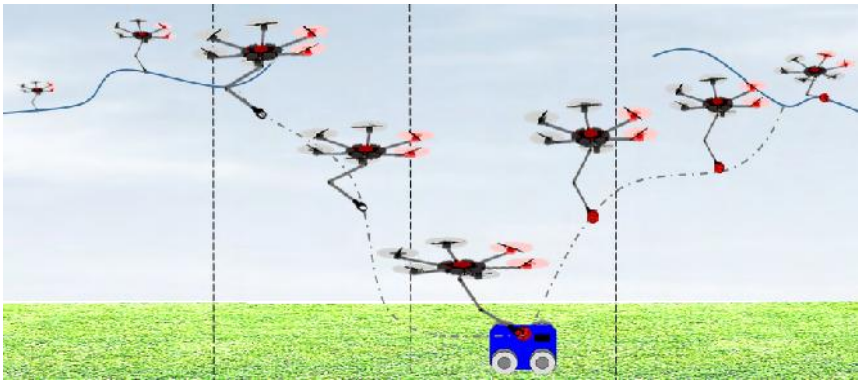


Figura 5.2: Etapas para el agarre aéreo bioinspirado para un manipulador aéreo.

5.2.1. Etapas del Agarre Aéreo Bioinspirado

En esta sección se detallan las etapas que conforman el proceso de agarre aéreo bioinspirado, las cuales permiten al manipulador aéreo capturar y transportar un objetivo de forma eficiente y segura durante el vuelo.

5.2.1.1. Identificación o Búsqueda (T1)

En esta etapa el robot busca el objetivo de manera autónoma en un lugar determinado, el robot emplea técnicas de identificación usando algoritmos de visión por computador para detectar el objetivo de interés (explosivos, armas, sustancias tóxicas, entre otras) o para depositar objetos en un lugar específico. Una vez que el objetivo es identificado entra a la segunda etapa.

5.2.1.2. Aproximación al Objetivo (T2)

Con las complejas características dinámicas que tiene el sistema combinado (Hexarrotor + Brazo Robótico) aumentan los desafíos de controlar con precisión el extremo operativo del manipulador aéreo para aproximarse al objetivo de forma segura y precisa. Por consiguiente, se plantea una estructura de control para posicionarse por la parte posterior del objetivo y en su misma dirección de movimiento. En el caso que el objetivo sea fijo, el robot puede recibir una orientación deseada con respecto al objetivo a capturar. Una vez que el extremo operativo está posicionado, el robot entra a la tercera etapa.

5.2.1.3. Agarre (T3)

En esta etapa el robot tiende a agarrar el objetivo detectado, en consecuencia el controlador comanda los movimientos de modo que el brazo robótico realiza los movimientos a fin de lograr el agarre de forma rápida y con mayor eficiencia energética. Para ello, las articulaciones del brazo robótico son las que realizan la mayor cantidad de movimiento para lograr cumplir con la tarea desea, es decir, el agarre aéreo del objetivo mediante el trabajo coordinado del hexarrotor y el brazo robótico.

5.2.1.4. Transporte (T4)

Aquí, el robot transporta el objetivo capturado, alejándose del suelo hacia un lugar seguro, que puede ser una posición a través de una ruta definida, de forma autónoma y segura.

5.3. Configuración Cinemática de la Cámara

En este apartado se describe la cinemática de la imagen, es decir, el comportamiento del objetivo en función a las velocidades del sistema. En la Figura 5.3 se presenta la configuración del sistema, en donde se indica la posición del objetivo y del extremo operativo en cada marco referencial del sistema. La configuración propuesta se denomina **"Aerial-Eye-to-Hand"**.

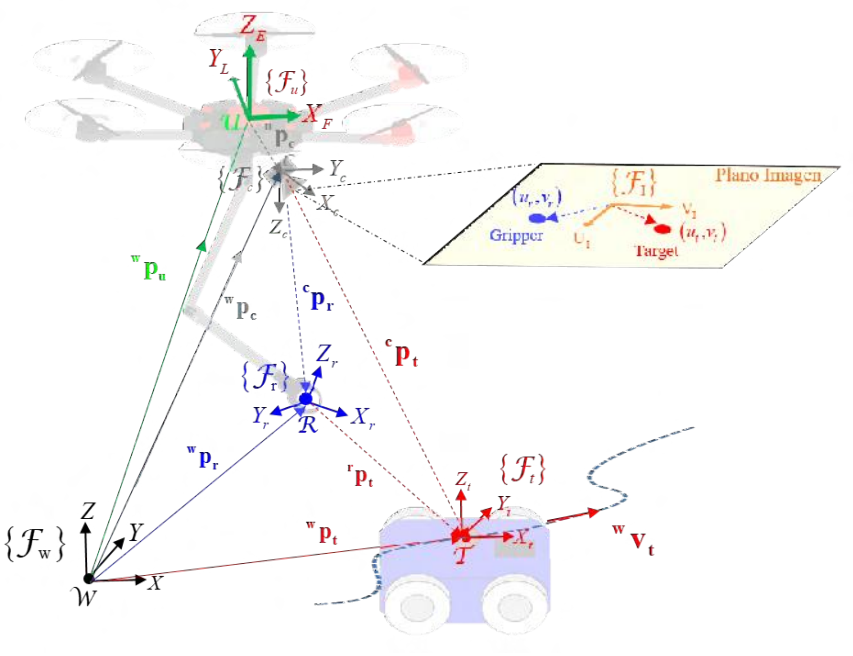


Figura 5.3: Interpretación cinemática de la configuración Aerial-Eye-to-Hand.

Sea $^{\mathbf{w}}\mathbf{p_t}(t) \in \mathbb{R}^3$ la posición de un objetivo ubicado en el sistema de referencia fijo $\{\mathcal{F}_w\}$; $^{\mathbf{w}}\mathbf{p_c}(t) \in \mathbb{R}^3$ la posición de la cámara en $\{\mathcal{F}_w\}$; y $^{\mathbf{w}}\mathbf{R_c} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $^{\mathbf{w}}\mathbf{R_c} \in SO(3)$ es la matriz de rotación de la cámara respecto al sistema fijo. Así, la posición del objetivo $^{\mathbf{c}}\mathbf{p_t}$ con respecto al marco de la cámara está

dado por:

$$^{\mathbf{c}}\mathbf{p_t}(t) = ^{\mathbf{w}}\mathbf{R}_{\mathbf{c}}^{\intercal}\left(^{\mathbf{w}}\mathbf{p_t}(t) - ^{\mathbf{w}}\mathbf{p_c}(t)\right) \tag{5.1}$$

donde $^{\mathbf{c}}\mathbf{p_t} = \begin{bmatrix} ^{c}t_x & ^{c}t_y & ^{c}t_z \end{bmatrix}^{\intercal}$. Considerando la cámara como un cuerpo rígido en movimiento con velocidad lineal:

$$^{\mathbf{w}}\mathbf{v_c}\left(t\right) = \begin{bmatrix} v_{x_c} \\ v_{y_c} \\ v_{z_c} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \tag{5.2}$$

y con velocidad angular

$$^{\mathbf{w}}\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{c}}\left(t\right) = \begin{bmatrix} \omega_{x_c} & \omega_{y_c} & \omega_{z_c} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \tag{5.3}$$

con respecto a $\{\mathcal{F}_{\mathrm{w}}\}$. Entonces, la velocidad relativa del punto (objetivo) con respecto al marco de referencia de la cámara $\{\mathcal{F}_{\mathrm{c}}\}$ se obtiene a partir de la derivada temporal de la Ecuación (5.1), tal que:

$$^{\mathbf{c}}\dot{\mathbf{p}}_{\mathbf{t}}\left(t\right) = ^{\mathbf{w}}\mathbf{R}_{\mathbf{c}}^{\intercal}\left(^{\mathbf{w}}\dot{\mathbf{p}}_{\mathbf{t}}\left(t\right) - ^{\mathbf{w}}\mathbf{v_c}\left(t\right)\right) - ^{\mathbf{w}}\mathbf{R}_{\mathbf{c}}^{\intercal}\left[^{\mathbf{w}}\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{c}} \times \left(^{\mathbf{w}}\mathbf{p_t}\left(t\right) - ^{\mathbf{w}}\mathbf{p_c}\left(t\right)\right)\right] \tag{5.4}$$

Ahora, de la Ecuación (5.1) se tiene que:

$$^{\mathbf{w}}\mathbf{R_c}\,^{\mathbf{c}}\mathbf{p_t} = ^{\mathbf{w}}\mathbf{p}_t\left(t\right) - ^{\mathbf{w}}\mathbf{p_c}\left(t\right) \tag{5.5}$$

sustituyendo en la Ecuación (5.4), resulta:

$$^{\mathbf{c}}\dot{\mathbf{p}}_{\mathbf{t}}\left(t\right) = ^{\mathbf{w}}\mathbf{R}_{\mathbf{c}}^{\intercal}\left(^{\mathbf{w}}\dot{\mathbf{p}}_{\mathbf{t}}\left(t\right) - ^{\mathbf{w}}\mathbf{v_c}\left(t\right)\right) - ^{\mathbf{w}}\mathbf{R}_{\mathbf{c}}^{\intercal}\,^{\mathbf{w}}\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{c}} \times ^{\mathbf{w}}\mathbf{R_c}\,^{\mathbf{c}}\mathbf{p_t} \tag{5.6}$$

Como la velocidad angular $^{\mathbf{w}}\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{c}} \in SO\left(3\right)$, se deduce que:

$$^{\mathbf{w}}\mathbf{R_c}\,^{\mathbf{w}}\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{c}} \times ^{\mathbf{w}}\mathbf{R}_{\mathbf{c}}^{\intercal} = ^{\mathbf{w}}\mathbf{R}_{\mathbf{c}}^{\intercal} \times ^{\mathbf{w}}\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{c}} \tag{5.7}$$

entonces resulta que:

$$^{\mathbf{c}}\dot{\mathbf{p}}_{\mathbf{t}}\left(t\right) = ^{\mathbf{w}}\mathbf{R}_{\mathbf{c}}^{\intercal}\left(^{\mathbf{w}}\dot{\mathbf{p}}_{\mathbf{t}}\left(t\right) - ^{\mathbf{w}}\mathbf{v_c}\left(t\right)\right) - \left(^{\mathbf{w}}\mathbf{R}_{\mathbf{c}}^{\intercal} \times ^{\mathbf{w}}\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{c}}(t)\right)^{\mathbf{c}}\mathbf{p_t}(t) \tag{5.8}$$

Dado que el producto vectorial puede expresarse como el producto de una matriz anti simétrica por un vector, es decir,

$$^{\mathbf{w}}\mathbf{R}_{\mathbf{c}}^{\intercal} \times ^{\mathbf{w}}\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{c}}\left(t\right) = sk\left(^{\mathbf{w}}\mathbf{R}_{\mathbf{c}}^{\intercal}\,^{\mathbf{w}}\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{c}}\left(t\right)\right) \tag{5.9}$$

resulta que la velocidad de un punto en el espacio viene dada por:

$$ {}^{\mathbf{c}}\dot{\mathbf{p}}_{\mathbf{t}}(t) = {}^{\mathbf{w}}\mathbf{R}_{\mathbf{c}}^{\intercal}\left({}^{\mathbf{w}}\dot{\mathbf{p}}_{t}(t) - {}^{\mathbf{w}}\mathbf{v}_{\mathbf{c}}(t)\right) - sk\left({}^{\mathbf{w}}\mathbf{R}_{\mathbf{c}}^{\intercal}{}^{\mathbf{w}}\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{c}}(t)\right){}^{\mathbf{c}}\mathbf{p}_{\mathbf{t}}(t) \tag{5.10} $$

Por propiedad se tiene que:

$$ sk\left({}^{\mathbf{w}}\mathbf{R}_{\mathbf{c}}^{\intercal}{}^{\mathbf{w}}\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{c}}(t)\right){}^{\mathbf{c}}\mathbf{p}_{\mathbf{t}}(t) = -sk\left({}^{\mathbf{c}}\mathbf{p}_{\mathbf{t}}(t)\right){}^{\mathbf{w}}\mathbf{R}_{\mathbf{c}}^{\intercal}{}^{\mathbf{w}}\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{c}}(t) \tag{5.11} $$

luego, la Ecuación (5.10) resulta en:

$$ {}^{\mathbf{c}}\dot{\mathbf{p}}_{\mathbf{t}}(t) = -{}^{\mathbf{w}}\mathbf{R}_{\mathbf{c}}^{\intercal}{}^{\mathbf{w}}\mathbf{v}_{\mathbf{c}}(t) + sk\left({}^{\mathbf{c}}\mathbf{p}_{\mathbf{t}}(t)\right){}^{\mathbf{w}}\mathbf{R}_{\mathbf{c}}^{\intercal}{}^{\mathbf{w}}\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{c}}(t) + {}^{\mathbf{w}}\mathbf{R}_{\mathbf{c}}^{\intercal}{}^{\mathbf{w}}\dot{\mathbf{p}}_{t}(t) \tag{5.12} $$

escrito de forma matricial el movimiento del objetivo en función de la velocidad lineal y angular de la cámara resulta:

$$ {}^{\mathbf{c}}\dot{\mathbf{p}}_{\mathbf{t}}(t) = \begin{bmatrix} -\mathbf{I}_{3\times3} & sk\left({}^{\mathbf{c}}\mathbf{p}_{\mathbf{t}}(\mathbf{t})\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{\mathbf{w}}\mathbf{R}_{\mathbf{c}}^{\intercal} & \mathbf{0}_{3\times3} \\ \mathbf{0}_{3\times3} & {}^{\mathbf{w}}\mathbf{R}_{\mathbf{c}}^{\intercal} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{\mathbf{w}}\mathbf{v}_{\mathbf{c}}(t) \\ {}^{\mathbf{w}}\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{c}}(t) \end{bmatrix} + {}^{\mathbf{w}}\mathbf{R}_{\mathbf{c}}^{\intercal}{}^{\mathbf{w}}\dot{\mathbf{p}}_{t}(t) \tag{5.13} $$

Luego, la Ecuación (5.13) reescrita de forma compacta se obtiene:

$$ {}^{\mathbf{c}}\dot{\mathbf{p}}_{\mathbf{t}}(t) = \mathbf{L}_{\mathbf{t}}\left({}^{\mathbf{c}}\mathbf{p}_{\mathbf{t}}(t)\right){}^{\mathbf{w}}\mathbf{R}_{\mathbf{c}}^{\intercal}\mathbf{v}(t) + {}^{\mathbf{w}}\mathbf{R}_{\mathbf{c}}^{\intercal}{}^{\mathbf{w}}\dot{\mathbf{p}}_{t}(t) \tag{5.14} $$

donde,

$$ \mathbf{v}(t) = \begin{bmatrix} {}^{\mathbf{w}}\mathbf{v}_{\mathbf{c}}^{\intercal}(t) & {}^{\mathbf{w}}\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{c}}^{\intercal}(t) \end{bmatrix}^{\intercal} \tag{5.15} $$

representa la velocidad de la cámara montada en el vehículo aéreo, $\mathbf{L}_{\mathbf{t}}{}^{\mathbf{c}}\mathbf{p}_{\mathbf{t}}(t) \in \mathbb{R}^{3\times6}$ es llamada como matriz de interacción de un punto en el espacio 3D y está dada por:

$$ \mathbf{L}_{\mathbf{t}}\left({}^{\mathbf{c}}\mathbf{p}_{\mathbf{t}}(t)\right) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & -{}^{c}t_{z}(t) & {}^{c}t_{y}(t) \\ 0 & -1 & 0 & {}^{c}t_{z}(t) & 0 & -{}^{c}t_{x}(t) \\ 0 & 0 & -1 & -{}^{c}t_{y}(t) & {}^{c}t_{x}(t) & 0 \end{bmatrix} \tag{5.16} $$

Como la cámara está en el UAV, ahora expresamos el movimiento del punto 3D en el espacio en función de las velocidades del UAV de la siguiente manera:

$$ {}^{\mathbf{c}}\dot{\mathbf{p}}_{\mathbf{t}}(t) = \mathbf{J}_{\mathbf{I}}\left({}^{\mathbf{c}}\mathbf{p}_{\mathbf{t}}(t), \mathbf{q}_{\mathbf{u}}(t)\right)\mathbf{v}_{\mathbf{u}}(t) + {}^{\mathbf{w}}\mathbf{R}_{\mathbf{c}}^{\intercal}{}^{\mathbf{w}}\dot{\mathbf{p}}_{\mathbf{t}}(t) \tag{5.17} $$

donde, $\mathbf{v}_{\mathbf{u}}(t) \in \mathbb{R}^{4}$ es el vector que contiene las velocidades del UAV conformado por las tres velocidades lineales y la velocidad angular de rotación yaw;

$\mathbf{J_I}\left({}^{\mathbf{c}}\mathbf{p_t}\left(t\right), \mathbf{q_u}\left(t\right)\right) : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es el Jacobiano de interacción del objetivo en movimiento y la plataforma aérea.

Ahora se define la transformación cinemática del extremo operativo considerando los datos del sistema de visión. Si ${}^{\mathbf{c}}\mathbf{p_r}\left(t\right)$ es la posición del extremo operativo respecto a la cámara $\{\mathcal{F}_{\mathrm{c}}\}$, la posición del extremo operativo respecto a $\{\mathcal{F}_{\mathrm{w}}\}$, en función de ${}^{\mathbf{c}}\mathbf{p_r}\left(t\right) \in \mathbb{R}^3$, está determinada por:

$$ {}^{\mathbf{w}}\mathbf{p_r}\left(t\right) = {}^{\mathbf{w}}\mathbf{p_u}\left(t\right) + {}^{\mathbf{w}}\mathbf{R_u}\left({}^{\mathbf{u}}\mathbf{R_c}\,{}^{\mathbf{c}}\mathbf{p_r}\left(t\right) + {}^{\mathbf{u}}\mathbf{p_c}\left(t\right)\right) \tag{5.18} $$

5.3.1. Jacobiano Aumentado

En esta sección se define la cinemática del sistema, para lo cual se propone un Jacobiano aumentado, considerando la posición, la orientación del extremo operativo y la orientación del brazo robótico definida por la articulación $q_1(t)$. Por lo tanto, tomando la Ecuación (2.46) y la primera orientación del brazo robótico, se define el modelo cinemático de la tarea:

$$ \dot{\mathbf{X}}\left(t\right) = \mathbf{J_A}\left(\mathbf{q_u}\left(t\right), \mathbf{q_a}\left(t\right)\right)\boldsymbol{\mu}\left(t\right) \tag{5.19} $$

donde, $\dot{\mathbf{X}}\left(t\right) \in \mathbb{R}^5$ es el vector de velocidades de la tarea en el sistema de referencia fijo $\{\mathcal{F}_{\mathrm{w}}\}$, añadiendo la velocidad angular de la articulación $\dot{q}_1$ y está definido por:

$$ \dot{\mathbf{X}}\left(t\right) = \begin{bmatrix} {}^{w}\dot{r}_x & {}^{w}\dot{r}_y & {}^{w}\dot{r}_z & {}^{w}\dot{r}_o & \dot{q}_1 \end{bmatrix}^{\intercal} \tag{5.20} $$

y

$$ \mathbf{J_A}\left(\mathbf{q}\left(t\right)\right) : \mathbb{R}^{n_A} \rightarrow \mathbb{R}^{m_A} \tag{5.21} $$

es el Jacobiano de la tarea, con $m_A = 5$ y $n_A = 7$, definido por:

$$ \mathbf{J_A}\left(\mathbf{q}\left(t\right)\right) = \begin{bmatrix} \mathbf{J}\left(\mathbf{q_u}\left(t\right), \mathbf{q_a}\left(t\right)\right) & \mathbf{0}_{4\times 1} \\ \mathbf{0}_{1\times 7} & q_1\left(t\right) \end{bmatrix} \tag{5.22} $$

Observación 13 *El sistema (Ecuación (5.19)) es redundante ya que $n_A > m_A$, es decir, hay más grados de libertad de los necesarios para cumplir la tarea $\mathbf{X}(t)$. En consecuencia, el esquema de control propuesto permitirá agregar objetivos secundarios de control. Los objetivos secundarios están definidos en función de la etapa en la que el robot se encuentra para el agarre aéreo.*

5.4. Control Servo-Visual con Objetivos Secundarios

La Figura 5.4 presenta el esquema del controlador propuesto para el agarre aéreo bioinspirado en las aves de caza como el águila, que es eficaz y eficiente.

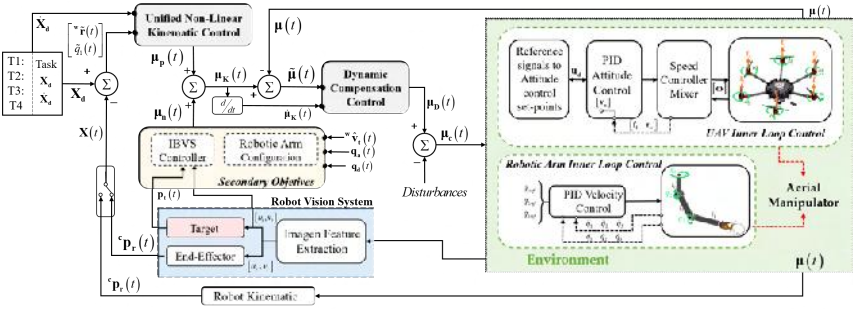


Figura 5.4: Esquema en cascada propuesto para el controlador servo-visual bioinspirado.

El esquema de control propuesto es un controlador en cascada que contempla dos etapas:

I) **Control Cinemático no Lineal Unificado:** se encarga de generar las referencias para cumplir el objetivo principal de las tareas del robot. Se trata de un controlador basado en la cinemática del manipulador aéreo de tal forma que,

$$\lim_{t\to\infty} \left(\mathbf{X_d}\left(t\right) - \mathbf{X}\left(t\right)\right) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^m$$

es decir, lleva los errores de control a cero. Además, como el sistema (Ecuación (5.19)) es redundante, el controlador permite satisfacer uno o múltiples objetivos secundarios (Apéndice B).

II) **Control de Compensación Dinámica:** es el controlador que permite compensar la dinámica del robot manipulador aéreo, con el objetivo de reducir los errores de seguimiento de velocidad y/o las perturbaciones producidas por las condiciones ambientales. El objetivo de este controlador

puede expresarse como:

$$\lim_{t\to\infty} \left(\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{K}}\left(t\right) - \boldsymbol{\mu}\left(t\right)\right) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n}$$

esto es llevar las velocidades actuales a las referencias generadas por el controlador cinemático con una dinámica deseada.

5.4.1. Control Cinemático no Lineal Unificado

Este controlador permite cumplir las cuatro etapas propuestas para el agarre aéreo y consisten en una ley de control unificada. Las etapas son manejadas por una ley de control unificada. Éstas etapas están definidas como:

- **T 1:** Búsqueda del objetivo.
- **T 2:** Acercamiento al objetivo.
- **T 3:** Agarre del objetivo.
- **T 4:** Transporte del objetivo.

La descripción de cada etapa se presenta en la Sección 5.2.1. El controlador propuesto en este capítulo permite cumplir los objetivos de estas etapas modificando solo las referencias del controlador. Como $\mathbf{J_A}\left(\mathbf{q}\left(t\right)\right) : \mathbb{R}^{n_A} \rightarrow \mathbb{R}^{m_A}$ es un sistema redundante se plantea una ley de control compuesta por dos acciones de control:

$$\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{K}}\left(t\right) = \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{p}}\left(t\right) + \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{n}}\left(t\right) \tag{5.23}$$

5.4.1.1. Acción de Control Primaria

La acción de control ($\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{p}}(t)$) es la encargada de que el extremo operativo del robot cumpla con el objetivo primario que corresponde a cada tarea T1, T2, T3 y T4. La ley de control control está definida por:

$$\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{p}}\left(t\right) = \mathbf{J}_{\mathbf{A}}^{\dagger}\left(\mathbf{q}\right)\left(\mathbf{v_d}\left(t\right) + \mathbf{L}_1 \tanh\left(\mathbf{L_1^{-1}}\mathbf{K_1}\tilde{\mathbf{X}}\left(t\right)\right)\right) \tag{5.24}$$

donde, $\mathbf{J}_{\mathbf{A}}^{\dagger}\left(\mathbf{q}\right) = \mathbf{J_A}(\mathbf{q})^{\intercal}(\mathbf{J_A}\left(\mathbf{q}\right)\mathbf{J_A}(\mathbf{q})^{\intercal})^{-1}$ es la matriz pseudo-inversa por derecha de $\mathbf{J_A}(\mathbf{q})$, $\mathbf{v_d}(t) \in \mathbb{R}^5$ es la velocidad deseada de la tarea, $\mathbf{L_1}, \mathbf{K_1} \in \mathbb{R}^{5\times5}$ son matrices cuadradas definidas positivas que pesan los errores de control

de la tarea, el vector de error $\tilde{\mathbf{X}}(t) \in \mathbb{R}^5$ y la velocidad deseada vienen dados por:

$$\tilde{\mathbf{X}}(t) = \begin{bmatrix} {}^{\mathbf{w}}\tilde{\mathbf{r}}(t) \\ \tilde{q}_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{\mathbf{w}}\tilde{\mathbf{p}}_{\mathbf{r}}(t) \\ {}^{w}\tilde{o}_r(t) \\ \tilde{q}_1(t) \end{bmatrix} \quad \mathbf{v_d}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{v_{r_d}}(t) \\ \dot{q}_{1_d}(t) \end{bmatrix} \tag{5.25}$$

donde, ${}^{\mathbf{w}}\tilde{\mathbf{r}}(t) \in \mathbb{R}^4$ es el error del extremo operativo, $\tilde{q}_1(t)$ es el error de la primera articulación del brazo robótico, $\mathbf{v_{r_d}}(\mathbf{t})$ es el vector de velocidad deseada del extremo operativo y $\dot{q}_{1_d}(t)$ es la velocidad deseada para la primera articulación del brazo robótico.

5.4.1.2. Acción de Control Secundaria

La acción de control ($\boldsymbol{\mu}(t)$) está basada en el espacio nulo. Mediante esta acción se puede definir uno o varios objetivos secundarios de control dependiendo de la redundancia del sistema. La acción de control se calcula mediante:

$$\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{n}}(t) = \left(\mathbf{I}_{7\times 7} - \mathbf{J}_{\mathbf{A}}^{\dagger}(\mathbf{q})\,\mathbf{J}_{\mathbf{A}}(\mathbf{q})\right)\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{m}}(t) \tag{5.26}$$

donde, $\left(\mathbf{I}_{7\times 7} - \mathbf{J}_{\mathbf{A}}^{\dagger}(\mathbf{q})\,\mathbf{J}_{\mathbf{A}}(\mathbf{q})\right) \in \mathbb{R}^{7\times 7}$ es el operador de proyección ortogonal en el espacio nulo $N(\mathbf{J}_{\mathbf{A}}(\mathbf{q}))$; y $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{m}}(t) \in \mathbb{R}^7$ es el vector de velocidades del objetivo secundario de control. Este vector de velocidad permite modificar la configuración interna del robot sin alterar la tarea principal, en otras palabras, no afecta a la posición del extremo operativo. Se propone que el vector de configuración del sistema está conformado por dos vectores componentes:

$$\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{m}}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{v_{u_{ref}}}(t) \\ \mathbf{v_{a_{ref}}}(t) \end{bmatrix} \tag{5.27}$$

donde, $\mathbf{v_{u_{ref}}}(t) \in \mathbb{R}^4$ es el vector de velocidades para la configuración interna de la plataforma aérea y $\mathbf{v_{a_{ref}}}(t) \in \mathbb{R}^3$ es el vector de velocidades para modificar la configuración interna del brazo robótico. El vector para configurar la estructura interna del brazo robótico se define como:

$$\mathbf{v_{a_{ref}}}(t) = \mathbf{L_a}\tanh\left(\mathbf{K_a}\boldsymbol{\Delta}_{\mathbf{q_a}}(t)\right) \tag{5.28}$$

donde, $\mathbf{L_a}, \mathbf{K_a} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ son matrices definidas positivas que pesan la variación de las articulaciones y $\boldsymbol{\Delta}_{\mathbf{q_a}}(t)$ es el vector de variaciones deseadas de las articulaciones definido por:

$$\boldsymbol{\Delta}_{\mathbf{q_a}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & \tilde{q}_2 & \tilde{q}_3 \end{bmatrix}^{\intercal} \tag{5.29}$$

donde, $\tilde{q}_i = q_{i_d} - q_i$ para $i = 2, 3$ es el error de la posición de cada articulación del brazo robótico.

5.4.2. Objetivos de Control

En este apartado se definen los parámetros T1, T2, T3 y T4 para la tarea principal y los objetivos secundarios, con el fin de que el robot realice el agarre aéreo autónomo de un objetivo en movimiento. Además, se definen las posiciones deseadas para el brazo robótico en cada fase del agarre aéreo.

5.4.2.1. T1 y T4: Búsqueda y Transporte

La Figura 5.5 muestra el objetivo a cumplir del manipulador aéreo en cada etapa.

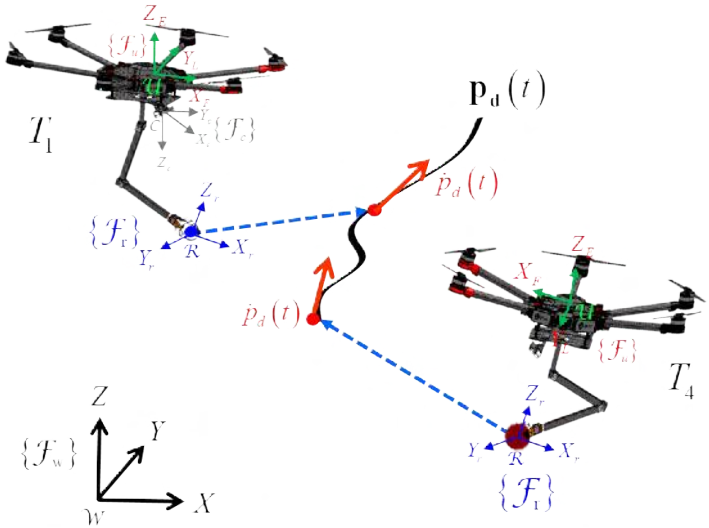


Figura 5.5: Búsqueda y transporte del objetivo.

A) **Objetivo Primario.** Las tareas T1 y T4 son similares, con la diferencia de la postura del brazo robótico para cargar el objeto (ver Figura 5.5). Las entradas del controlador son:

1. Posición deseada $\mathbf{p_d}(t)$ y Orientación deseada $\mathbf{o_d}(t)$ del extremo operativo. Estas referencias pueden ser de una posición y orientación fija, una trayectoria o un camino deseado que el robot ejecute de forma autónoma (Capítulo 4).
2. Velocidad deseada de la tarea $\mathbf{v_d}(t) \in \mathbb{R}^5$, es la velocidad con la que el robot busca y transporta al objetivo de interés.

Los errores de control y la referencia de velocidades para la Ecuación (5.25) están dados por:

$$\tilde{\mathbf{X}}(t) = \begin{bmatrix} {}^{\mathbf{w}}\tilde{\mathbf{p}}_{\mathbf{r}}(t) \\ {}^{w}\tilde{o}_r(t) \\ \tilde{q}_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p_d}(t) - {}^{\mathbf{w}}\mathbf{p_r}(t) \\ o_d(t) - r_\psi(t) \\ q_{1d}(t) - q_1(t) \end{bmatrix} \quad \mathbf{v_d}(t) = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}_{\mathbf{d}}(t) \\ \dot{o}_d(t) \\ \dot{q}_{1d}(t) \end{bmatrix} \tag{5.30}$$

donde, ${}^{\mathbf{w}}\mathbf{p_r}(t) \in \mathbb{R}^3$ es el error de posición del extremo operativo del robot en $\{\mathcal{F}_{\mathrm{w}}\}$, ${}^{w}\tilde{o}_r(t) \in \mathbb{R}$ es el error de orientación del extremo operativo en el plano-XY del sistema de referencia fijo, $\tilde{q}_1(t) \in \mathbb{R}$ el error de la primera articulación del brazo robótico, $\dot{\mathbf{p}}_{\mathbf{d}}(t) \in \mathbb{R}^3$, $\dot{o}_d(t) \in \mathbb{R}$ y $\dot{q}_{1_d}(t) \in \mathbb{R}$ son las velocidades deseadas para el extremo operativo y para la rotación de la primera articulación del brazo robótico. El valor designado para la articulación es $q_{1d}(t) = 0$ con el propósito de mantener el brazo robótico orientado en la misma dirección que el UAV, por tanto $\dot{q}_{1d}(t) = 0$.

Observación 14 *En el caso de posicionamiento del extremo operativo la velocidad deseada es:*

$$\mathbf{v_{r_d}}(t) = \mathbf{0}$$

Para el caso de seguimiento de la trayectoria:

$$\mathbf{v_{r_d}}(t) = \frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\mathbf{p_d(t)}^{\intercal} & o_d(t)\end{bmatrix}^{\intercal}$$

es la derivada temporal de la trayectoria, y para el seguimiento de camino la velocidad deseada es una velocidad arbitraria definida por el usuario en función de la posición-orientación del extremo operativo y una velocidad constante, tal que,

$$\mathbf{v_{r_d}}(t) = f(\upsilon, {}^{\mathbf{w}}\mathbf{r})$$

La selección de referencias para el controlador (Ecuación (5.24)) se detalla de mejor manera en el Capítulo 4.

B) **Objetivo Secundario.** El vector del objetivo secundario para las tareas (T1 y T4) modifica únicamente la estructura interna del brazo robótico y no al UAV. Es decir, establece una posición deseada para las articulaciones del brazo robótico. En consecuencia, el vector de configuración interna del manipulador aéreo está dado por:

$$\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{m}}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{1\times 4}{}^{\mathsf{T}} & \mathbf{v}_{\mathbf{a}_{\mathbf{ref}}}{}^{\mathsf{T}} \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$$

Las posiciones deseadas del brazo robótico para $\boldsymbol{\Delta}_{\mathbf{q_a}}(t) \in \mathbb{R}^3$ son definidas en función a la máxima manipulabilidad y al centro de masa del brazo robótico sin carga para T1 y con carga para T4 , el que debería estar en la vertical del centro de gravedad a fin de tener mayor eficiencia energética.

5.4.2.2. T2: Aproximación al Objetivo

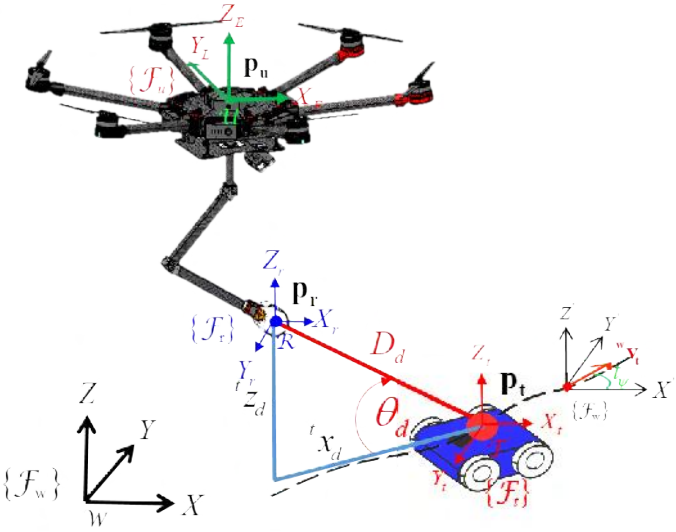


Figura 5.6: Formación propuesta para la aproximación al objetivo de interés.

A) **Objetivo Primario.** Para la aproximación al objetivo, se propone alcanzar una formación cinemática del robot aéreo con respecto al objetivo:

$$^{\mathbf{t}}\mathbf{F}_{\mathbf{d}} \in \mathbb{R}^3$$

La Figura 5.6 indica los parámetros de formación para ubicar al manipulador aéreo por detrás del objetivo. Los parámetros para la formación son:

1. Distancia deseada $D_d \in \mathbb{R}^+$, es la distancia de ubicación del extremo operativo respecto al objetivo de agarre.
2. Angulo deseado $\theta_d \in \mathbb{R}^+$, es el ángulo de elevación del extremo operativo respecto al objetivo. El vector de referencia para cumplir la formación deseada está definido por:

$$ {}^{\mathbf{t}}\mathbf{F_d} = \begin{bmatrix} {}^{t}x_d \\ {}^{t}y_d \\ {}^{t}z_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -D_d \cos(\theta_d) \\ 0 \\ D_d \sin(\theta_d) \end{bmatrix} \tag{5.31} $$

La formación deseada establece que el extremo operativo se posicione y siga al objetivo por la parte posterior para lograr el agarre aéreo de dicho objetivo estático o móvil. Ahora, se define las referencias para el controlador del objetivo primario $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{p}}(t)$:

(1) **Posición:** Primero consideremos el error de posición del extremo operativo en $\{\mathcal{F}_{\mathrm{w}}\}$ escrito como:

$$ {}^{\mathbf{w}}\tilde{\mathbf{p}}_{\mathbf{r}}(t) = {}^{\mathbf{w}}\mathbf{R}_{\mathbf{u}}\,{}^{\mathbf{u}}\tilde{\mathbf{p}}_{\mathbf{r}}(t) \tag{5.32} $$

donde, ${}^{\mathbf{u}}\tilde{\mathbf{p}}_{\mathbf{r}}(t) \in \mathbb{R}^3$ es el error de posición dentro del marco de referencia del UAV $\{\mathcal{F}_{\mathrm{u}}\}$. Luego, tomando la Ecuación (5.31) se define la posición deseada para el extremo operativo en $\{\mathcal{F}_{\mathrm{u}}\}$ como:

$$ {}^{\mathbf{u}}\mathbf{p_d}(t) = {}^{\mathbf{u}}\mathbf{R_c}\,{}^{\mathbf{c}}\mathbf{p_t}(t) + {}^{\mathbf{u}}\mathbf{R_t}\,{}^{\mathbf{t}}\mathbf{F_d}(t) \tag{5.33} $$

La cual define una formación deseada del extremo operativo respecto al objetivo, donde ${}^{\mathbf{c}}\mathbf{p_t}(t) \in \mathbb{R}^3$ es la posición del objetivo en el marco de la cámara $\{\mathcal{F}_{\mathrm{c}}\}$ y ${}^{\mathbf{u}}\mathbf{R_t} \in SO(3)$ es la matriz de rotación del UAV con respecto al sistema de referencia del objetivo.
Si ${}^{\mathbf{u}}\tilde{\mathbf{p}}_{\mathbf{r}}(t) = {}^{\mathbf{u}}\mathbf{p_d}(t) - {}^{\mathbf{u}}\mathbf{p_r}(t)$ es el error del extremo operativo en $\{\mathcal{F}_{\mathrm{u}}\}$ y ${}^{\mathbf{u}}\mathbf{p_r}(t) = {}^{\mathbf{u}}\mathbf{R_c}\,{}^{\mathbf{c}}\mathbf{p_r}(t)$ es la posición del extremo operativo, donde, ${}^{\mathbf{c}}\mathbf{p_r}(t) \in \mathbb{R}^3$ es la posición del extremo operativo en el marco de la cámara $\{\mathcal{F}_{\mathrm{c}}\}$, entonces resulta que el error descrito en $\{\mathcal{F}_{\mathrm{u}}\}$ es:

$$ {}^{\mathbf{u}}\tilde{\mathbf{p}}_{\mathbf{r}}(t) = {}^{\mathbf{u}}\mathbf{R_c}\,{}^{\mathbf{c}}\tilde{\mathbf{p}}_{\mathbf{r}}(t) + {}^{\mathbf{u}}\mathbf{F_d} \tag{5.34} $$

donde, ${}^{c}\tilde{\mathbf{p}}_{\mathbf{r}}(t) = {}^{\mathbf{c}}\mathbf{p}_{\mathbf{t}}(t) - {}^{\mathbf{c}}\mathbf{p}_{\mathbf{r}}(t)$ es el error del extremo operativo en el marco referencial de la cámara. Por último, como ${}^{\mathbf{w}}\tilde{\mathbf{p}}_{\mathbf{r}}(t) = {}^{\mathbf{w}}\mathbf{R}_{\mathbf{u}}\,{}^{\mathbf{u}}\tilde{\mathbf{p}}_{\mathbf{r}}(t)$, entones el error de control de posición en el marco fijo está dado por:

$$ {}^{\mathbf{w}}\tilde{\mathbf{p}}_{\mathbf{r}}(t) = {}^{\mathbf{w}}\mathbf{R}_{\mathbf{u}}\left({}^{\mathbf{u}}\mathbf{R}_{\mathbf{c}}\,{}^{\mathbf{c}}\tilde{\mathbf{p}}_{\mathbf{r}}(t) + {}^{\mathbf{u}}\mathbf{F}_{\mathbf{d}}\right) \tag{5.35} $$

(II) **Orientación:** en segunda instancia, la orientación del objetivo $t_{\psi}(t)$ es definida como la orientación deseada del extremo operativo, tal que, $o_d(t) = t_{\psi}(t)$. Entonces, el error de orientación del extremo operativo está definido por:

$$ {}^{\mathbf{w}}\tilde{\mathbf{o}}_{\mathbf{r}}(t) = t_{\psi}(t) - r_{\psi}(t) \tag{5.36} $$

garantizando que el extremo operativo esté la misma dirección del objetivo. Además, como se desea que el extremo operativo se oriente en la parte frontal de la plataforma, la consigna de la articulación del brazo robótico se define como:

$$ q_{1d}(t) = 0 \therefore \tilde{q}_1(t) = -q_1(t) $$

Tomando estas tres consideraciones el vector de error de control (16) para acercarse al objetivo está definido como:

$$ \tilde{\mathbf{X}}(t) = \begin{bmatrix} {}^{\mathbf{w}}\tilde{\mathbf{p}}_{\mathbf{r}}(t) \\ {}^{w}\tilde{o}_{r}(t) \\ \tilde{q}_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{\mathbf{w}}\mathbf{R}_{\mathbf{u}}\left({}^{\mathbf{u}}\mathbf{R}_{\mathbf{c}}\left({}^{\mathbf{c}}\mathbf{p}_{\mathbf{t}}(t) - {}^{\mathbf{c}}\mathbf{p}_{\mathbf{r}}(t)\right) + {}^{\mathbf{u}}\mathbf{F}_{\mathbf{d}}\right) \\ t_{\psi}(t) - r_{\psi}(t) \\ -q_1(t) \end{bmatrix} \tag{5.37} $$

(III) **Velocidad:** como el manipulador aéreo ya detectó al objetivo, la velocidad con la que el robot se aproxima y sigue al objetivo es la velocidad estimada del objetivo. La velocidad del objetivo en movimiento es obtenida a través de un filtro $\alpha - \beta$ [184, 185]. El filtro permite estimar la velocidad lineal y la velocidad angular del objetivo, lo que da como resultado,

$$ {}^{\mathbf{w}}\hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{t}}(t) \in \mathbb{R}^3 $$
$$ \hat{v}_{t_{\psi}}(t) \in \mathbb{R} $$

Por lo tanto, el vector de velocidad deseada para el controlador de la

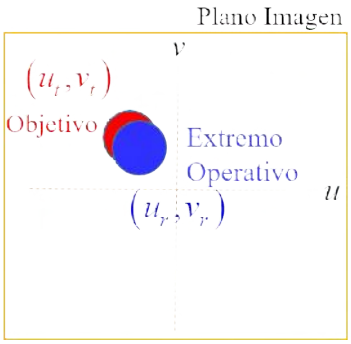
Ecuación (5.25) está dado por:

$$\mathbf{v_d}(t) = \begin{bmatrix} {}^{\mathbf{w}}\hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{t}}(t) \\ \hat{v}_{t_\psi}(t) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5.38}$$

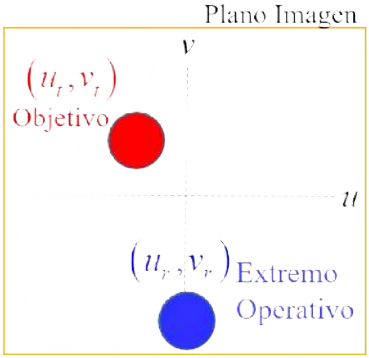
Con la referencia para la velocidad deseada siendo la velocidad del objetivo, se garantiza el posicionamiento y seguimiento del objetivo tanto en dirección y sentido. En el caso de que el objetivo sea estático el vector de velocidad deseada es nulo,

$$\mathbf{v_d}(t) = 0 \tag{5.39}$$

B) **Objetivo Secundario.** Para el acercamiento del robot hacia el objetivo, se determina los valores deseados de las articulaciones del brazo robótico para que el brazo robótico se retraiga evitando salir del FOV de la cámara y sobre todo evitar que el brazo robótico obstruya la visión del robot. En otras palabras, se desea impedir la superposición del extremo operativo sobre el objeto que puede darse en el plano imagen durante el acercamiento al objetivo (ver Figura 5.7), ya que esto generaría información errónea para el controlador.



(a) Efecto de superposición del extremo operativo sobre el objetivo.



(b) Configuración deseada para evitar la superposición de las imágenes.

Figura 5.7: Representación del objetivo a capturar y del extremo operativo proyectados en el plano imagen.

5.4.2.3. T3: Agarre Aéreo del Objetivo

Cuando el manipulador aéreo se sitúa en la posición deseada con respecto al objetivo (T2), el robot procede a realizar el agarre aéreo del objetivo. Para llevar a cabo la tarea, se establece que el brazo robótico realice los movimientos necesarios, es decir, que el brazo robótico modifique su estructura interna para extenderse y agarrar el objetivo. Todo ello, sin modificar la estructura del controlador (Ecuación (5.24)) y su modelo (Ecuación (5.20)). La Figura 5.8 presenta la estrategia de agarre aéreo bioinspirado propuesta en este trabajo para un manipulador aéreo. Esto conduce a un agarre rápido y eficiente del objetivo, a la manera en que lo hacen las aves cazadoras.

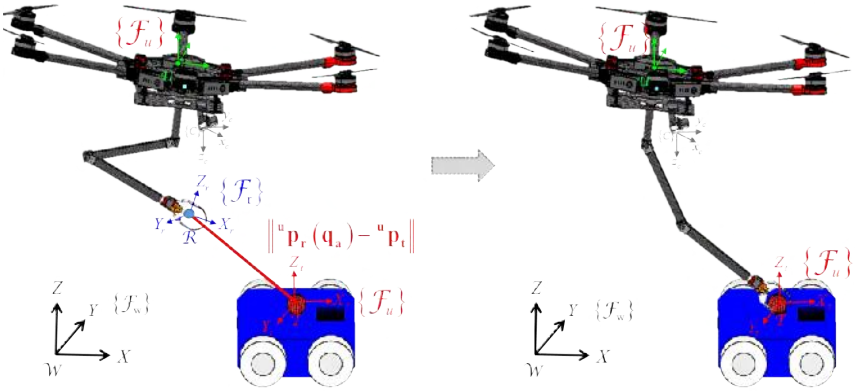


Figura 5.8: Estrategia de agarre aéreo bioinspirado para un manipulador aéreo

A) **Objetivo Primario.** Para definir las referencias del controlador, se toma en cuenta dos consideraciones. La primera consideración consiste que:

$$^{\mathbf{t}}\mathbf{F_d}\,(t) = \mathbf{0}_{3\times 3} \therefore {}^{\mathbf{u}}\mathbf{F_d}\,(t) = \mathbf{0}_{3\times 3}$$

De este modo, el punto de interés del extremo operativo viene a ser la posición del objetivo a agarrar $^{\mathbf{c}}\mathbf{p_t}(t)$. La segunda consideración consiste en obtener la orientación deseada de la articulación $q_{1_d}(t)$ para garantizar el agarre aéreo del objetivo, mientras que para la orientación del extremo operativo es similar a la de T2. Así, el vector de error de control

(Ecuación (5.24)) para el agarre aéreo está definido como:

$$\tilde{\mathbf{X}}(t) = \begin{bmatrix} {}^{\mathbf{w}}\tilde{\mathbf{r}}(t) \\ \tilde{q}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{\mathbf{w}}\tilde{\mathbf{p}}_{\mathbf{r}}(t) \\ {}^{w}\tilde{o}_r(t) \\ \tilde{q}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{\mathbf{w}}\mathbf{R}_{\mathbf{c}}\left({}^{\mathbf{c}}\mathbf{p}_{\mathbf{t}}(t) - {}^{\mathbf{c}}\mathbf{p}_{\mathbf{r}}(t)\right) \\ t_{\psi}(t) - r_{\psi}(t) \\ q_{1_d} - q_1 \end{bmatrix} \tag{5.40}$$

donde, ${}^{\mathbf{w}}\mathbf{R}_{\mathbf{c}} = {}^{\mathbf{w}}\mathbf{R}_{\mathbf{u}}{}^{\mathbf{u}}\mathbf{R}_{\mathbf{c}}$ es la rotación de la cámara respecto a $\{\mathcal{F}_{\mathrm{w}}\}$. Por último, la velocidad deseada para la Ecuación (5.24) es similar a la de la Ecuación (5.38), ya que para garantizar el agarre aéreo el robot debe moverse en la misma dirección y sentido que el objetivo.

B) **Objetivo Secundario.** En esta fase, el movimiento del brazo robótico tiene prioridad para agarrar el objetivo. Como el robot está situado a una distancia cercana y dentro del espacio de trabajo del brazo robótico, puede alcanzar fácilmente el objetivo. Todo ello, dando prioridad al movimiento del brazo robótico para garantizar que ${}^{\mathbf{c}}\tilde{\mathbf{p}}_{\mathbf{r}}(t) \rightarrow \mathbf{0}$, y por lo tanto, ${}^{\mathbf{w}}\tilde{\mathbf{p}}_{\mathbf{r}}(t) \rightarrow \mathbf{0}$. Las referencias deseadas para las articulaciones del brazo robótico $\mathbf{q}_{\mathbf{a_d}}(t) \in \mathbb{R}^3$ se determinan minimizando la distancia entre el extremo operativo del manipulador aéreo y el objetivo a capturar $d\left({}^{\mathbf{u}}\mathbf{p}_{\mathbf{r}}(t), {}^{\mathbf{u}}\mathbf{p}_{\mathbf{r}}(t)\right)$. Ahora, sea $f(\mathbf{q}_{\mathbf{a}}) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por :

$$f(\mathbf{q}_{\mathbf{a}}(t)) = \left\| {}^{\mathbf{u}}\mathbf{p}_{\mathbf{r}}(\mathbf{q}_{\mathbf{a}}) - {}^{\mathbf{u}}\mathbf{R}_{\mathbf{c}}{}^{\mathbf{c}}\mathbf{p}_{\mathbf{t}}(t) \right\|$$

se define el siguiente problema de optimización:

$$\begin{array}{ll} \text{min:} & f(\mathbf{q}_{\mathbf{a}}(t)) \\ \text{Sujeto a:} & \mathrm{w}(\mathbf{q}_{\mathbf{a}}(t)) \geq \lambda_w \\ & \mathbf{q}_{\mathbf{a}}(t) \in [\mathbf{q}_{\mathbf{a_{min}}}, \mathbf{q}_{\mathbf{a_{max}}}] \end{array} \tag{5.41}$$

donde, $\mathrm{w}(\mathbf{q}_{\mathbf{a}}) \in \mathbb{R}$ es el índice de manipulabilidad del brazo robótico. Según [110] es la cuantificación de la medida de manipulabilidad para $\mathbf{J}_{\mathbf{a}}(\mathbf{q}_{\mathbf{a}}(t)) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ y se determina por la Ecuación (C.2), tal que:

$$\mathrm{w}(\mathbf{q}_{\mathbf{a}}(t)) = \left|\det\left(\mathbf{J}_{\mathbf{a}}(\mathbf{q}_{\mathbf{a}}(t))\mathbf{J}_{\mathbf{a}}(\mathbf{q}_{\mathbf{a}}(t))^{\intercal}\right)\right| \tag{5.42}$$

$\lambda_w \in \mathbb{R}^+$ es un valor real positivo que define el valor mínimo de manipulabilidad deseado, de tal forma que $\lambda_w > 0$. Esta primera restricción evita que el brazo robótico adopte una configuración singular. La segunda restricción establece los valores máximos y mínimos que pueden tomar las articulaciones del brazo robótico, los rangos de valores están definidos por

la configuración mecánica del brazo robótico. Por tanto, las referencias para $\boldsymbol{\Delta q_a}(t)$ en la Ecuación (5.38) y para $q_{1_d}(t)$ en la Ecuación (5.40) se obtienen mediante el proceso de optimización con restricciones descrito en la Ecuación (5.41).

5.4.3. Análisis de Estabilidad del Controlador Cinemático No-Lineal

Para el análisis de estabilidad se considera un seguimiento perfecto de la velocidad del robot $\boldsymbol{\mu_K}(t) = \boldsymbol{\mu}(t)$, entonces, sustituyendo el controlador propuesto (Ecuación (5.21)) en el modelo cinemático aumentado (Ecuación (5.19)) e ignorando la dinámica del robot resulta:

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{J_A}(\mathbf{q_u}(t), \mathbf{q_a}(t)) \left(\boldsymbol{\mu_p}(t) + \boldsymbol{\mu_n}(t)\right) \tag{5.43}$$

Reemplazando las acciones de control de la Ecuación (5.24) y la Ecuación (5.26) se obtiene:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{X}}(t) =& \mathbf{J_A}(\mathbf{q})(\mathbf{J_A}^{\dagger}(\mathbf{q})(\mathbf{v_d}(t) + \mathbf{L_1} \tanh(\mathbf{K_1}\mathbf{L_1}^{-1}\tilde{\mathbf{X}}(t))) + \dots \\ & \dots + (\mathbf{I_{8\times 8}} - \mathbf{J_A^{\dagger}}(\mathbf{q})\mathbf{J_A}(\mathbf{q}))\boldsymbol{\mu_m}(t))\end{aligned} \tag{5.44}$$

como,

$$\mathbf{J_A}^{\dagger}(\mathbf{q}) = \mathbf{J_A}(\mathbf{q})^{\intercal}(\mathbf{J_A}(\mathbf{q})\mathbf{J_A}(\mathbf{q})^{\intercal})^{-1}$$

entonces,

$$\mathbf{J_A}\,(\mathbf{q})\,\mathbf{J_A^{\dagger}}\,(\mathbf{q}) = \mathbf{J_A}(\mathbf{q})\mathbf{J_A}(\mathbf{q})^{\intercal}(\mathbf{J_A}(\mathbf{q})\mathbf{J_A}(\mathbf{q})^{\intercal})^{-1} = \mathbf{I} \tag{5.45}$$

y

$$\mathbf{J_A}(\mathbf{q})(\mathbf{I}_{7\times 7} - \mathbf{J_A}^{\dagger}(\mathbf{q})\mathbf{J_A}(\mathbf{q})) = \mathbf{0} \tag{5.46}$$

resulta que:

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{v_d}(t) + \mathbf{L_1} \tanh\left(\mathbf{K_a}\mathbf{L_a^{-1}}\tilde{\mathbf{X}}(t)\right) \tag{5.47}$$

Si

$$\dot{\tilde{\mathbf{X}}}(t) = \mathbf{v_d}(t) - \dot{\mathbf{X}}(t) \tag{5.48}$$

es el error de velocidad en la Ecuación (5.47), entonces la ecuación de lazo cerrado del sistema resulta ser:

$$\dot{\tilde{\mathbf{X}}}\,(t) + \mathbf{L_1} \tanh\left(\mathbf{K_1}\mathbf{L_1^{-1}}\tilde{\mathbf{X}}\,(t)\right) = \mathbf{0} \tag{5.49}$$

Ahora, para ver el comportamiento del error se designa la candidata de Lyapunov,

$$V\left(\tilde{\mathbf{X}}\right) = \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{X}}^{\intercal}\tilde{\mathbf{X}} > 0 \tag{5.50}$$

con derivada temporal

$$\dot{V}\left(\tilde{\mathbf{X}}\right) = \tilde{\mathbf{X}}^{\intercal}\dot{\tilde{\mathbf{X}}} \tag{5.51}$$

Reemplazando esto en la Ecuación (5.49) se obtiene:

$$\dot{V}\left(\tilde{\mathbf{X}}\right) = -\tilde{\mathbf{X}}^{\intercal}\mathbf{L_1}\tanh\left(\mathbf{K_1}\mathbf{L_1}^{-1}\tilde{\mathbf{X}}\right) \tag{5.52}$$

Como $\mathbf{L_1}, \mathbf{K_1} \in \mathbb{R}^{5\times5}$ son matrices definidas positivas y la función y la $\tanh(\bullet)$ es una función impar, resulta que:

$$\dot{V}(\tilde{\mathbf{X}}) = -\tilde{\mathbf{X}}^{\intercal}\mathbf{L_1}\tanh\left(\mathbf{K}{-_1}\mathbf{L_1^{-1}}\tilde{\mathbf{X}}\right) < 0 \tag{5.53}$$

es definida negativa. Entonces,

$$\tilde{\mathbf{X}}(t) \to \mathbf{0} \quad \text{cuando} \quad t \to \infty$$

concluyendo que el sistema de control de la tarea primaria es asintóticamente estable, esto en el caso que:

$$\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{K}}(t) \equiv \boldsymbol{\mu}(t)$$

es decir, ignorando el efecto dinámico del manipulador aéreo.

5.4.4. Compensación Dinámica

La estructura del controlador propuesto, mostrada en la Figura 5.4, está diseñada para compensar la dinámica del robot manipulador aéreo con el fin de reducir los errores de seguimiento de velocidad y corregir las perturbaciones causadas por las condiciones ambientales y/o los efectos dinámicos del sistema. El controlador propuesto se basa en la dinámica inversa del sistema (Ecuación (2.120)) y viene dado por:

$$\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{D}}\left(t\right) = \mathbf{M}(\mathbf{q}(t))\mathbf{a}_{\boldsymbol{\mu}}\left(t\right) + \mathbf{C}\left(\mathbf{q}(t), \boldsymbol{\mu}(t)\right)\boldsymbol{\mu}(t) + \mathbf{g}\left(\mathbf{q}(t)\right) \tag{5.54}$$

donde, el vector de aceleración $\mathbf{a}_{\boldsymbol{\mu}}(t)$ está definido por:

$$\mathbf{a}_{\boldsymbol{\mu}}(t) = \left(\dot{\boldsymbol{\mu}}_{\mathbf{K}}\left(t\right) + \mathbf{L}_{\mathbf{D}}\tanh\left(\mathbf{K}_{\mathbf{D}}\mathbf{L}_{\mathbf{D}}^{-1}\tilde{\boldsymbol{\mu}}\left(t\right)\right)\right) \tag{5.55}$$

tal que, $\dot{\boldsymbol{\mu}}_{\mathbf{K}}(t) \in \mathbb{R}^7$ es la aceleración deseada que se obtiene del controlador no lineal cinemático,

$$\tilde{\boldsymbol{\mu}}(t) = \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{K}}(t) - \boldsymbol{\mu}(t) \tag{5.56}$$

es el vector de los errores de velocidad; y $\mathbf{L_D}, \mathbf{K_D} \in \mathbb{R}^{7\times 7}$ son matrices cuadradas definidas positivas que pesan los errores de velocidad.

Observación 15 *El controlador implementado tiene la misma estructura que se diseña en el Capítulo 4 con la diferencia que se trabaja en tiempo continuo.*

5.4.4.1. Estabilidad del Control de Compensación Dinámica

Ahora se analiza la estabilidad del controlador de compensación dinámica. La ecuación de lazo cerrado se obtiene igualando el modelo dinámico del robot (Ecuación (2.120)) y el controlador propuesto (Ecuación (5.54)). Entonces, suponiendo la ausencia de errores de modelización, se deduce que:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}(t))\,\mathbf{a}_{\boldsymbol{\mu}}(t) = \mathbf{M}(\mathbf{q}(t))\,\dot{\boldsymbol{\mu}}(t) \tag{5.57}$$

Como $\mathbf{M}(\mathbf{q}(t))$ es una matriz cuadrada que tiene inversa (Propiedad 2.5.4.7), entonces $\exists \mathbf{M}(\mathbf{q}(t))^{-1}$, por lo tanto,

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}(t))^{-1}\mathbf{M}(\mathbf{q}(t)) = \mathbf{I} \tag{5.58}$$

resultando como ecuación de lazo cerrado:

$$\dot{\boldsymbol{\mu}}(t) = \dot{\boldsymbol{\mu}}_{\mathbf{K}}(t) + \mathbf{L_D}\tanh\left(\mathbf{K_D}\mathbf{L_D}^{-1}\tilde{\boldsymbol{\mu}}(t)\right) \tag{5.59}$$

Ahora, sea

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{\mu}}}(t) = \dot{\boldsymbol{\mu}}_{\mathbf{K}}(t) - \dot{\boldsymbol{\mu}}(t)$$

el error de aceleración, la Ecuación (5.59) resulta:

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{\mu}}}(t) + \mathbf{L_D}\tanh\left(\mathbf{K_D}\mathbf{L_D}^{-1}\tilde{\boldsymbol{\mu}}(t)\right) = \mathbf{0} \tag{5.60}$$

Con el objetivo de analizar el comportamiento del error de velocidad $\tilde{\boldsymbol{\mu}}(t)$, se propone la siguiente candidata de Lyapunov:

$$V(\tilde{\mu}) = \frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{\mu}}^{\intercal}\tilde{\boldsymbol{\mu}} > 0 \tag{5.61}$$

Derivando respecto al tiempo se obtiene que:

$$\dot{V}\left(\tilde{\boldsymbol{\mu}}\right) = \tilde{\boldsymbol{\mu}}^{\intercal}\dot{\tilde{\boldsymbol{\mu}}} \tag{5.62}$$

Luego, reemplazando la Ecuación (5.60) en la derivada de la candidata de Lyapunov resulta que:

$$\dot{V}\left(\tilde{\boldsymbol{\mu}}\right) = -\tilde{\boldsymbol{\mu}}^{\intercal}\mathbf{L_D}\tanh\left(\mathbf{K_D}\mathbf{L_D}^{-1}\tilde{\boldsymbol{\mu}}\right) \tag{5.63}$$

Entonces, como $\mathbf{L_D}, \mathbf{K_D} \in \mathbb{R}^{7\times 7}$ son matrices diagonales definidas positivas y la función $\tanh(\bullet)$ es una función impar, resulta que

$$\dot{V}\left(\tilde{\boldsymbol{\mu}}\right) < 0 \tag{5.64}$$

en otras palabras, es definida negativa. En consecuencia:

$$\tilde{\boldsymbol{\mu}}(t) \to \mathbf{0} \quad \text{cuando} \quad t \to \infty \tag{5.65}$$

lo que significa que el sistema de compensación dinámica es asintóticamente estable. En consecuencia, los errores de velocidad tienden a cero.

5.4.5. Análisis de Robustez

Ahora, en el caso de que no exista seguimiento perfecto de velocidad,

$$\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{K}}(t) \neq \boldsymbol{\mu}(t)$$

Entonces existe un vector $\boldsymbol{\delta}_{\tilde{\boldsymbol{\mu}}}(t)$ que representa las perturbaciones y/o los errores de modelización del sistema. Por lo tanto, la velocidad resultante se expresa como:

$$\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{K}}(t) = \boldsymbol{\mu}(t) + \boldsymbol{\delta}_{\tilde{\boldsymbol{\mu}}}(t) \tag{5.66}$$

Teniendo esto en cuenta y sustituyendo las acciones de control (Ecuación (5.21)) en el modelo del sistema (Ecuación (5.19)), se obtiene:

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{J_A}(\mathbf{q}(t))\left(\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{p}}(t) + \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{n}}(t) - \boldsymbol{\delta}_{\tilde{\boldsymbol{\mu}}}(t)\right) \tag{5.67}$$

Reemplazando las acciones de control del objetivo primario y del objetivo secundario, resulta:

$$\dot{\mathbf{X}}\left(t\right) = \mathbf{v_d}\left(t\right) + \mathbf{L_1}\tanh\left(\mathbf{K_1}\mathbf{L_1^{-1}}\tilde{\mathbf{X}}\left(t\right)\right) - \mathbf{J_A}\left(\mathbf{q}\right)\boldsymbol{\delta}_{\tilde{\boldsymbol{\mu}}}(t) \tag{5.68}$$

Como,

$$\dot{\tilde{\mathbf{X}}}(t) = \mathbf{v_d}(t) - \dot{\mathbf{X}}(t)$$

entonces la ecuación de lazo cerrado del sistema resulta:

$$\dot{\tilde{\mathbf{X}}}(t) + \mathbf{L_1} \tanh\left(\mathbf{K_1}\mathbf{L_1}^{-1}\tilde{\mathbf{X}}(t)\right) = \mathbf{J_A}(\mathbf{q})\,\boldsymbol{\delta}_{\tilde{\boldsymbol{\mu}}}(t) \tag{5.69}$$

Ahora, la derivada de la candidata de Lyapunov propuesta anteriormente (Ecuación (5.50)) resulta:

$$\dot{V}\left(\tilde{\mathbf{X}}\right) = -\tilde{\mathbf{X}}^{\intercal}\mathbf{L_1} \tanh\left(\mathbf{K_1}\mathbf{L_1}^{-1}\tilde{\mathbf{X}}\right) + \tilde{\mathbf{X}}^{\intercal}\mathbf{J_A}(\mathbf{q})\,\boldsymbol{\delta}_{\tilde{\boldsymbol{\mu}}}(t) \tag{5.70}$$

Para que la Ecuación (5.70) sea definida negativa, $\dot{V}\left(\tilde{\mathbf{X}}\right) < 0$, se tiene que cumplir que:

$$\mathbf{L}_1 \tanh\left(\mathbf{K}_1\mathbf{L}_1^{-1}\tilde{\mathbf{X}}\right) > \mathbf{J}_A(\mathbf{q})\,\boldsymbol{\delta}_{\tilde{\boldsymbol{\mu}}}(t) \tag{5.71}$$

Aplicando la norma a ambos lados de la ecuación se obtiene:

$$\left\|\mathbf{L_1} \tanh\left(\mathbf{K_1}\mathbf{L_1}^{-1}\tilde{\mathbf{X}}\right)\right\| > \left\|\mathbf{J_A}(\mathbf{q})\,\boldsymbol{\delta}_{\tilde{\boldsymbol{\mu}}}(t)\right\| \tag{5.72}$$

Ahora, para errores grandes la función tangente hiperbólica entra en su zona de saturación, es decir,

$$\tanh\left(\mathbf{K_1}\mathbf{L_1}^{-1}\tilde{\mathbf{X}}\right) \approx 1 \tag{5.73}$$

por tanto, la Ecuación (5.72) resulta:

$$\|\mathbf{L_1}\| > \left\|\mathbf{J_A}(\mathbf{q})\,\boldsymbol{\delta}_{\tilde{\boldsymbol{\mu}}}(t)\right\| \tag{5.74}$$

Con la expresión obtenida en la Ecuación (5.74), se establece la primera condición para la matriz de ganancia $\mathbf{L_1}$. Dado que $\mathbf{L_1}$ es una matriz definida positiva, se puede elegir de modo que cumpla con la condición obtenida en la Ecuación (5.72) y garantizar que el error disminuya.

Ahora veamos cuando los errores son pequeños, se tiene que:

$$\mathbf{L_1} \tanh\left(\mathbf{K_1}\mathbf{L_1}^{-1}\tilde{\mathbf{X}}\right) \approx \mathbf{K_1}\tilde{\mathbf{X}} \tag{5.75}$$

Reemplazando esta expresión en la Ecuación (5.72) resulta:

$$\left\|\mathbf{K_1}\tilde{\mathbf{X}}\right\| > \left\|\mathbf{J_A}(\mathbf{q})\,\boldsymbol{\delta}_{\tilde{\boldsymbol{\mu}}}(t)\right\| \tag{5.76}$$

Considerando el autovalor mínimo de la matriz de ganancia denotado como:

$$\lambda_{\text{mín}}\left(\mathbf{K_1}\right) \tag{5.77}$$

se cumple que:

$$\left\|\mathbf{K}_1\tilde{\mathbf{X}}\right\| > \lambda_{\text{mín}}(\mathbf{K}_1)\left\|\tilde{\mathbf{X}}\right\| > \|\mathbf{J_A}(\mathbf{q})\,\boldsymbol{\delta}_{\tilde{\boldsymbol{\mu}}}(t)\| \tag{5.78}$$

Despejando el error de control $\tilde{\mathbf{X}}(t)$, se obtiene la siguiente desigualdad:

$$\left\|\tilde{\mathbf{X}}\right\| > \frac{\|\mathbf{J_A}\left(\mathbf{q}\right)\boldsymbol{\delta}_{\tilde{\boldsymbol{\mu}}}(t)\|}{\lambda_{\text{mín}}\left(\mathbf{K_1}\right)} \tag{5.79}$$

Como la Ecuación (5.79) es la condición para que el error $\tilde{\mathbf{X}}$ disminuya, resulta que el error queda acotado por:

$$\left\|\tilde{\mathbf{X}}\right\| \leq \frac{\|\mathbf{J_A}\left(\mathbf{q}\right)\boldsymbol{\delta}_{\tilde{\boldsymbol{\mu}}}(t)\|}{\sigma\lambda_{\text{mín}}\left(\mathbf{K_1}\right)} \tag{5.80}$$

Con $0 < \sigma < 1$ y normalmente σ cerca de 1. Sea,

$$k_{_{JA}} = \sqrt{\lambda_{\text{máx}}\left(\mathbf{J_A^T J_A}\right)} = \sigma_{\text{máx}}\left(\mathbf{J_A}\right) \tag{5.81}$$

el máximo valor singular de $\mathbf{J_A}(\mathbf{q})$, $\|\boldsymbol{\delta}_{\tilde{\boldsymbol{\mu}}}(t)\| \leq k_\delta$ la cota del vector delta (Ecuación (2.126)) y $k_{_{K1}} = \lambda_{\text{mín}}\left(\mathbf{K_1}\right)$ el valor mínimo del autovalor de la matriz de ganancia $\mathbf{K_1}$. Entonces, la cota del error puede expresarse como:

$$\left\|\tilde{\mathbf{X}}\right\| \leq \frac{\lambda_{_{JA}} k_\delta}{\sigma k_{_{K1}}} \tag{5.82}$$

Con $k_\delta \in \mathbb{R}^+$ como constante positiva, y la condición que $\boldsymbol{\delta}_{\tilde{\boldsymbol{\mu}}}(t)$ esté acotada. En conclusión, el controlador propuesto cuando no existe seguimiento perfecto de velocidad permanece estable con errores acotados.

5.5. Resultados Experimentales

Con el objetivo de validar el controlador propuesto se realiza pruebas mediante simulación y pruebas reales. El robot utilizado para los experimentos se presenta

en el Apéndice A. El método de agarre empleado en los experimentos utiliza un electroimán en el extremo operativo. Este se activa cuando el extremo operativo alcanza la formación relativa deseada con el objetivo. La confirmación de la captura se realiza mediante la estimación del tamaño (radio) del objetivo en la imagen, lo que permite verificar que el objeto está adherido correctamente al electroimán. El objetivo está ubicado sobre un robot móvil de tipo diferencial, esto permite emular la postura y movimiento del objetivo sobre el suelo. En la Figura 5.9 se muestra imágenes del sistema utilizado para los experimentos. Además, los experimentos fueron realizados sobre un suelo no liso como se puede ver, por lo que esto genera perturbaciones al sistema con los movimientos no continuos del objetivo. Las condiciones ambientales (velocidad de viento) donde se realizaron las pruebas experimentales pueden verse en [186] y en una región con una altitud de 2597 metros sobre el nivel del mar.

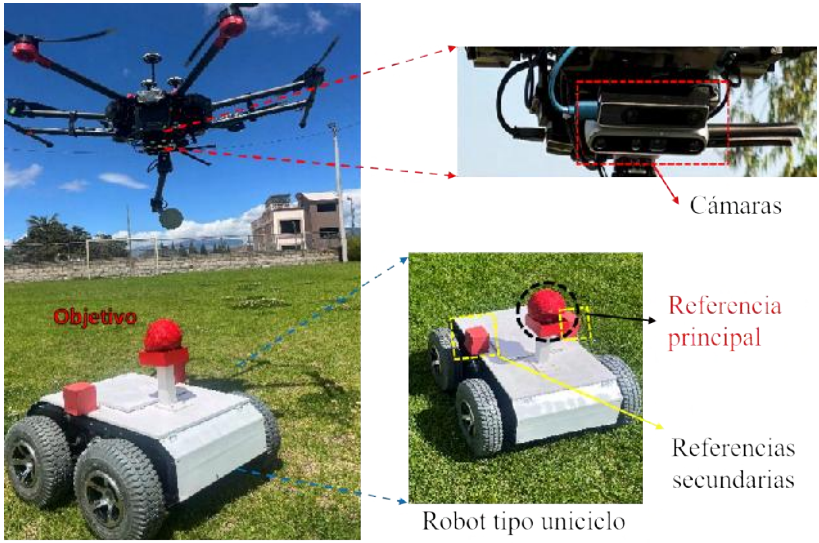


Figura 5.9: Sistemas robóticos empleados para los experimentos.

5.5.1. Orientación del Objetivo

Con el propósito de determinar la orientación del objetivo se coloca dos puntos de referencia (Secondary Features) que el robot aéreo identifica y utiliza cálculos geométricos para determinar la orientación con respecto al UAV. La orientación del objetivo permite determinar al robot por donde debe realizar la tarea de acercamiento (T2). En la Figura 5.10 se presenta como se colocan estas referencias (Features) para determinar la orientación del objetivo en tierra.



Figura 5.10: Estrategia para determinar la orientación del objetivo en tierra.

Ahora, sea

$$\mathbf{p_{t_{ref}}} = \frac{\mathbf{p_{t1}} + \mathbf{p_{t2}}}{2} = \begin{bmatrix} u_{t_{ref}} \\ v_{t_{ref}} \end{bmatrix} \tag{5.83}$$

el punto medio entre los puntos de referencia en el robot móvil en tierra en el plano cámara y

$$\mathbf{p_t} = \begin{bmatrix} u_t \\ v_t \end{bmatrix} \tag{5.84}$$

las coordenadas del objetivo en el plano imagen medidos en pixeles. Entonces la orientación del objetivo está dada por:

$$t_\theta = \arctan\left(\frac{v_t - v_{t_{ref}}}{u_t - u_{t_{ref}}}\right) \tag{5.85}$$

Para la validación del esquema de control propuesto en este capítulo se plantea cuatro experimentos: i) **Simulación para ajuste de parámetros**, ii) **Experimento con objetivo estático**, iii) **Experimento con objetivo en movimiento lineal**; y iv) **Experimento con objetivo en movimiento no lineal**.

5.5.2. Simulación y Ajuste de Parámetros

En primer lugar, con el fin de validar y ajustar los parámetros del controlador, se realiza una simulación que contempla todas las etapas involucradas en el proceso de agarre aéreo. Para ello, se define un camino de referencia que debe seguir el manipulador aéreo con el objetivo de localizar, capturar y transportar un objeto en movimiento. Dicho objetivo se desplaza a lo largo de una trayectoria predefinida sobre el plano terrestre.

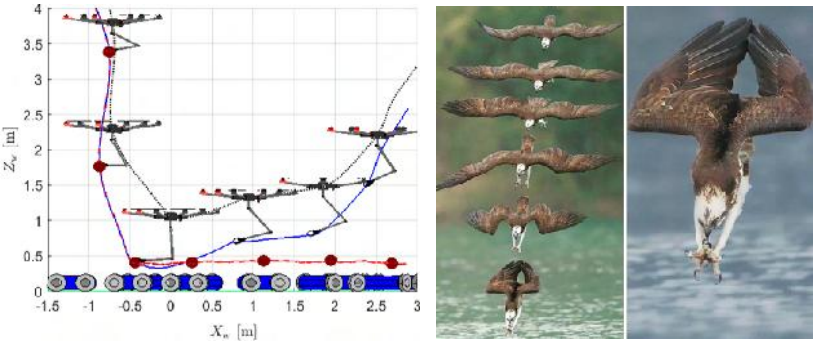
La Tabla 5.1 presenta los parámetros empleados en el esquema de control propuesto, incluyendo aquellos requeridos para cada fase del proceso de agarre aéreo. Las ganancias descritas son aptas para la experimentación por simulación y para las pruebas experimentales reales.

Tabla 5.1
Parámetros del controlador bioinspirado.

Parámetro	**Valor**
Camino deseado $\mathcal{P}(s)$ y orientación deseada para el extremo operativo durante las tareas T1 y T4.	$p_x(s) = 4\sin(4s) + 1$ [m] $p_y(s) = 6.5\cos(2s) + 2$ [m] $p_d(s) = 1.5\sin(6s) + 4$ [m] $o_d(s) = \arctan\left(\frac{dp_{yd}}{ds}/\frac{dp_{yd}}{ds}\right)$ [rad] $v_{od} =$ Ec.(3.26)
Rapidez deseada	T1: $\|\mathbf{v_{pd}}\| = 0.8$ T4: $\|\mathbf{v_{pd}}\| = 1$ [m/s]
Ganancias del controlador $\boldsymbol{\mu}_K$ en T1 y T4	$\mathbf{L_1} = diag([0.7, 0.7, 0.6, 0.75, 0.5])$ $\mathbf{K_1} = diag([1.2, 1.2, 1, 1.5, 1])$
Ganancias del controlador $\boldsymbol{\mu}_K$ en T2	$\mathbf{L_1} = diag([0.18, 0.18, 0.2, 0.25, 0.25])$ $\mathbf{K_1} = diag([0.45, 0.45, 0.4, 0.25, 0.75])$
Ganancias del controlador $\boldsymbol{\mu}_K$ en T3	$\mathbf{L_1} = diag([0.21, 0.21, 0.25, 0.25, 0.5])$ $\mathbf{K_1} = diag([0.525, 0.525, 0.8, 0.3, 0.3])$
Ganancias del controlador $\boldsymbol{\mu}_D$	$\mathbf{L_D} = diag([0.21, 0.21, 0.25, 0.25, 0.5])$ $\mathbf{K_D} = diag([0.525, 0.525, 0.8, 0.3, 0.3])$

La simulación del proceso completo se ejecuta en un intervalo de 1.5 minutos. En [187] se puede ver el video de recreado en MATLAB que muestra el comportamiento del manipulador aéreo durante la simulación. La Figura 5.11 ilustra el movimiento estroboscópico del manipulador aéreo a lo largo de la simulación, permitiendo visualizar de forma secuencial las distintas etapas del agarre aéreo.

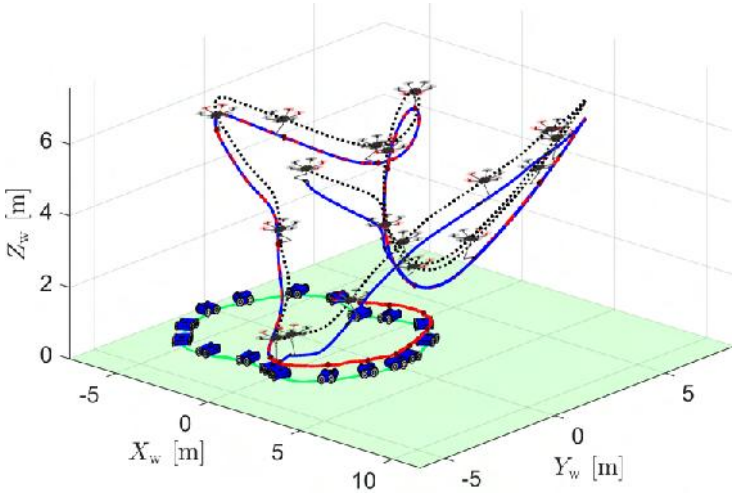
La Figura 5.12 presenta una comparación entre el agarre aéreo realizado por el robot y el comportamiento de un ave durante la captura de su presa. Se observa que la estrategia propuesta de agarre aéreo mediante un manipulador aéreo (Figura 5.12a) guarda similitud con la maniobra ejecutada por un ave durante la caza (Figura 5.12b) Por lo tanto, el esquema desarrollado, inspirado en principios biológicos, permite emular de forma efectiva el proceso natural de captura de objetivos con un robot manipulador aéreo.



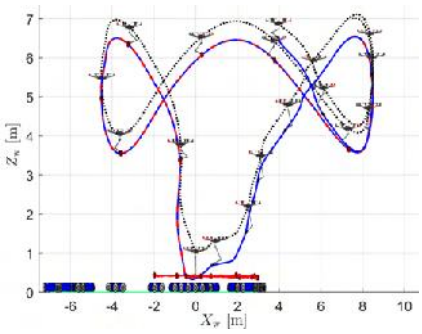
(a) Agarre bioinspirado. **(b)** Agarre aéreo de aves.

Figura 5.12: Etapa T2 y T3 del agarre aéreo.

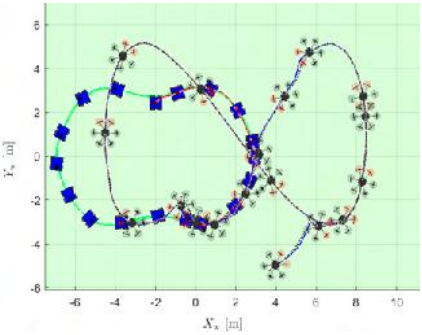
La evolución de los errores de posición del extremo operativo durante el experimento simulado se observa en la Figura 5.13. Mientras que en la Figura 5.14a se presenta el módulo del error de posición. Se observa cómo las referencias asignadas varían en función de cada una de las etapas definidas para la ejecución de la tarea completa. De igual forma, se observa cómo el error tiende a cero antes de iniciar la transición hacia la siguiente fase, lo cual demuestra que el controlador propuesto permite cumplir satisfactoriamente con los objetivos de cada etapa del proceso. De forma similar ocurre con el comportamiento de la orientación del extremo operativo que se muestra en la Figura 5.14b.



(a) Movimiento realizado en el espacio-XYZ.



(b) Movimiento en el plano-XZ.



(c) Movimiento en el plano-XY.

Figura 5.11: Movimiento estroboscópico recreado con datos obtenidos del experimento simulado del agarre aéreo con el objetivo en movimiento.

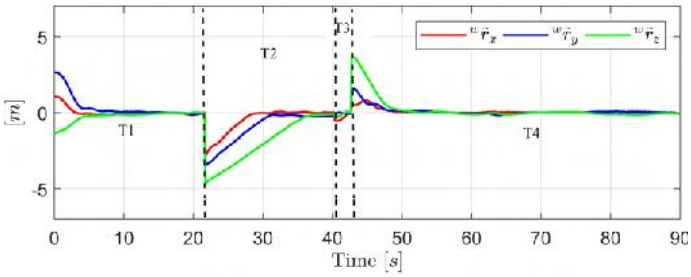
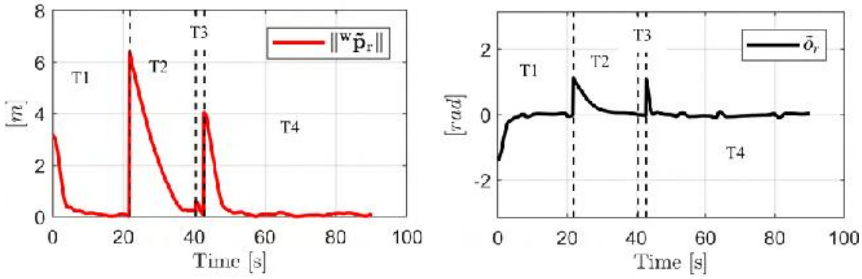


Figura 5.13: Evolución de los errores de posición del extremo operativo.



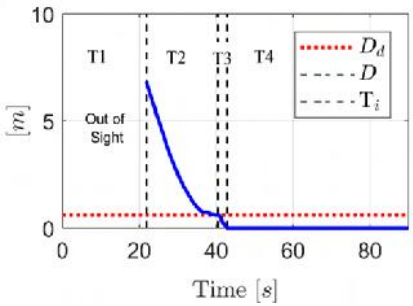
(a) Módulo del error de posición $\|^{\mathbf{w}}\mathbf{p_r}\|$. **(b)** Error de orientación $\tilde{o}_r$.

Figura 5.14: Comportamiento de los errores de control.

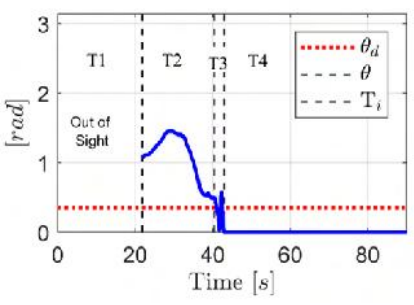
Para la etapa (T2), tal como se describe en la propuesta, se define una estrategia de alineamiento del extremo operativo con respecto al objetivo (Sección 5.4.2.2). En consecuencia, el experimento establece como referencia para esta etapa una distancia deseada y un ángulo de elevación que garanticen una aproximación adecuada del manipulador al objetivo:

$$D_d = 0{,}6 \text{ [m]} \quad \theta_d = \tfrac{\pi}{9} \text{ [rad]}$$

Consecuentemente, para la transición a la etapa de agarre (T3), el extremo operativo debe cumplir con la formación deseada respecto al objetivo. Este cumplimiento se puede evidenciar en la Figura 5.15, donde se muestra el comportamiento de la distancia entre el extremo operativo (D) y el objetivo, así como la evolución del ángulo de elevación (θ) durante la etapa de acercamiento.



(a) Evolución de la distancia D.



(b) Evolución del angulo θ.

Figura 5.15: Comportamiento de los parámetros de la formación deseada del extremo operativo respecto al objetivo.

Las velocidades estimadas del objetivo (${}^{\mathbf{w}}\hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{t}}$) se presentan en la Figura 5.16. La estimación de la velocidad se inicia una vez que el robot detecta al objetivo. Durante las etapas T2 y T3, la velocidad estimada corresponde al desplazamiento del objetivo sobre el terreno. En la etapa T4, en cambio, la velocidad estimada refleja el movimiento del objetivo durante el transporte, el cual se realiza de forma conjunta con el extremo operativo. Así, en esta última etapa, la velocidad del objetivo coincide con la velocidad del extremo operativo.

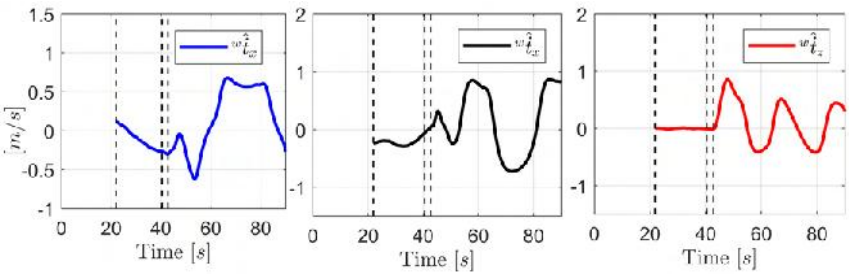


Figura 5.16: Velocidades estimadas del objetivo.

Finalmente, en la Figura 5.17 se aprecia el comportamiento del objetivo en el plano imagen, es decir, tal como es visualizado por la cámara durante el experimento. Se muestra la evolución tanto del extremo operativo como del objetivo durante

las etapas T2, T3 y T4. Es evidente que, en un instante de tiempo, la posición del extremo operativo coincide con la del objetivo, lo que indica que se ha realizado la captura. A partir de ese momento, la posición del objetivo coincide con la del extremo operativo del robot, confirmando que el agarre ha sido exitoso y que el objetivo es transportado por el brazo robótico.

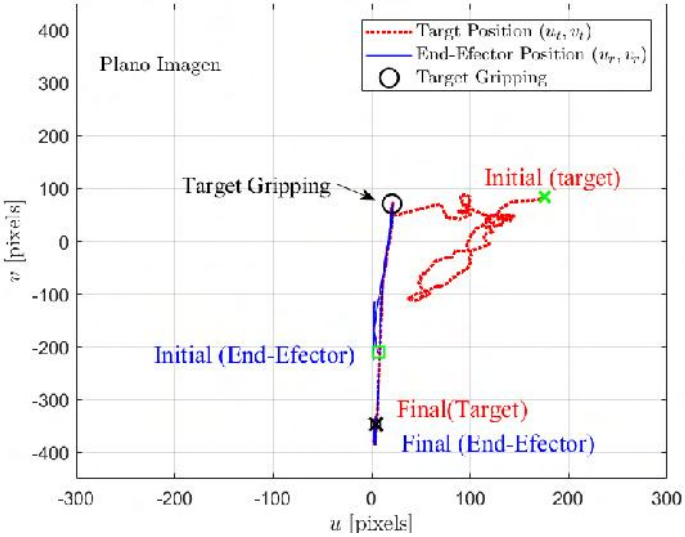


Figura 5.17: Posición del extremo operativo y del objetivo en el plano imagen.

5.5.3. Objetivo Estático

El experimento consiste en dejar el objetivo fijo en el suelo, es decir, el objetivo está ubicado sobre el robot móvil (robot azul) y con una orientación arbitraria. Por lo tanto, el manipulador aéreo debe ser capaz de determinar la orientación del objetivo y acercarse por la parte posterior para agarrarlo. En la Figura 5.18 se presenta el movimiento estroboscópico realizado por el manipulador aéreo para ejecutar el agarre. La Figura 5.18a muestra el movimiento realizado por el robot visto en el espacio-XYZ, mientras que en la Figura 5.18b se presenta la vista en el plano-XZ. Se puede observar cómo el robot parte desde una posición determinada. Es decir, una vez detectado el objetivo, comienza a posicionarse

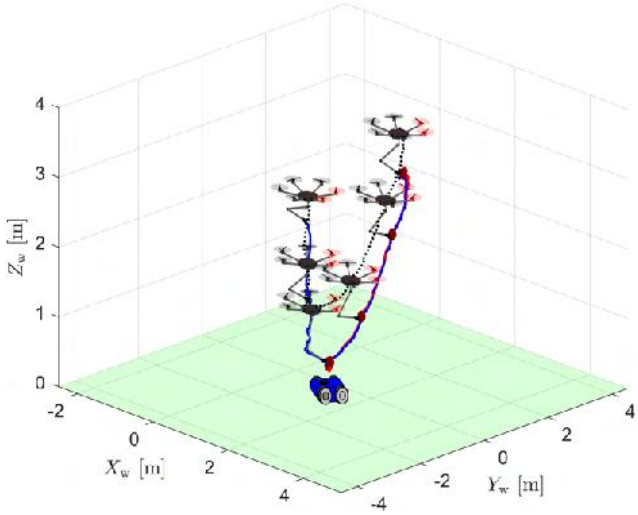
(T2) por detrás y luego procede a la etapa T3, correspondiente al agarre. Una vez que captura el objetivo, pasa a la etapa T4, en la que lo transporta hacia otro lugar. En este experimento se define una posición y orientación deseadas para la etapa T4, hacia donde el manipulador aéreo llevará el objetivo capturado. En [188] se puede ver el video del experimento, tanto el real como el reconstruido en MATLAB con los datos reales obtenidos.

La evolución de los errores de posición del extremo operativo se muestran en la Figura 5.19. Se puede observar cómo se identifica cada etapa al cambiar la referencia del controlador para cumplir con los objetivos correspondientes. Durante la etapa de acercamiento (T2), se puede ver cómo el error decrece hasta que el robot se ubica por la parte posterior del objetivo. Para la transición a la siguiente etapa y la generación de la referencia correspondiente a la etapa de agarre (T3), se considera una norma del error de $\|{}^{\mathbf{w}}\mathbf{p}_{\mathbf{r}}\| \leq 0.17$ metros. Con esto, el robot determina que está correctamente posicionado y procede a realizar el agarre del objetivo. Se puede observar cómo cambian las consignas y, de igual manera, los errores tienden a acercarse a cero hasta concretar el agarre. Por último, una vez capturado el objetivo, se procede a la etapa T4, que es llegar a una posición determinada con una orientación definida.

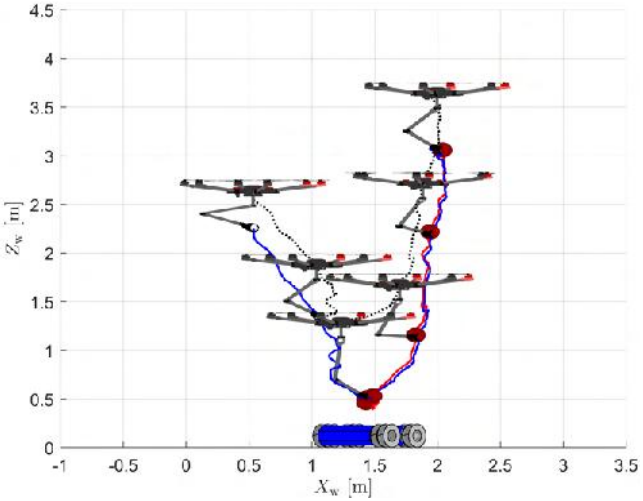
De igual manera, en la Figura 5.20 se presenta la evolución de los errores de las articulaciones del brazo robótico durante el experimento. Se puede ver cómo, en un comienzo, las articulaciones se colocan en una posición determinada. En el momento de proceder al agarre, las referencias son actualizadas de forma autónoma, y dichas referencias son determinadas por la Ecuación (5.41). Una vez cumplida la etapa de agarre (T3), se procede a cambiar las posiciones deseadas para transportar (T4) al objetivo.

El valor de la norma del error de posición del extremo operativo $\|{}^{\mathbf{w}}\mathbf{p}_{\mathbf{r}}\|$, se observa en la Figura 5.21a, mientras que el error de orientación, $\tilde{o}_r$, se muestra en la Figura 5.21b. Se puede evidenciar cómo los errores en cada etapa tienden a ser muy cercanos a cero.

En la Figura 5.22 se evidencia de mejor manera el proceso de agarre aéreo del objetivo. En la parte superior se observa los cuadros de imagen del proceso capturados desde la parte exterior del entorno de experimentación, mientras que en la parte inferior se observan los cuadros de imagen que ve el robot, mostrando la imagen RGB donde se puede ver cómo detecta al objetivo y al gripper. La detección del gripper permite tener mayor precisión respecto a la posición.



(a) Movimiento realizado en el espacio-XYZ.



(b) Movimiento realizado en el plano-XZ.

Figura 5.18: Movimiento estroboscópico recreado con datos reales obtenidos del experimento con el manipulador aéreo durante el experimento de agarre aéreo del objetivo fijo.

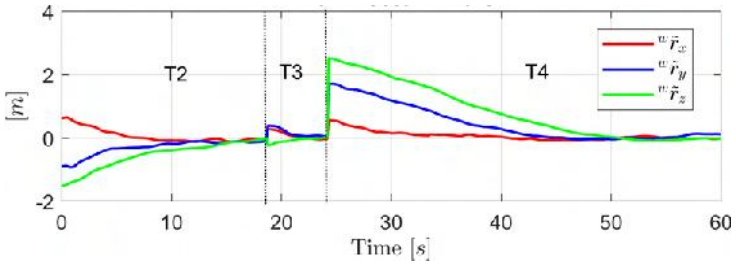


Figura 5.19: Evolución de los errores de posición del extremo operativo durante el experimento con el objetivo fijo.

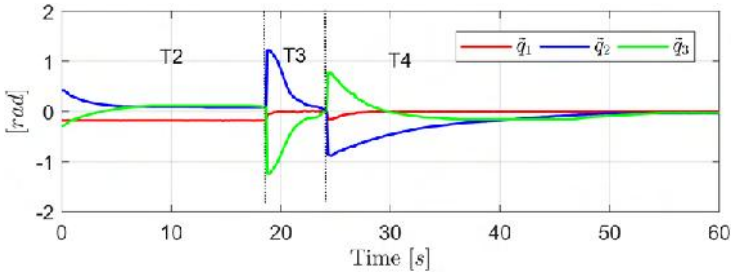
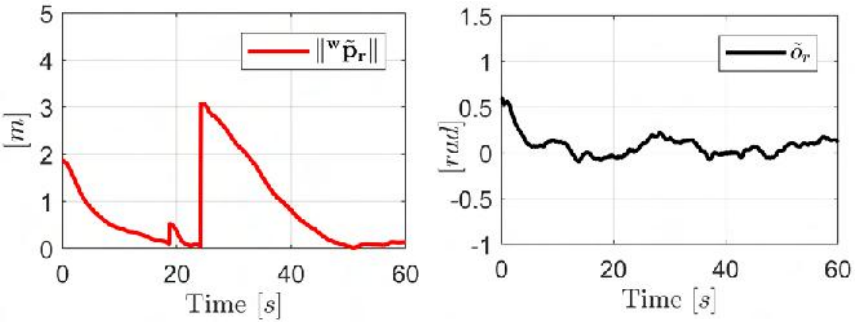


Figura 5.20: Evolución de los errores de las articulaciones del brazo robótico.



(a) Módulo del error de posición del extremo operativo $\|{}^{\mathbf{w}}\mathbf{p_r}\|$.

(b) Error de orientación del extremo operativo $\tilde{o}_r$.

Figura 5.21: Norma del error de posición y orientación del extremo operativo producidos en el experimento del agarre aéreo de un objetivo estático.

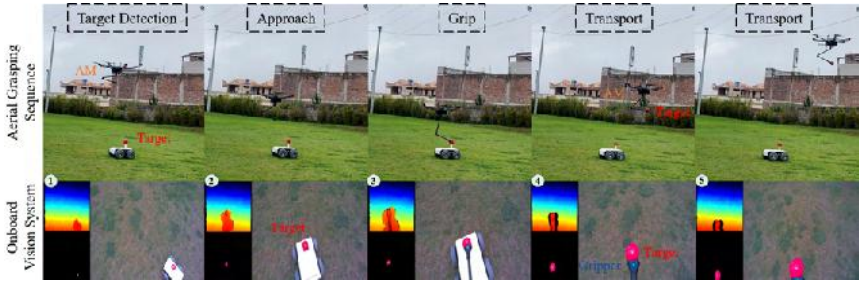


Figura 5.22: Etapas del experimento realizando para el agarre aéreo del objetivo estático.

Finalmente, la Figura 5.23 muestra la evolución del objetivo en el plano imagen y la trayectoria del extremo operativo. Se observa que el objetivo permanece dentro del campo de visión (FOV), mientras que el extremo operativo evita interferir en dicho campo.

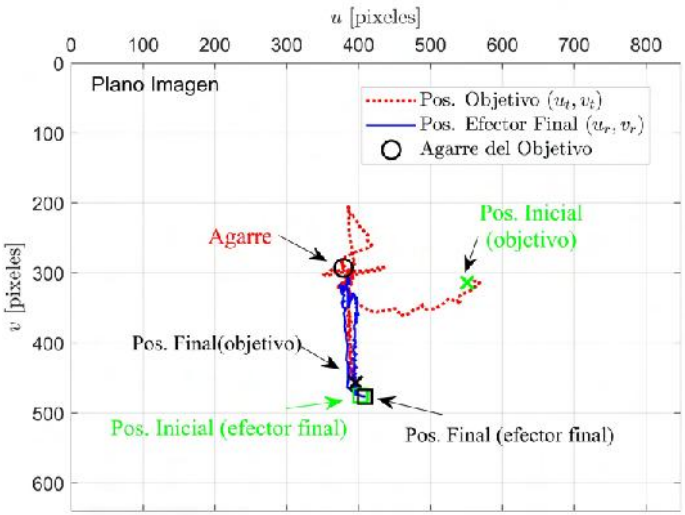


Figura 5.23: Evolución del objetivo y del extremo operativo en el plano imagen $\{\mathcal{F}_\mathrm{I}\}$ durante el experimento de agarre aéreo del objetivo estático en tierra.

5.5.4. Objetivo con Trayectoria Lineal

El experimento consiste en que el robot diferencial transporte el objetivo sobre el suelo a una velocidad constante de aproximadamente $\approx 0{,}2$ [m/s]. Por lo tanto, el manipulador aéreo debe ser capaz de determinar la orientación y velocidad del objetivo para acercarse y capturarlo. La Figura 5.24 presenta el movimiento reconstruido con los datos reales del experimento; la Figura 5.24a, el movimiento en el espacio XYZ; y la Figura 5.24b, la vista en el plano-XZ. Se aprecia cómo el robot parte de una posición inicial y, de forma autónoma, ejecuta la etapa de agarre (T3). Posteriormente, una vez capturado el objetivo, realiza la etapa T4. De forma similar al experimento anterior, se define una posición y orientación deseadas para esta última etapa. En [189] puede verse el video del experimento, el cual incluye la recreación del movimiento en MATLAB, la vista del sistema de visión del robot y una toma del entorno real de prueba.

La evolución de los errores de posición del extremo operativo se presentan en la Figura 5.25. Se observa cómo en cada etapa las referencias del controlador se modifican de acuerdo a los parámetros de cada etapa. Durante (T2) se evidencia como el error decrece hasta posicionarse cerca del objetivo. Para la (T3) se considera una norma del error de $\|{}^{\mathbf{w}}\mathbf{p}_{\mathbf{r}}\| \leq 0{,}17$ [m] y proceder agarrar el objetivo. Además, se observa cómo los errores tienen a ser cercanos a cero hasta agarrar el objetivo. Por último, una vez que el objetivo es capturado se procede a (T4) que es llevar éste a una determinada posición.

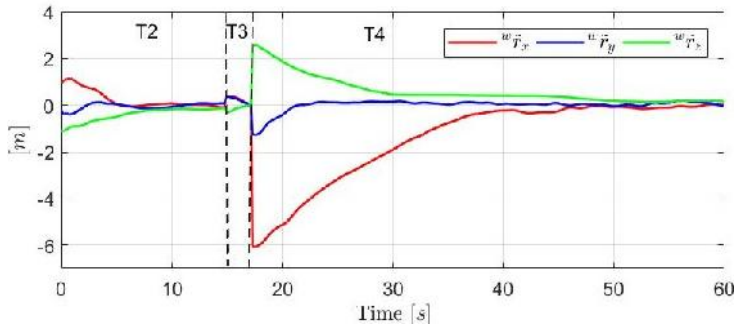
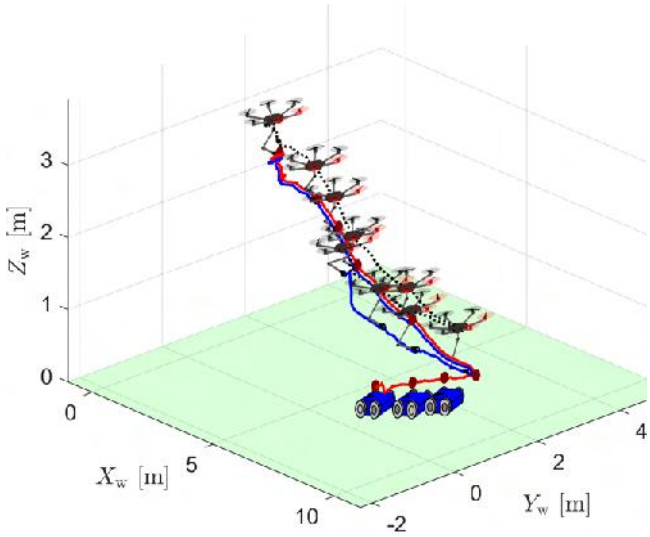
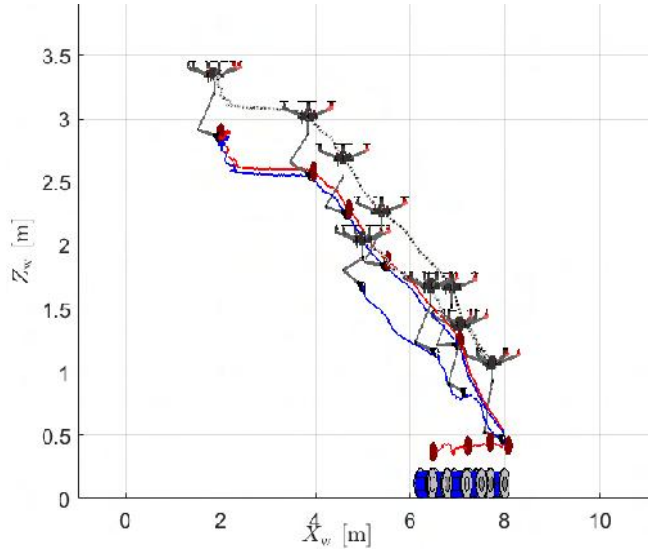


Figura 5.25: Evolución de los errores de posición del extremo operativo en el experimento de agarre aéreo del objetivo en movimiento.



(a) Movimiento realizado en el espacio-XYZ.



(b) Movimiento realizado en el plano-XZ.

Figura 5.24: Movimiento estroboscópico recreado con datos reales obtenidos del experimento con el manipulador aéreo durante el experimento de agarre aéreo con el objetivo en movimiento.

La Figura 5.26 presenta la evolución del comportamiento de los errores de las articulaciones del brazo robótico durante el experimento, se observa cómo los errores de las articulaciones tratan de mantenerse muy cercanos a cero. Sobre todo, al momento de la etapa (T3) que es la más importante para lograr capturar el objetivo mediante el movimiento del brazo robótico.

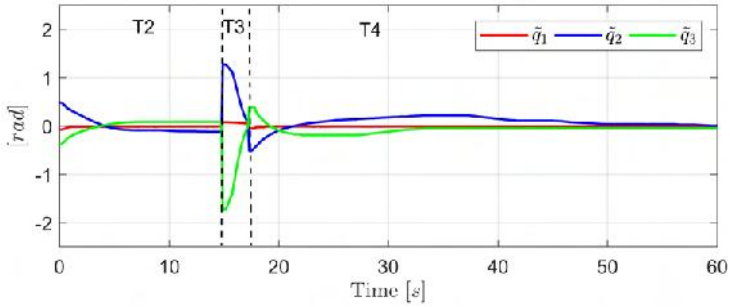
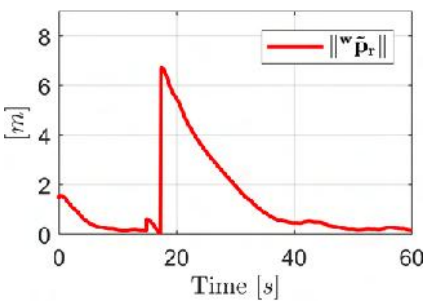
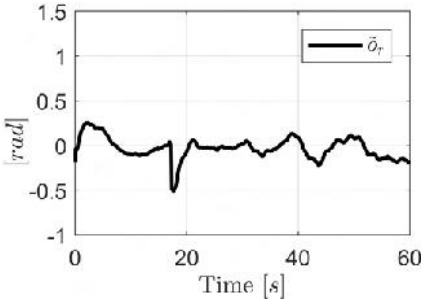


Figura 5.26: Evolución de los errores de las articulaciones del brazo robótico en el experimento de agarre aéreo del objetivo en movimiento.

La norma del error de posición del extremo operativo $\|^{\mathbf{w}}\mathbf{p_r}\|$ se muestra la Figura 5.27a, mientras que el error de orientación $\tilde{o}_r$ se presenta en la Figura 5.27b. Se puede evidenciar cómo los errores en cada etapa tienden a ser cercanos a cero.



(a) Módulo del error de posición del extremo operativo $\|^{\mathbf{w}}\mathbf{p_r}\|$.



(b) Error de orientación del extremo operativo $\tilde{o}_r$.

Figura 5.27: Errores de posición y orientación del extremo operativo producidos en el experimento realizado.

La Figura 5.28 presenta la secuencia del agarre aéreo del objetivo en movimiento. Se puede evidenciar cuando el **Manipulador Aéreo** está cerca del objetivo, el brazo robótico realiza el proceso de agarre modificando la configuración interna del brazo robótico. Se puede observar también cómo el sistema de visión del robot detecta el objetivo y los puntos de referencia (Secondary Features) que permiten determinar la orientación del objetivo en el suelo.

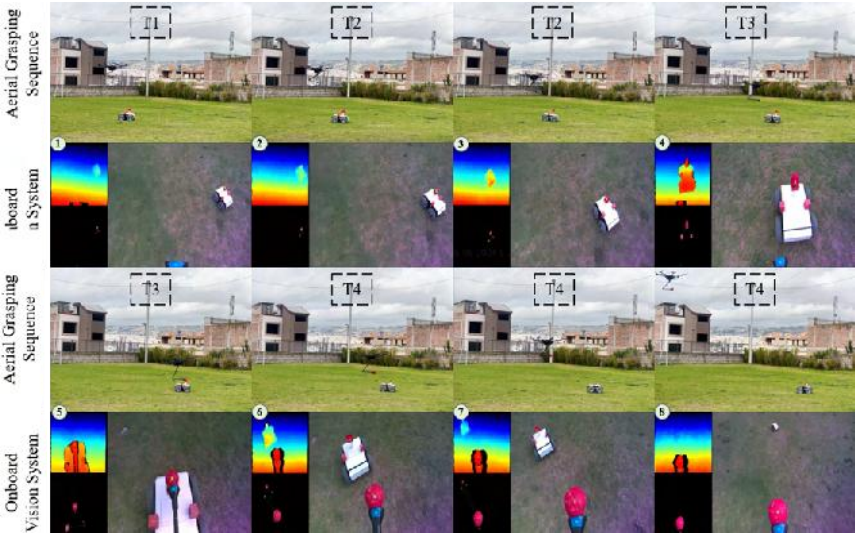


Figura 5.28: Etapas del experimento realizado del agarre aéreo del objetivo en movimiento cuadro a cuadro.

La Figura 5.29 muestra trayectoria del objetivo y del extremo operativo en el plano imagen. Se cómo el objetivo permanece dentro del campo de vista (FOV) del robot y cómo el extremo operativo también procura mantenerse al margen del plano para no interferir con dicho campo visual. Asimismo, se puede observar el momento en que el extremo operativo logra alcanzar al objetivo.

En la Figura 5.30 se ve el comportamiento del módulo de la velocidad estimada del objetivo, $\|^{w}\hat{\mathbf{v}}\mathbf{t}\|$, en movimiento, durante las etapas (T2 y T3) respecto a $\{\mathcal{F}\mathrm{w}\}$. Mientras que, para la etapa final, la velocidad del objetivo para (T4) viene a ser la rapidez de la posición del extremo operativo, dado que el objetivo está

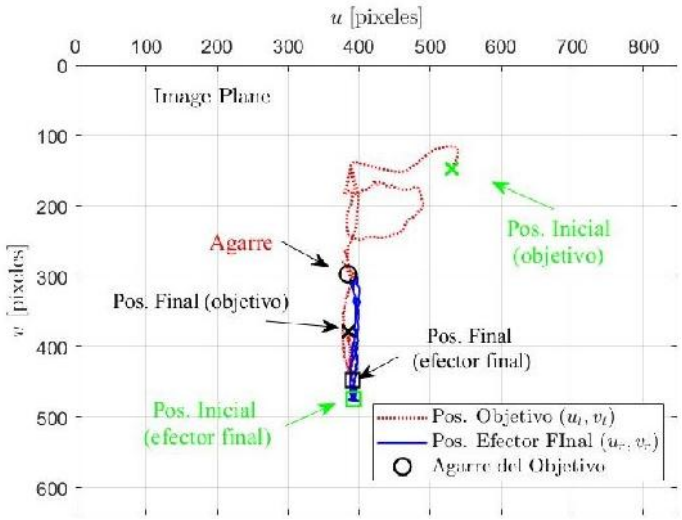


Figura 5.29: Evolución del objetivo en el plano imagen conjuntamente con la evolución del extremo operativo.

sujeto al gripper.

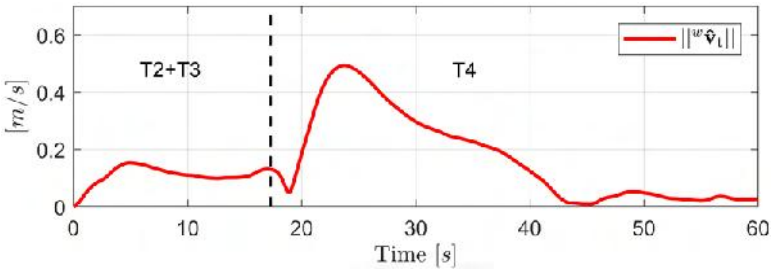


Figura 5.30: Módulo de la velocidad destinada del objetivo en movimiento respecto a al sistema de referencia fijo $\{\mathcal{F}_{\mathrm{w}}\}$.

Por último, la Figura 5.31 presenta las componentes de la velocidad estimada en XYZ, respectivamente ${}^{\mathbf{w}}\hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{t}} = \begin{bmatrix} {}^w\hat{t}_x & {}^w\hat{t}_y & {}^w\hat{t}z \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$, respecto a $\{\mathcal{F}\mathrm{w}\}$. Como

se evidencia en la figura, en las dos etapas (T2 y T3), la velocidad en Z es muy cercana a cero, ya que el objetivo se desplaza únicamente en el plano XY.

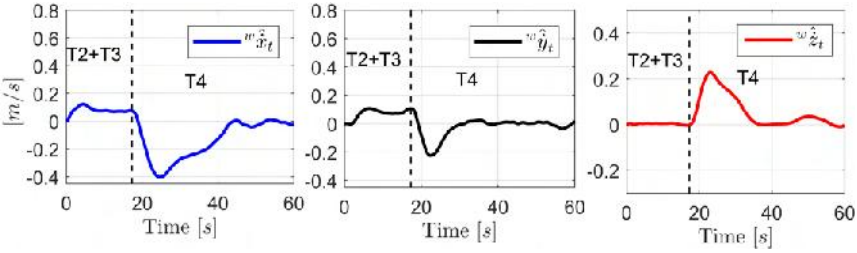


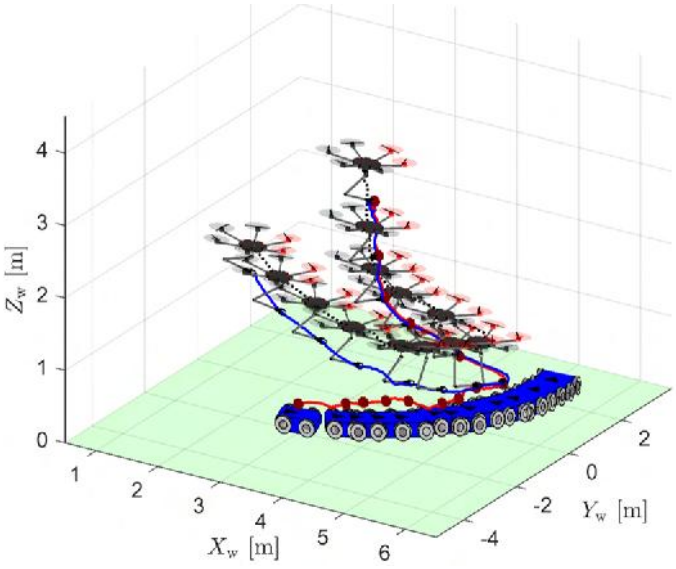
Figura 5.31: Velocidades estimadas del objetivo respecto a $\{\mathcal{F}_{\mathrm{w}}\}$.

5.5.5. Objetivo con Trayectoria Variante

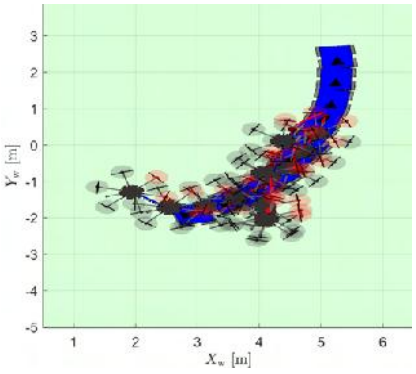
En este experimento se evalúa la capacidad del manipulador aéreo para ejecutar la maniobra de captura de un objetivo móvil que se desplaza a lo largo de una trayectoria circular sobre el suelo. La velocidad fijada para el objetivo terrestre es de aproximadamente $\approx 0{,}25$ m/s. Las condiciones de formación del extremo operativo respecto al objetivo en la etapa T2 son iguales a las del experimento anterior.

La Figura 5.32 presenta el movimiento estroboscópico realizado por el robot para agarrar el objetivo. Por su parte, las Figuras 5.32a, 5.32b y 5.32c muestran visualizaciones en el espacio tridimensional XYZ, plano-XY y en el plano-XZ, respectivamente. El video del experimento está disponible en [190]; en él se puede observar la recreación del movimiento del robot y del objetivo en MATLAB, así como la grabación capturada por el sistema de visión del robot y una vista del entorno experimental.

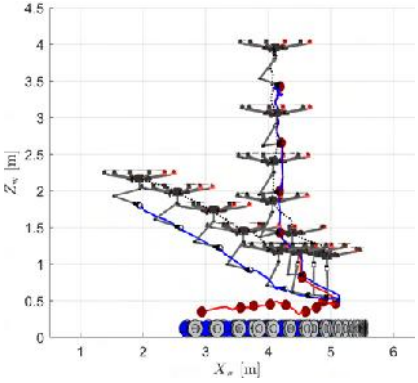
La evolución del error de posición del extremo operativo durante el experimento se muestra en la Figura 5.33. Al igual que en el experimento anterior, durante la etapa T2, en la que el robot se aproxima al objetivo, se observa una disminución progresiva del error. Este comportamiento evidencia la capacidad del sistema para realizar un seguimiento preciso del objetivo en movimiento. Los errores tienden a converger hacia cero justo antes de iniciar la etapa de agarre aéreo T3. Asimismo, se aprecia cómo el error permanece cercano a cero durante la etapa



(a) Movimiento realizado en el espacio-XYZ.



(b) Movimiento realizado en el plano-XY.



(c) Movimiento realizado en el plano-XZ.

Figura 5.32: Movimiento estroboscópico recreado con datos reales obtenidos del experimento de agarre aéreo con el objetivo en movimiento.

T4, lo que confirma que el objetivo ha sido capturado y trasladado correctamente a la posición deseada.

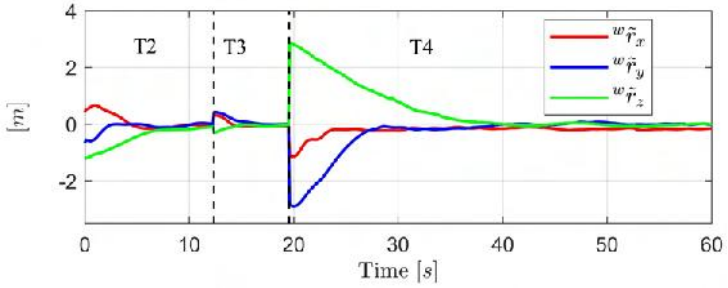


Figura 5.33: Evolución de los errores de posición del extremo operativo en el experimento de agarre aéreo del objetivo en movimiento.

De igual forma, la Figura 5.34 muestra los errores en las articulaciones del brazo robótico. A medida que el sistema se aproxima al objetivo y se prepara para el agarre, dichos errores tienden a converger a cero, lo que refleja una adecuada convergencia de las referencias internas del controlador hacia las posiciones requeridas para cumplir con cada etapa.

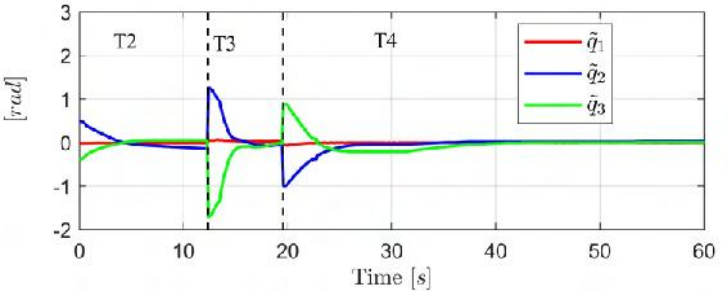
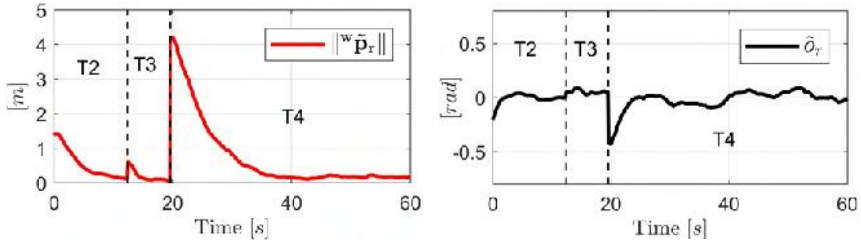


Figura 5.34: Evolución de los errores de las articulaciones del brazo robótico durante el experimento de agarre aéreo del objetivo en movimiento.

La norma del error de posición del extremo operativo, $\|^{\mathbf{w}}\mathbf{p_r}\|$, se muestra en la Figura 5.35a, mientras que el error de orientación, $\tilde{o}_r$, se presenta en la Figu-

ra 5.35b. En cada etapa, los errores tienden a converger a cero, lo que evidencia una ejecución adecuada de las tareas de seguimiento (T2), alineación (T3) y captura (T4) por parte del manipulador aéreo



(a) Error de posición $\|^{\mathbf{w}}\mathbf{p_r}\|$.

(b) Error de orientación $\tilde{o}_r$.

Figura 5.35: Errores de posición y orientación del extremo operativo.

La Figura 5.36 muestra la evolución de las trayectorias del objetivo y del extremo operativo en $\{\mathcal{F}_\mathrm{I}\}$. Se confirma que el objetivo permanece dentro del campo de visión del manipulador aéreo, mientras que el extremo operativo evita obstruirlo, interviniendo solo durante la fase de agarre (T4).

La Figura 5.37 muestra la secuencia del agarre aéreo del objetivo en movimiento. A medida que el robot se aproxima, el brazo robótico ajusta su configuración para ejecutar el agarre. Asimismo, se observa cómo el sistema de visión identifica el objetivo y los puntos de referencia empleados para estimar su orientación.

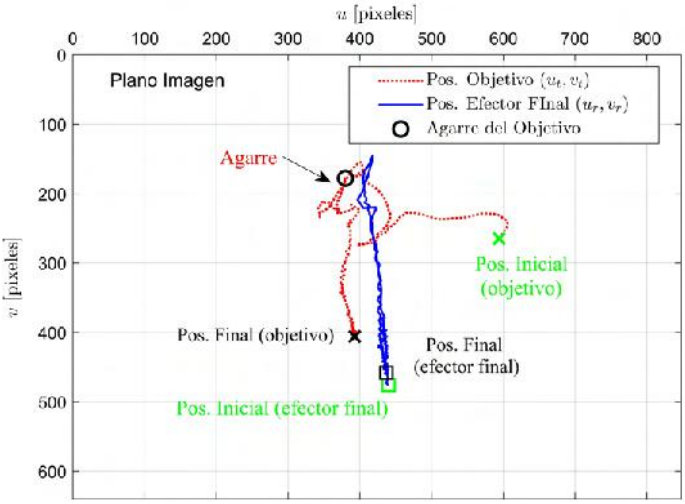


Figura 5.36: Trayectoria del objetivo y extremo operativo en $\{\mathcal{F}_\mathrm{I}\}$.

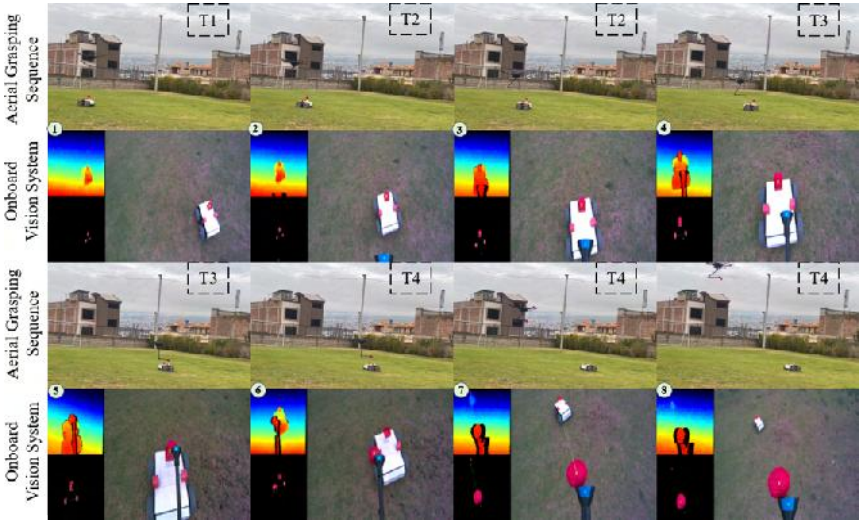


Figura 5.37: Etapas del experimento realizado del agarre aéreo del objetivo en movimiento cuadro a cuadro.

Por último, la Figura 5.38 muestra las velocidades estimadas del objetivo en $\{\mathcal{F}_{\mathrm{I}}\}$. Como puede observarse, durante las etapas T2 y T3, la componente en la dirección Z se mantiene cercana a cero, lo que concuerda con el desplazamiento del objetivo únicamente en el plano-XY.

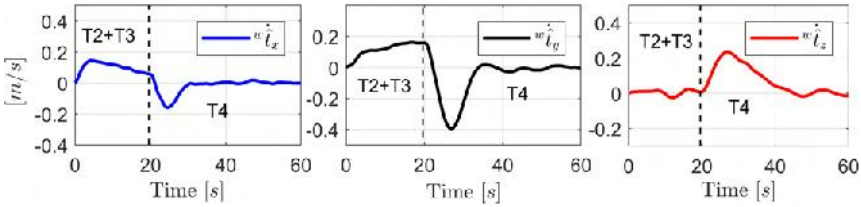


Figura 5.38: Velocidades estimadas del objetivo en $\{\mathcal{F}_{\mathrm{w}}\}$.

CAPÍTULO 6

Conclusiones

Durante el desarrollo de esta tesis se formularon modelos matemáticos y se diseñaron estructuras de control avanzadas para robots manipuladores aéreos. A lo largo del desarrollo del trabajo, se abordaron desafíos clave como la redundancia cinemática, el acoplamiento dinámico y la necesidad de lograr una coordinación precisa entre la plataforma aérea y el brazo robótico. Se propusieron esquemas de control no lineal capaces de ejecutar tareas autónomas en entornos de trabajo tanto parcialmente estructurados como no estructurados, incorporando criterios de eficiencia energética y máxima manipulabilidad.

Para cada uno de los esquemas de control propuestos se realizó un análisis formal de estabilidad. En controladores formulados en tiempo continuo, el análisis se basó en la teoría de Lyapunov, para esquemas de control discretos, la estabilidad se evaluó mediante el análisis de la evolución temporal del error. En ambos casos, se garantiza analíticamente la convergencia de los errores de control a cero. Se presentan resultados de simulaciones y pruebas experimentales realizadas con el manipulador aéreo, demostrando la funcionalidad de cada propuesta.

Las conclusiones más relevantes de este trabajo se presentan a continuación:

6.1. Conclusiones del Capítulo II

En este capítulo se formularon los modelos cinemático y dinámico de un manipulador aéreo, considerando al sistema como una estructura acoplada compuesta por un hexarrotor y un brazo robótico. El modelo cinemático directo y diferencial permite describir con precisión la relación entre las variables articulares y la posición del extremo operativo, integrando la redundancia del sistema para facilitar el cumplimiento de tareas primarias y secundarias.

Además, se propuso un modelo dinámico acoplado basado en la formulación de Euler-Lagrange, expresado en función de velocidades de referencia. Esta representación evita el uso explícito de fuerzas y torques, lo que simplifica la implementación de controladores modernos. El modelo dinámico desarrollado captura las interacciones entre la plataforma aérea y el brazo robótico, y es base para el desarrollo de los esquemas de control que se presentan en los capítulos posteriores.

6.2. Conclusiones del Capítulo III

En el capítulo se presentó un controlador de seguimiento de camino diseñado para reducir el consumo energético de un manipulador aéreo. El controlador cinemático propuesto aprovecha la redundancia del sistema del manipulador móvil aéreo, de manera que cumple con el objetivo primario, qu es seguir el camino deseado mediante el extremo operativo del robot; mientras que como objetivo secundario, adapta la configuración interna del robot en función del camino deseado a seguir. La modificación de las articulaciones del brazo robótico, donde se concentra la mayor parte del ajuste interno del sistema, permite que el hexarrotor reduzca las maniobras cuando el extremo operativo sigue el camino establecido, lo que conlleva una disminución del consumo energético de aproximadamente un 10 % en comparación con un controlador de seguimiento de camino estándar.

Las pruebas experimentales muestran que, a bajas velocidades, el manipulador

aéreo presenta errores de seguimiento reducidos, ya que los movimientos del brazo robótico son suaves y no inducen perturbaciones significativas en la dinámica del sistema. Sin embargo, a altas velocidades, los movimientos del brazo pueden generar perturbaciones en la dinámica general del sistema, afectando así el desempeño del control y provocando aumento en el error de seguimiento.

En función de las conclusiones obtenidas en este capítulo, se plantea la necesidad de desarrollar un modelo dinámico acoplado del manipulador aéreo con el fin de diseñar esquemas de control en cascada que permitan compensar las perturbaciones dinámicas del sistema. Este desarrollo da paso al siguiente objetivo de la tesis, orientado a comparar el desempeño del controlador cinemático con un esquema que incorpora compensación dinámica.

Adicionalmente, como propuesta de trabajo futuro, se plantea instrumentar los actuadores del UAV y del brazo robótico con sensores de corriente y voltaje independientes en cada actuador, con el propósito de cuantificar el consumo energético individual de cada subsistema durante la operación acoplada. Esto permitiría evaluar el impacto real de las maniobras compensatorias del UAV y del trabajo ejecutado del brazo robótico sobre la eficiencia total del sistema, así como desarrollar nuevas estrategias de control que optimicen la asignación de esfuerzo y energía entre ambos subsistemas.

6.3. Conclusiones del Capítulo IV

Se presentó un controlador unificado que resuelve, mediante métodos numéricos, los tres problemas de control de movimiento de un manipulador aéreo: control de posición, seguimiento de trayectorias y seguimiento de camino. Se demostró que, con una adecuada selección de la velocidad de referencia deseada, las tres tareas pueden ejecutarse utilizando una única ley de control no lineal, lo cual simplifica significativamente la arquitectura del sistema y mejora su flexibilidad operativa.

Este desarrollo se fundamenta en el modelo dinámico acoplado presentado en el Capítulo II, formulado en términos de velocidades de referencia en lugar de fuerzas o torques. La representación ha sido clave para el diseño de la estructura de control con compensación dinámica en cascada, la cual permite reducir los errores de control al compensar las dinámicas internas del sistema y las

perturbaciones externas que afectan su comportamiento.

El análisis de estabilidad y robustez del sistema se realizó mediante el estudio de la evolución temporal del error de control, concluyéndose que los errores de control convergen asintóticamente a cero en ausencia de incertidumbres en el modelo dinámico. En condiciones más realistas, donde se consideran errores de modelado y perturbaciones externas, se garantiza que dichos errores permanecen acotados, evidenciando la robustez de la estrategia de control propuesta.

Además, al incorporar la estructura de compensación dinámica en cascada junto con la estrategia de ahorro energético desarrollada en el Capítulo 3, se observan beneficios adicionales en el desempeño del sistema. En particular, durante las tareas de seguimiento de camino, la combinación de ambas estrategias permite no solo reducir los errores de control, sino también mejorar la eficiencia energética del manipulador aéreo. Además, al considerar la estrategia de redistribución del esfuerzo hacia el brazo robótico, y con la compensación, se evidenció un incremento de aproximadamente un 14 % en la eficiencia energética del sistema, validando experimentalmente que la incorporación del bloque de compensación dinámica no compromete el ahorro energético, sino que lo potencia.

Los resultados experimentales obtenidos demuestran el buen desempeño del controlador, validando su capacidad para mantener la estabilidad del sistema bajo diferentes escenarios reales. La efectividad observada en la ejecución de tareas de seguimiento confirma que la formulación unificada no solo es funcional, sino también eficiente en la práctica.

6.4. Conclusiones del Capítulo V

El controlador propuesto en este capítulo permitió exitosamente la ejecución de tareas de agarre aéreo sobre objetivos tanto estáticos como en movimiento. Inicialmente, se llevó a cabo una simulación completa del esquema de control, considerando las cuatro etapas del proceso de agarre aéreo (T1, T2, T3 y T4). Esta simulación fue clave para ajustar los parámetros del sistema y validar la capacidad del controlador para seguir y capturar al objetivo, manteniendo la configuración deseada en cada fase de la maniobra.

Posteriormente, se realizaron pruebas experimentales en distintos escenarios: una con el objetivo en reposo y dos con el objetivo en movimiento dentro de un

entorno no estructurado. Los resultados obtenidos validan la efectividad de la estrategia bioinspirada aplicada al control de manipuladores aéreos. El esquema de control desarrollado, que integra principios biológicos con una arquitectura de retroalimentación visual, demuestra ser una solución eficiente y confiable para mantener la visibilidad continua del objetivo, incluso bajo condiciones dinámicas. Al estar inspirado en el comportamiento de aves rapaces, el enfoque de control ofrece un rendimiento destacado en términos de coordinación, adaptabilidad y eficiencia en escenarios reales, reflejando mecanismos naturalmente eficientes de caza y captura.

La redundancia cinemática del sistema permite que el esquema propuesto cumpla simultáneamente múltiples objetivos de control, como mantener al objetivo dentro del campo de visión (FOV) del robot y ejecutar la maniobra de agarre con el brazo robótico. Esta capacidad de cumplir objetivos secundarios sin comprometer la tarea principal resalta la flexibilidad y adaptabilidad del manipulador aéreo para desenvolverse de manera eficaz en entornos complejos.

Adicionalmente, la implementación del control cinemático no lineal, combinado con una estrategia en cascada para la compensación dinámica, permite una coordinación efectiva entre el hexarrotor y el brazo robótico, garantizando estabilidad y robustez frente a perturbaciones externas como el viento.

La estabilidad y robustez del esquema de control han sido demostradas formalmente mediante la teoría de Lyapunov, concluyéndose que los errores de control permanecen finalmente acotados al considerar incertidumbres en el modelo dinámico del manipulador aéreo, así como errores en la estimación de la velocidad del objetivo. Esta validación teórica, junto con los resultados experimentales, demuestra el buen desempeño del controlador propuesto bajo condiciones reales de operación.

Cabe mencionar que, en coherencia con los capítulos anteriores, el diseño del esquema permite que el brazo robótico realice la mayor parte del esfuerzo durante la maniobra de captura. Esta estrategia de asignar mas esfuerzo hacia el brazo robótico, en lugar de forzar desplazamientos del hexarrotor contribuye directamente al ahorro de energía del sistema. Así, la estrategia propuesta no solo garantiza precisión y estabilidad, sino que también mantiene un agarre óptimo.

En conjunto, el esquema de control servo-visual propuesto representa un avance significativo en términos de autonomía, adaptabilidad y eficiencia energética para este tipo de sistemas robóticos operando en entornos reales.

6.5. Conclusión general

Esta tesis ha abordado el desarrollo de modelos y estrategias de control para manipuladores aéreos compuestos por un hexarrotor y un brazo robótico, considerando al sistema acoplado. Se formularon modelos cinemáticos directos y diferenciales, así como un modelo dinámico expresado en función de velocidades de referencia, lo que permitió simplificar el diseño e implementación de los esquemas de control.

A partir de estos modelos, se propusieron diferentes estrategias de control no lineal para tareas de seguimiento de camino, trayectoria y posición, incorporando criterios de eficiencia energética, robustez y estabilidad. Se introdujeron esquemas con compensación dinámica en cascada, así como estrategias bioinspiradas con retroalimentación visual activa, validadas mediante simulaciones y experimentos en entornos no estructurados.

Los resultados obtenidos confirman la eficacia de los controladores propuestos para ejecutar tareas complejas de forma precisa y estable, reduciendo errores y optimizando el consumo energético. Asimismo, se demostró que la redundancia del sistema permite cumplir múltiples objetivos simultáneamente, como mantener el objetivo dentro del campo de visión y realizar tareas de manipulación.

Trabajos futuros. Como proyección del trabajo desarrollado en esta tesis, se identifican varias líneas de investigación relevantes. En primer lugar, se considera la implementación del esquema de compensación dinámica adaptable que permita ajustar los parámetros del modelo en tiempo real, especialmente cuando el MA transporta cargas que modifican las propiedades dinámicas del sistema. Adicionalmente, se plantea el estudio de arquitecturas de teleoperación que incorporen retardos en el canal de comunicación, orientadas a tareas remotas de inspección, manipulación y transporte seguro de cargas.

Finalmente, dado el avance teórico y experimental logrado, se prevé la aplicación de los algoritmos propuestos en escenarios prácticos de mayor escala, incluyendo tareas de mantenimiento, supervisión, seguridad y defensa, donde los manipuladores aéreos representan una herramienta de alta relevancia. Estas líneas permitirán consolidar y expandir el impacto del trabajo presentado en esta tesis.

Apéndices

APÉNDICE A

Robot Manipulador Aéreo

A.1. Introducción

Con el propósito de evaluar de forma experimental los esquemas de control propuestos a lo largo de este trabajo, se ha llevado a cabo el diseño, construcción e implementación de un **Robot Manipulador Aéreo**. La necesidad de contar con una plataforma física surge de la naturaleza aplicada del estudio, el cual se centra en el desarrollo, análisis y evaluación de algoritmos avanzados de control para robots aéreos. La validación experimental representa un componente fundamental de esta investigación, ya que permite no solo demostrar la viabilidad de las metodologías propuestas en condiciones reales, sino también identificar posibles limitaciones prácticas asociadas al modelo teórico. El robot construido ha sido desarrollado con un enfoque modular y flexible, lo que permite la integración de sensores, actuadores y sistemas de procesamiento embebido, lo que permite realizar el control autónomo y semi-autónomo del robot. La Figura A.1 presenta el esquema del hardware del robot manipulador aéreo.

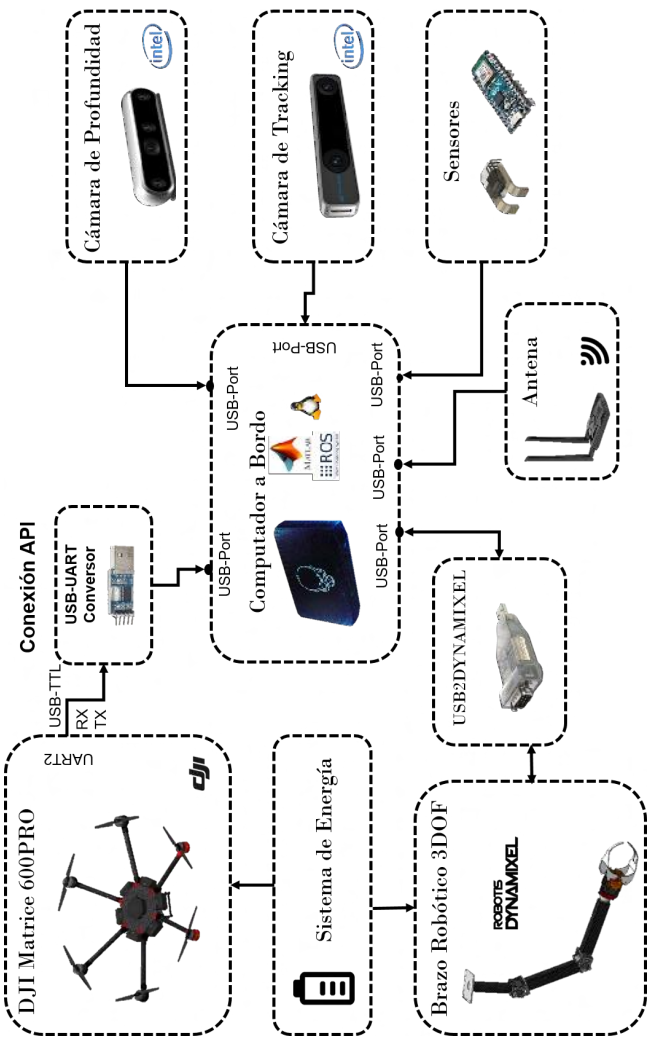


Figura A.1: Esquema del hardware del robot manipulador aéreo.

El robot manipulador aéreo cuenta con una plataforma aérea de tipo hexarrotor, sistema de energía para alimentar a los dispositivos electrónicos, múltiples cámaras, sensores y sobre todo un computador a bordo. En los siguientes apartados de se detalla el **Hardware** y **Software** del robot.

A.2. Hardware

A.2.1. Plataforma Aérea

La plataforma aérea es un hexarrotor Matrice 600Pro de la marca DJI. En la Tabla A.1 se presenta las características que posee este tipo de plataforma.

Tabla A.1
Características de la plataforma aérea Matrice 600Pro

Característica	**Descripción**
Peso máximo	15 kg
Payload	6 kg
Dimensión	$1669 \times 1518 \times 727$ mm
Material	Fibra de carbono
Velocidad máxima sin presencia de vuelo	65 km/h
Velocidad máxima de ascenso	$\sim$ 5 m/s
Velocidad máxima de descenso	$\sim$ 3 m/s
Baterías	TBS47S y TBS48S
Tiempo de vuelo sin carga con TB47S	$\sim$ 32 min
Tiempo de vuelo con carga con TB47S	$\sim$ 6 min
Tiempo de vuelo sin carga con TB48S	$\sim$ 38 min
Tiempo de vuelo con carga con TB48S	$\sim$ 8 min
Resiste vientos de hasta	$\sim$ 8 m/s

Con la gran capacidad que tiene para carga útil, se puede instalar dispositivos en el fuselaje de la plataforma. Ademas, este modelo de UAV hexarrotor permite acceder a los datos internos, es decir, se tiene acceso a la escritura y lectura de los estados internos del robot, a través de la Interfaz de Programación de Aplicaciones (API), por lo tanto cuenta con On Board SDk ROS (Robot Operating System). Ésta funcionalidad que cuenta este hexaedro es indispensable para desarrollar la comunicación con la plataforma y permitir acceder a los datos internos del robot como a la posición y los valores de los ángulos de rolido, cabeceo y derrape. De igual forma, permite inyectar comandos que permitan realizar el movimiento en el espacio tridimensional XYZ. Por cual, se desarrolla un nodo de comunicación en (ROS) que permite enviar comandos de referencia al robot, el hexarrotor permite enviar tres velocidades lineales para el desplazamiento frontal, lateral y vertical. Además, permite inyectar velocidad de rotación para el giro de derrape la Figura presenta la plataforma aérea utilizada [191].



(a) Vista superior. **(b)** Vista frontal.

Figura A.2: Hexarrotor Matrice 600Pro utilizado como plataforma aérea para el manipulador aéreo [191].

A.2.2. Brazo Robótico de 3DOF

El brazo robótico del manipulador aéreo es de tres grados de libertad. El diseño CAD realizado en SolidWorks del brazo robótico se presenta en la Figura A.3.

El brazo robótico es construido de fibra de carbono para minimizar el peso total del sistema. Incorpora como extremo operativo un gripper que permite transpor-



Figura A.3: Modelo CAD del brazo robótico d 3DOF para el manipulador aéreo.

tar y manipular objetos. Para la construcción en en primera instancia se realiza el diseño y modelo CAD del brazo robótico, permitiendo realizar un análisis de esfuerzo para determinar las capacidades máximas y posteriormente realizar la construcción. Las articulaciones del brazo robótico están constituidas por actuadores ROBOTIC DYNAMIXEL específicamente de la serie MX-106 y MX-64 [192]. Este tipo de motores cuenta con su propia interfaz de comunicación (RS485), a través de su del modulo USB2Dynamixel [193], tienen la capacidad de proporcionar información detallada del estado de posición, velocidad angular y torque, además reciben comandos de referencia para variar la posición y la velocidad de rotación. En la Tabla A.2 se presentan las principales características del brazo robótico, incluyendo sus parámetros estructurales y cinemáticos relevantes.

A.2.3. Sistema de Energía

El sistema de potencia del Manipulador Aéreo consta de varios bloques, donde, el bloque principal es el Kit de seis baterías de LiPo de 6S tipo TB47S, este banco de baterías viene incorporo en el hexarrotor, el cual están interconectadas en serie y proporcionan un total de 55 Vcc (cincuenta y cinco voltios continuos). La salida de voltaje de este sistema de potencia cuenta con un sensor de voltaje y corriente ACS758 con su respectiva placa acondicionadora. El sensor permite medir el consumo del robot durante el tiempo de funcionamiento en las pruebas, los datos

Tabla A.2
Parámetros del brazo robótico de 3DOF

Parámetro	Valor	Descripción
l_1	0,16 [m]	Longitud del eslabón uno considerando la altura de la base h
l_2	0,45 [m]	Longitud del eslabón dos
l_3	0,47 [m]	Longitud del eslabón tres
m_1	0,294 [kg]	Masa del eslabón uno
m_2	0,104 [kg]	Masa del eslabón dos
m_3	0,1937 [kg]	Masa del eslabón tres
m_g	0,128 [kg]	Masa del gripper
q_1	$[-\pi, \pi]]$ [rad]	Rango de operación de la articulación uno
q_2	$[-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$ [rad]	Rango de operación de la articulación dos
q_3	$[-\frac{\pi}{6}, \pi]$ [rad]	Rango de operación de la articulación tres

sirven apara comparar el consumo de energía del robot en determinadas tareas autónomas que ejecuta y validar las estrategias de control que se propone en este trabajo para minimizar el consumo de energía. Después del sensor general de consumo de energía, se establece la conexión para el computador a bordo mediante un regulador de la marca DROK. Es un convertidor Buck ajustable Step Down, el voltaje que entrega para la computadora es de 19 Vcc [194]. Para alimentar al motores del brazo robótico de igual forma se ocupa otro regulador de la misma denominación para la computador, al voltaje que se ajusta es de 12vcc que alimenta a todos los servomotores y el control del gripper. Por último, se cuenta con un regulador de voltaje LM295S que reduce el voltaje del bloque de alimentación de los motores del brazo robótico a 5 Vcc para la tarjeta de adquisición de datos del robot, que permite adquirir los datos de los sensores incorporados [195].

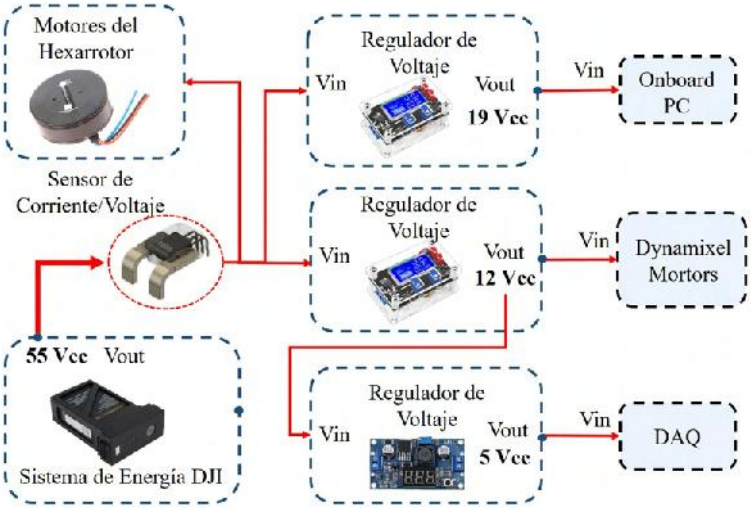


Figura A.4: Sistema de energía del robot manipulador aéreo.

Observación A.1 *Para cada experimento realizado con el robot, se registra y almacena el consumo energético correspondiente, con el objetivo de disponer de un historial detallado del desempeño energético en cada prueba. Esta información resulta fundamental para el análisis comparativo de los algoritmos de control implementados, ya que permite evaluar su eficiencia energética.*

A.2.4. Computador a Bordo

El computador a bordo, montado en el fuselaje del manipulador aéreo, corresponde a un equipo de la marca Intel, específicamente el modelo Intel® NUC 11 Enthusiast. Las características detalladas del dispositivo pueden consultarse en [196]. Este computador actúa como el cerebro principal del manipulador aéreo, siendo responsable de comandar todo el sistema. Está conectado a todos los dispositivos de entrada y salida (E/S) del robot, permitiendo la transmisión y recepción de información desde y hacia los sensores y actuadores.

El equipo cuenta con el sistema operativo Linux (Ubuntu 20.04), una plataforma de código abierto ampliamente utilizada en entornos de desarrollo y robótica debido

a su estabilidad, facilidad de uso y alta compatibilidad con software y dispositivos. Su principal ventaja radica en la compatibilidad con versiones específicas de ROS y ROS 2, diseñadas para funcionar sobre Ubuntu. El robot se basa en el entorno Robot Operating System (ROS), el cual se emplea como infraestructura para la gestión de todos los sensores, actuadores (como los motores del brazo robótico) y algoritmos de control, así como para el acceso al controlador interno del Matrice 600Pro. A través de esta integración, se utiliza el Onboard SDK de ROS, que facilita el acceso a los sistemas internos del dron. La Figura A.5 muestra el computador montado en el sistema a bordo del robot.



Figura A.5: Computador a bordo del robot manipulador aéreo.

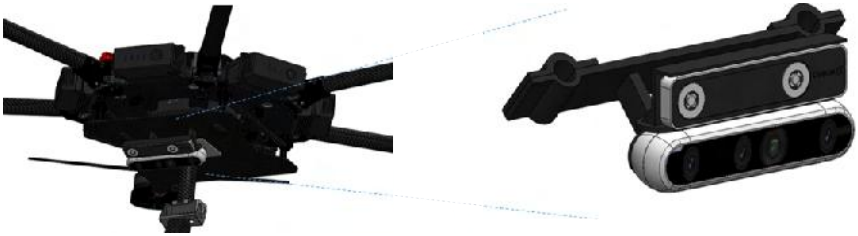
A.2.5. Sistema de Visión

El sistema de visión que incorpora el robot está conformado por dos cámaras:

1. **Cámara de profundidad Intel RealSense™ D455:** Es una cámara estéreo que incorpora tecnología de infrarrojos y obturador global. Presenta un bajo nivel de error gracias a la inclusión de dos sensores de profundidad, separados a una distancia óptima. Además, combina un sensor de profundidad con un sensor de color.

2. **Cámara de tracking Intel RealSense™ T265:** Esta cámara cuenta con un sistema de seguimiento inside-out con seis grados de libertad (6DoF). Está equipada con dos cámaras tipo ojo de pez, cada una con un campo de visión de hasta 170 grados. Integra su propia unidad de procesamiento, lo que evita un alto consumo de recursos en procesadores externos. Gracias a esta cámara, los robots pueden comprender el mundo en 3D, no solo a nivel espacial del entorno, sino también en cuanto a su propia posición y orientación.

En la Figura A.6a se presenta el diseño CAD del sistema de visión con las cámaras destinadas al robot, mientras que la Figura A.6b muestra dicho sistema ya instalado en el manipulador aéreo. Como se observa, el sistema está montado sobre el fuselaje del hexarrotor.



(a) Diseño CAD del soporte para las cámaras.



(b) Sistema de visión en el robot.

Figura A.6: Cámaras de profundidad y de tracking instaladas en el robot.

Las cámaras, acopladas de forma rígida, permiten determinar su posición y orientación con respecto a un marco de referencia estático alineado con la gravedad. Por su parte, la cámara de profundidad realiza una correspondencia estéreo para obtener una nube densa de puntos en 3D de la escena. Este flujo de datos resulta especialmente valioso para aplicaciones como el mapeo de entornos y el escaneo de objetos. En el sistema desarrollado se implementan estrategias específicas destinadas a evitar que las fluctuaciones inherentes a la detección por cámara se propaguen hacia el controlador. En primer lugar, las coordenadas de imagen extraídas del módulo de visión son filtradas mediante un suavizado temporal, lo que atenúa variaciones rápidas indeseadas y garantiza una referencia visual más estable para el lazo de control.

Finalmente, estas cámaras se emplean en múltiples aplicaciones dentro del ámbito de la robótica y cuentan con su propio Software Development Kit (SDK), el cual permite a los desarrolladores acceder libremente a los datos y crear aplicaciones personalizadas para fines específicos.

Observación A.2 *Los componentes del sistema robótico se ubican en el centro del hexarrotor. De este modo, tanto la base del brazo robótico como el computador a bordo coinciden con el centro de masa de la plataforma aérea. Esta ubicación estratégica tiene como propósito no alterar significativamente la dinámica del robot.*

A.3. Software

El software del manipulador aéreo fue desarrollado con el objetivo de proporcionar una interfaz eficiente y modular, que permita la interacción con los distintos subsistemas que conforman el robot. Su diseño se basa en una arquitectura distribuida, lo que facilita tanto la escalabilidad como el mantenimiento del sistema. La estructura general del software se presenta en la Figura A.7.

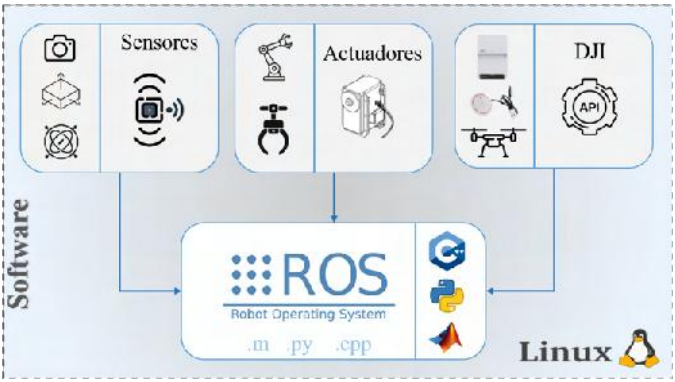


Figura A.7: Esquema de la arquitectura del software.

La interacción entre los diferentes módulos del robot es gestionada mediante ROS (Robot Operating System), lo que permite la integración con sensores, actuadores y algoritmos de control avanzados.

A.3.1. Robot Operating System (ROS)

Es un entorno de desarrollo de software libre diseñado para la programación de robots. Proporciona herramientas, bibliotecas y convenciones que facilitan la implementación de algoritmos de control, percepción, navegación y manipulación. Aunque comúnmente se le denomina sistema operativo, en realidad se trata de un middleware que permite la comunicación entre los distintos módulos que conforman un robot. La arquitectura de ROS se basa en nodos que contienen publicadores, suscriptores, servicios y acciones [197].

- **Nodo:** Es un proceso que ejecuta una tarea específica dentro del sistema robótico. Los nodos son componentes fundamentales en ROS, y se comunican entre sí mediante tópicos y servicios, lo que permite la ejecución de sistemas complejos de forma modular y distribuida.
- **Publicador:** Es un nodo que envía o genera mensajes hacia un tópico. Cumple la función de fuente de información dentro del sistema, permitiendo que otros nodos suscritos a dicho tópico reciban datos en tiempo real.
- **Subscriptor:** Es un nodo que recibe información, es decir, escucha los mensajes publicados en un tópico y ejecuta una determinada acción según el contenido del mensaje recibido. Puede recibir mensajes de uno o varios publicadores, y es capaz de procesarlos o almacenarlos en tiempo real.
- **Servicio:** Es un mecanismo de comunicación basado en una estructura cliente-servidor. A diferencia del modelo publicador-suscriptor, que es asíncrono y continuo, los servicios permiten una interacción síncrona, en la que un cliente envía una solicitud a un servidor y este responde con un resultado.

A.3.2. Arquitectura del Robot Manipulador Aéreo

El software del robot está desarrollado sobre ROS Noetic y se ejecuta en el sistema operativo Ubuntu 20.04. Su arquitectura se compone de siete módulos principales: sistema visual, sistema de información de estados, sistema de control del brazo robótico, sistema de control del Matrice 600Pro, sistema de teleoperación, sistema de control autónomo y sistema de control manual. Además, incorpora

algoritmos que permiten obtener la posición global y local del robot. Cada uno de estos subsistemas se integra de manera coordinada para garantizar tanto el funcionamiento autónomo como el teleoperado del manipulador aéreo. La Figura A.8 presenta una descripción detallada de la arquitectura implementada en el sistema desarrollado.

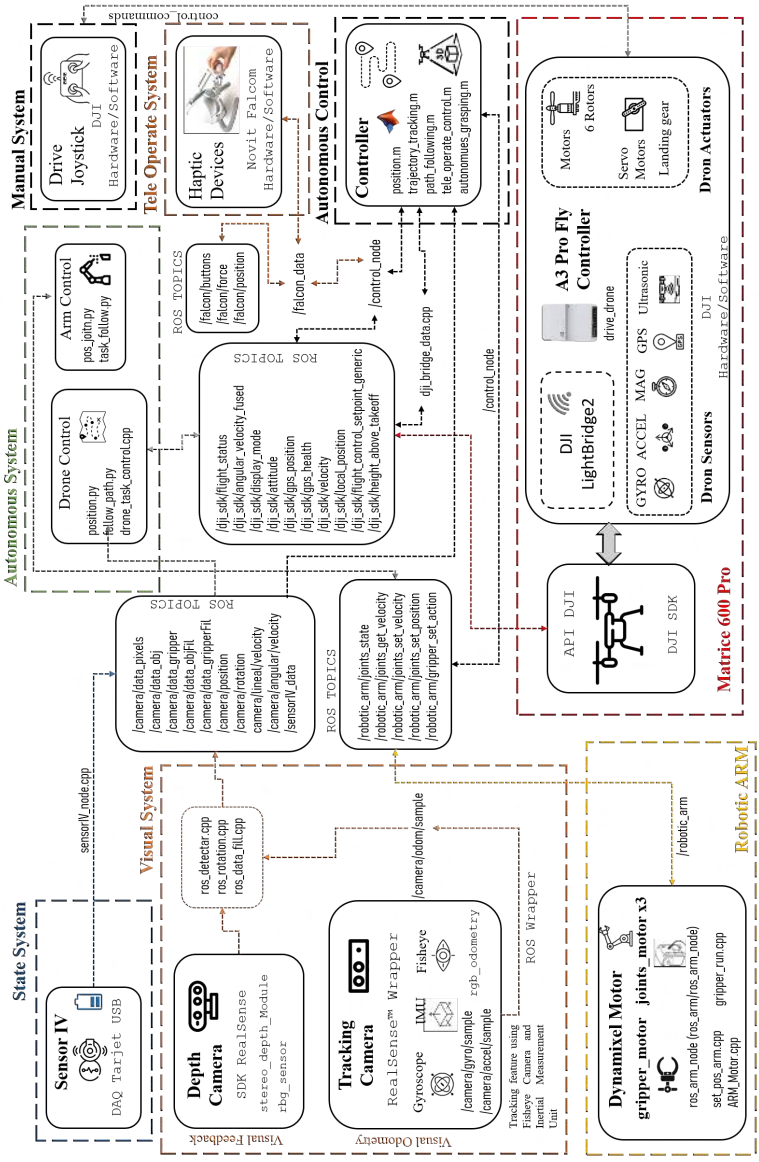


Figura A.8: Arquitectura del software ROS del robot manipulador aéreo.

A.3.2.1. Sistema Visual

El sistema visual consta de dos bloques principales. El primero está conformado por la cámara de profundidad, la cual proporciona los datos de realimentación visual en **RGB Image** y **Depth Image**. El programa principal es `ros_detectar.cpp`, el cual publica los diferentes tópicos que el robot necesita para la realimentación visual. Además, cuenta con un sistema de visión artificial para detectar objetivos de interés y el extremo operativo del robot. Estos datos se entregan en metros y píxeles, y también se generan datos filtrados para reducir el ruido en las mediciones a través del código `ros_data_fill.cpp`.

El segundo bloque del sistema de visión es el sistema de odometría visual, que está compuesto por la cámara de tracking. Para acceder a los datos de esta cámara, se emplea el ROS `Wrapper` de Intel. El tópico utilizado por este nodo es `/camera/odom/sample`, el cual proporciona información sobre la posición, orientación, velocidad lineal y velocidad angular. Estos datos son empleados para la odometría del robot. En la Tabla A.3 y en la Tabla A.4 se presenta los tópicos que se crean a partir de los nodos generados por las dos cámaras.

Tabla A.3
Tópicos generados por la cámara de Tracking.

Tópicos ROS
/camera/accel/imu_info
/camera/accel/metadata
/camera/accel/sample
/camera/gyro/imu_info
/camera/gyro/metadata
/camera/gyro/sample
/camera/odom/metadata
/camera/odom/sample
/camera/realsense2_camera_manager/bond
/camera/tracking_module/parameter_descriptions
/camera/tracking_module/parameter_updates
/diagnostics
/tf
/tf_static

Tabla A.4
Tópicos generados por la cámara de Profundidad.

Tópicos de ROS
/camera/angular/velocity
/camera/data_gripper
/camera/data_gripperFil
/camera/data_obj
/camera/data_objFil
/camera/data_pixels
/camera/image
/camera/image/compressed
/camera/image/compressed/parameter_descriptions
/camera/image/compressed/parameter_updates
/camera/image/compressedDepth
/camera/image/compressedDepth/parameter_descriptions
/camera/image/compressedDepth/parameter_updates
/camera/image/theora
/camera/image/theora/parameter_descriptions
/camera/image/theora/parameter_updates
/camera/lineal/velocity
/camera/odom/sample
/camera/position
/camera/rotation

En la Figura A.9 se muestra la comunicación entre los nodos y los tópicos activos del sistema de visión, los cuales se visualizan al ejecutar el comando `rosrun rqt_graph rqt_graph` en el computador a bordo con Ubuntu.

La implementación del sistema permite tener:

- **Flujo de video RGB:** Captura y transmite imágenes en color en tiempo real.
- **Datos de profundidad:** Proporciona información sobre la distancia de los objetos con respecto a la cámara, lo que permite generar un mapa de profundidad.
- **Mira del objetivo y extremo operativo**: Superpone referencias visuales

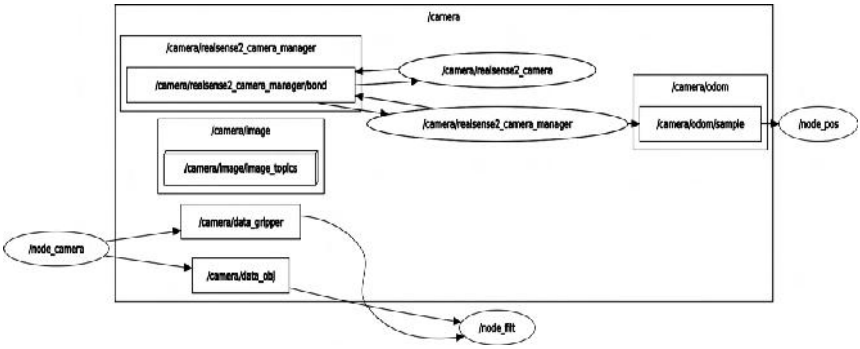


Figura A.9: Nodos y tópicos de ROS correspondientes al sistema de visión.

en la imagen para indicar la posición del objetivo y la ubicación del gripper del robot, facilitando la manipulación precisa.

Estos datos son fundamentales para la ejecución de tareas autónomas, como el seguimiento de objetivos, la estimación de poses y la planificación de trayectorias.

A.3.2.2. Estado del Sistema

En este bloque se crea un nodo el cual proporcina la medicion del voltaje y la corriente que consume el sistema a traves del programa `sensorIV_node.cpp`. Este genera el mnodo denominado `/sensor_iv_node` que publica los datos en el tópico denominado `/sensor_iv_data`.

A.3.2.3. Sistema de Control del Brazo Robótico

En este módulo de software se implementa el nodo encargado del control de los motores que componen el brazo robótico. Para ello, se utiliza el SDK de los motores Dynamixel proporcionado por [198] de ROBOTIS. El programa principal, denominado `ARM_Motor.cpp`, crea el nodo central `/robotic_arm` encargado de publicar los estados de los motores del brazo robótico y del motor de accionamiento del gripper, incluyendo parámetros como velocidades, torque, posición, temperatura, entre otros. Además, este nodo recibe comandos de velocidad para cada motor.

Los programas auxiliares, `gripper_run.cpp` y `set_pos_arm.cpp`, per-

miten controlar directamente el motor del gripper y los motores del brazo robótico, respectivamente, recibiendo como entrada el número de identificación (ID) del motor y la posición en grados. La Tabla A.5 presenta los tópicos que genera el nodo que corresponde al brazo robótico.

Tabla A.5
Tópicos relacionados con el control del brazo robótico.

Tópicos de ROS
`/robotic_arm/gripper_set_action`
`/robotic_arm/joints_get_velocity`
`/robotic_arm/joints_set_position`
`/robotic_arm/joints_set_velocity`
`/robotic_arm/joints_state`

En la Figura A.10 se ilustra la comunicación entre el nodo y los tópicos activos del brazo robótico, al ejecutar el comando `rosrun rqt_graph rqt_graph`.

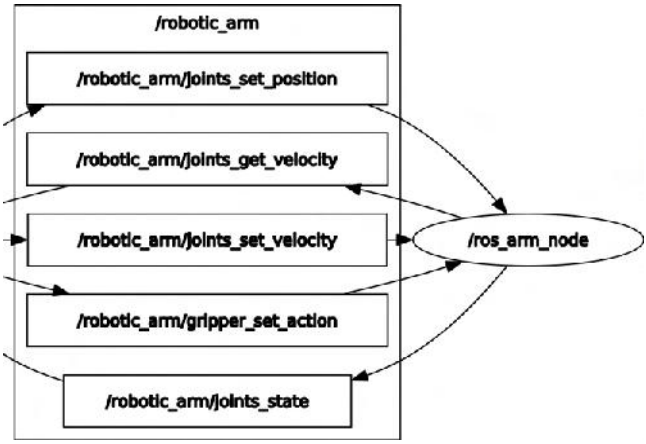


Figura A.10: Nodo y tópicos de ROS correspondientes al brazo robótico.

A.3.2.4. Sistema de Control del Matrice 600Pro

El software utilizado para comandar y acceder a todos los datos proporcionados por el Matrice 600 Pro de DJI hace uso del Onboard SDK proporcionado por el fabricante del robot [199]. El sistema del robot cuenta con un sistema de posicionamiento local y global, utilizando sensores ultrasónicos y la cinemática del robot. Para el posicionamiento global, emplea un sistema GPS. Este sistema de posicionamiento global se compensa con una configuración redundante de tres GPS, que triangulan la ubicación para obtener una mayor precisión en la posición .

Además, el robot está equipado con un sistema propio de medición inercial (IMU), conformado por tres IMUs para mejorar la precisión en la estimación de la posición, velocidad y rotación [191]. A esto se suma el magnetómetro, que proporciona una mayor precisión en la orientación del robot. La fusión de todos estos sensores también permite determinar la altitud, que es la distancia vertical entre el robot y el nivel del mar, así como la altura, que se refiere a la distancia entre el dron y el terreno desde el cual despega.

Todos estos datos están disponibles a través del SDK. Para facilitar el acceso a la información que se necesita y el envío de comandos de control, se ha desarrollado el nodo denominado `/Data_Node`, que genera el tópico `/dji_data`. Los tópicos generados para el control y acceso al Matrice 600 Pro se describen en la Tabla A.6.

La Figura A.11, se presentan los tópicos activos utilizados para la lectura de estados del hexarrotor y para realizar acciones de control a través del nodo `/control_node`, el cual se explica más adelante.

A.3.2.5. Sistema de Tele Operación

Este subsistema permite la incorporación del control semiautónomo del robot. Su función principal es generar los comandos de control para el manipulador aéreo desde una estación de control remota, ubicada en tierra. La teleoperación se lleva a cabo mediante dispositivos hápticos, específicamente el **Novint Falcon** [200], los cuales permiten al operador enviar comandos de maniobra al robot. Además, proporciona realimentación de fuerza generada en el sistema local, lo que permite al operador percibir las fuerzas resultantes del estado dinámico del robot [73].

Tabla A.6
Tópicos generados del Matrice 600Pro.

Tópicos de ROS
/dji_data
/dji_sdk/acceleration_ground_fused
/dji_sdk/angular_velocity_fused
/dji_sdk/attitude
/dji_sdk/battery_state
/dji_sdk/display_mode
/dji_sdk/flight_control_setpoint_ENUposition_yaw
/dji_sdk/flight_control_setpoint_ENUvelocity_yawrate
/dji_sdk/flight_control_setpoint_generic
/dji_sdk/flight_status
/dji_sdk/from_mobile_data
/dji_sdk/gimbal_angle
/dji_sdk/gimbal_angle_cmd
/dji_sdk/gimbal_speed_cmd
/dji_sdk/gps_health
/dji_sdk/gps_position
/dji_sdk/height_above_takeoff
/dji_sdk/imu
/dji_sdk/local_frame_ref
/dji_sdk/local_position
/dji_sdk/rc
/dji_sdk/rtk_info_position
/dji_sdk/rtk_info_yaw
/dji_sdk/rtk_position
/dji_sdk/rtk_velocity
/dji_sdk/rtk_yaw
/dji_sdk/trigger_time
/dji_sdk/velocity

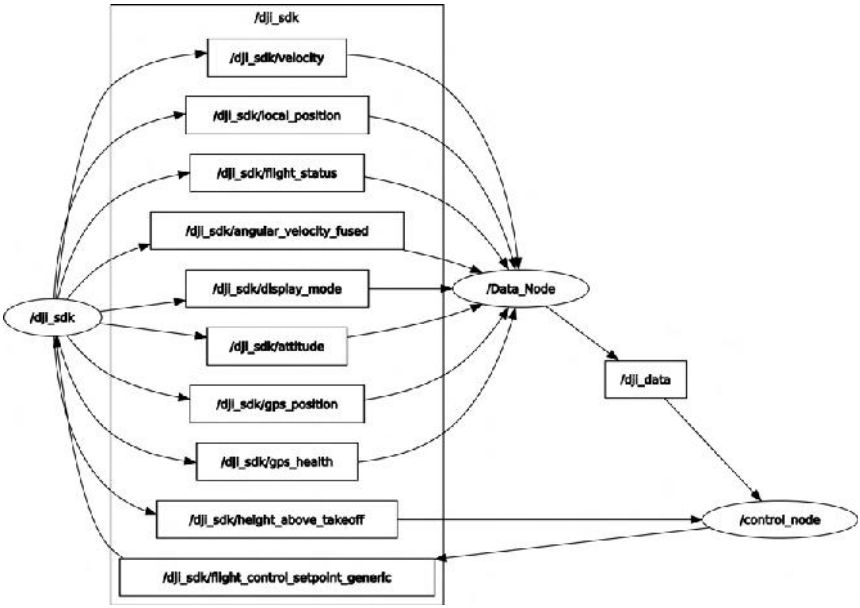


Figura A.11: Nodos y tópicos activos de ROS del Matrice 600Pro.

Para este propósito, se desarrolla el nodo `/falcon_data`, encargado de gestionar la comunicación mediante la publicación y suscripción de información en ROS. Este nodo permite la conexión de múltiples dispositivos hápticos para la teleoperación del sistema. Por cada **Novint Falcon** conectado, se generan tres tópicos específicos:

- `/falcon/buttons`: Información del estado de los botones del dispositivo.
- `/falcon/force`: Fuerza aplicada sobre el dispositivo, utilizada para la realimentación háptica.
- `/falcon/position`: Posición del manipulador háptico en el espacio de trabajo.

En la Figura A.12, se muestra la estructura del nodo `/falcon_data` junto

con sus respectivos tópicos, los cuales se comunican con el nodo de control del sistema. Es importante destacar que este nodo se implementa en el **sitio remoto**, es decir, en la estación de control en tierra. Por otro lado, el sistema local, conformado por el manipulador aéreo, es el encargado de ejecutar el ROS_MASTER, funcionando como el servidor de ROS. Este servidor permite la comunicación entre todos los nodos dentro de la red, garantizando que cualquier dispositivo conectado pueda interactuar con el sistema de control del robot.

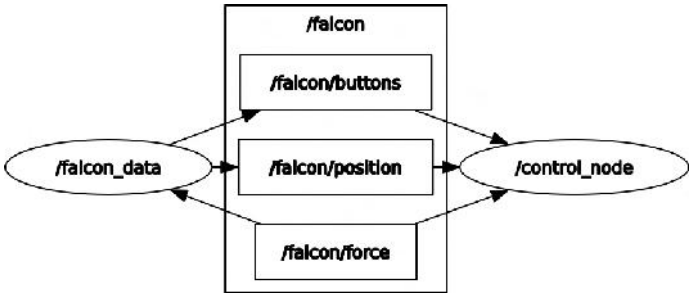


Figura A.12: Nodo y tópicos de ROS del dispositivo para teleoperación.

A.3.2.6. Sistema de Control Autónomo

Esta parte del software está compuesta por dos subsistemas. El primero es el **Sistema Autónomo**, el cual incluye programas que realizan tareas específicas para el control autónomo del manipulador aéreo por separado.

Para el hexarrotor:

- `position.py`: Permite posicionar el hexarrotor en coordenadas deseadas.
- `follow_path.py`: Habilita al hexarrotor para seguir una trayectoria de manera autónoma.
- `drone_task_control.cpp`: Permite definir tareas para el despegue y aterrizaje del robot.

En cuanto al control del brazo robótico, se dispone de dos programas:

- `pos_joint.py`: Permite posicionar el extremo operativo.
- `task_follow.py`: Se encarga de realizar el seguimiento de trayectorias.

El segundo subsistema, y el más relevante, es el de **Control Autónomo**, ya que en él se implementan todos los esquemas de control descritos en esta tesis. El código desarrollado en este subsistema se ejecuta en el entorno MATLAB y se utiliza para la programación matemática de los algoritmos avanzados aplicados al robot manipulador aéreo. Además, se integran bibliotecas desarrolladas específicamente para que los usuarios puedan implementar y probar sus propios esquemas de control.

El nodo encargado de gestionar la interacción con todos los sistemas del manipulador aéreo se denomina `/control_node`. La Tabla A.7 presenta cinco ejemplos de código disponibles en este subsistema, diseñados para controlar las distintas funcionalidades del manipulador aéreo.

Tabla A.7
Códigos ejemplo para el control autónomo del manipulador aéreo.

Programa	Descripción
`position.m`	Para realizar el control de posición del Manipulador Aéreo
`trajectory_tracking.m`	Programa para ejecutar una trayectoria con el Manipulador Aéreo
`path_following.m`	Programa para realizar el seguimiento de camino con el Manipulador Aéreo
`tele_operate_control.m`	Este programa permite realizar la teleoperación del Manipualdor Aéreo desde un sitio remoto
`autonomous_grasping.m`	Este programa permite ejecutar de forma autónoma el control del manipulador aéreo para capturar objetivos

Todos estos programas, acceden a los tópicos necesarios para el control en lazo cerrado del hexarrotor y del brazo robótico.

A.3.2.7. Sistema de Control Manual

El control manual permite operar directamente al hexarrotor por medio de sus propio enlace al control remoto en tierra. Tiene un sistema de transmisión inalámbrica Lightbridge 2, opera a 2.4 GHz y tiene una distancia máxima de transmisión de 5 km.

A.3.3. Nodos y Tópicos de ROS del Robot

La Figura A.13 se presenta una captura de la imagen que trasmite el robot para realimentación visual del entorno de navegación, la misma que es útil para detectar obstáculos y para la retroalimentación visual del operador.

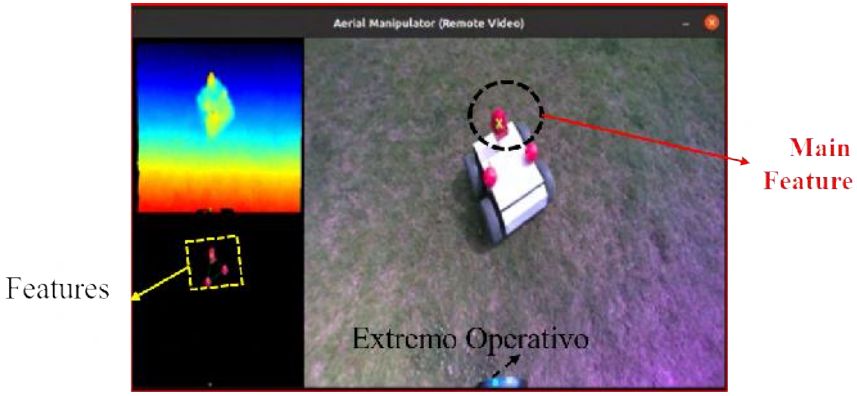


Figura A.13: Video que captura y trasmite el robot mediante el nodo de ROS para realimentación visual.

En la Figura A.14 se muestran los nodos y tópicos activos de ROS utilizados en la arquitectura de control autónomo del manipulador aéreo, los cuales permiten la ejecución de tareas autónomas.

Por último, la Figura A.15 presenta el robot manipulador aéreo en funcionamiento.

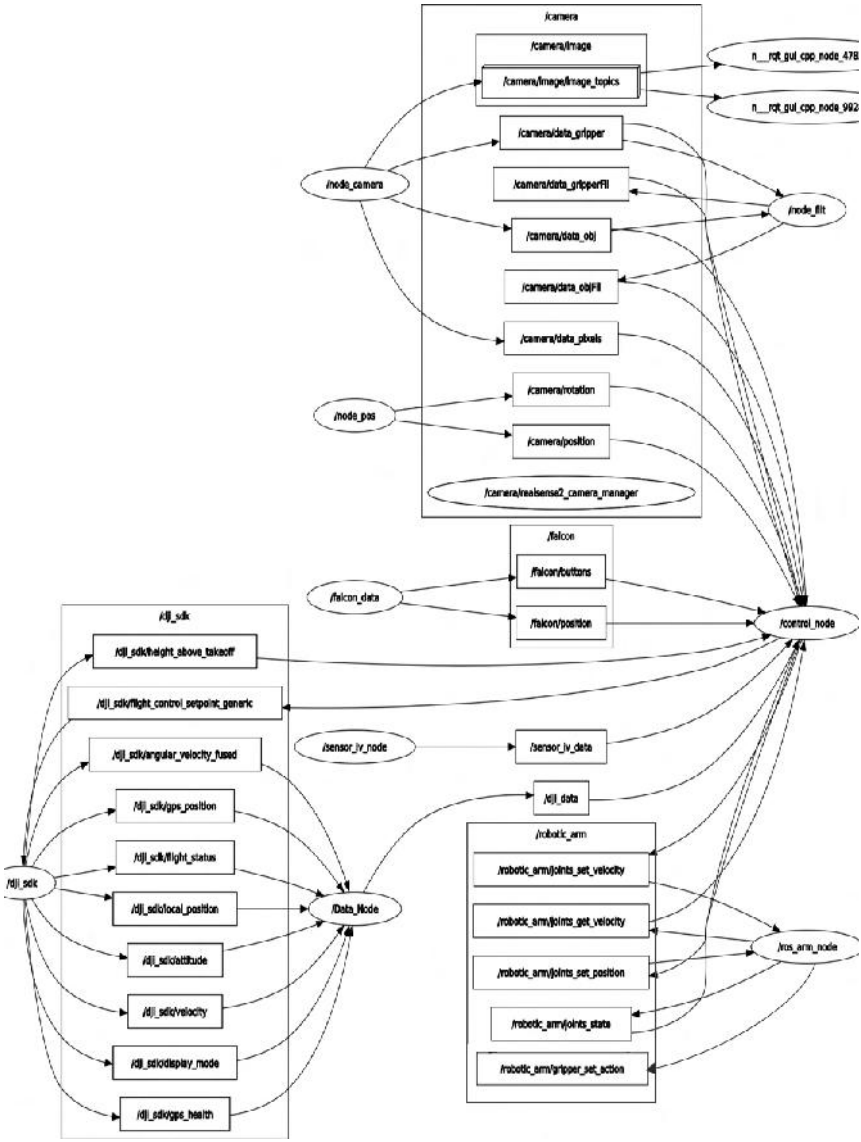


Figura A.14: Nodos y tópicos de ROS del robot manipulador aéreo



Figura A.15: Robot Manipulador Aéreo.

A.4. Nota final sobre la plataforma experimental

El manipulador aéreo desarrollado para esta investigación integra tanto hardware como software diseñados específicamente para permitir la validación experimental de los algoritmos propuestos a lo largo de la tesis. El sistema de control está estructurado en módulos que abarcan locomoción, percepción, planificación de movimiento y comunicación, permitiendo una operación autónoma o por teleoperación, según lo requiera la tarea.

Se ha implementado un sistema de comunicación en tiempo real, lo que garantiza una respuesta rápida ante cambios en el entorno. El diseño del software sigue una arquitectura modular y buenas prácticas de ingeniería, lo que asegura un código limpio, eficiente y fácilmente escalable.

El sistema de video integrado en el manipulador permite la adquisición y procesamiento visual en tiempo real, aspecto fundamental para las estrategias de control servo-visual implementadas. Esta plataforma experimental ha sido empleada en la validación de todos los esquemas de control desarrollados en esta tesis, demostrando su versatilidad y fiabilidad en condiciones reales de operación.

APÉNDICE B

Redundancia en Robótica

La redundancia en sistemas robóticos hace referencia a la existencia de más grados de libertad (DoF) que posee un robot de los necesarios para realizar una tarea específica. Esto significa que el robot tiene la capacidad de moverse de maneras adicionales a las requeridas para cumplir con la tarea definida, lo que le permite tener más flexibilidad y margen de maniobra en sus movimientos.

B.1. Tipos de Redundancia

- **Redundancia Cinemática:** Se da cuando un robot tiene más grados de libertad en su espacio de configuración. Por ejemplo un, en un brazo robótico de 6 DoF que puede realizar una tarea que se podría resolver con 3 DoF. Esta redundancia le permite ajustar su postura de diversas maneras sin alterar el punto de trabajo o la posición del extremo operativo.
- **Redundancia Dinámica:** Se refiere a la capacidad de un sistema robótico

para aplicar más fuerzas o torques de los necesarios para una tarea, lo que permite al robot ser más eficiente en la distribución de fuerzas, o que pueda ser más estable en presencia de perturbaciones o incertidumbres.

- **Redundancia Sensorial:** Se da cuando el robot tiene más sensores de los estrictamente necesarios para una tarea. Por ejemplo, utilizar múltiples cámaras o sensores táctiles que permiten obtener información redundante sobre el entorno, lo que puede mejorar la robustez y la precisión en el procesamiento de datos.

B.2. Ventajas de la Redundancia

- **Mayor flexibilidad:** El robot puede elegir entre múltiples configuraciones para realizar una misma tarea, lo que permite adaptarse a cambios en el entorno o situaciones imprevistas.
- **Mejor Evasión de Obstáculos:** Con redundancia cinemática, un robot puede encontrar caminos alternativos para evitar obstáculos sin cambiar su objetivo final.
- **Criterios de Optimización:** A través de la redundancia, se pueden optimizar criterios como la minimización del esfuerzo o la energía necesaria para realizar el movimiento, o la mejora de la estabilidad.
- **Mejora la Precisión::** La redundancia sensorial puede aumentar la precisión al utilizar múltiples sensores que complementen la información recogida..

B.3. Sistemas Redundantes

Sea un sistema de la forma:

$$\dot{\mathbf{r}}(\mathbf{t}) = \mathbf{J}(\mathbf{q})\mathbf{v}(\mathbf{t}) \tag{B.1}$$

donde:

- $\dot{\mathbf{r}}(t) \in \mathbb{R}^m$ es el vector que representa la posición y orientación del extremo operativo en el espacio de la tarea.

- $\mathbf{v}(t) \in \mathbb{R}^m$ es el vector de velocidades de maniobrabilidad del robot.
- $\mathbf{q}(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de coordenadas articulares, es decir, los grados de libertad del robot.
- $\mathbf{J}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ es la matriz jacobianda del sistema, tal que:

$$\mathbf{J}\left(\mathbf{q}\right) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \tag{B.2}$$

se dice que el sistema es redundante cuando el número de grados de libertad n del robot es mayor que el número de grados impuestas por la tarea m, es decir:

$$n > m \tag{B.3}$$

En este caso, la matriz Jacobiana $\mathbf{J}(\mathbf{q})$ tiene más columnas que filas $m < n$, lo que significa que el sistema es subactuado, es decir, existen múltiples soluciones para $\mathbf{v}(t)$ que generan el mismo valor de $\mathbf{r}(t)$. En otras palabras, el robot puede alcanzar una misma posición del extremo operativo con diferentes configuraciones articulares, lo que da lugar a movimientos internos o redundantes.

La Figura B.1 muestra el mapeo lineal realizado por la jacobiana del sistema, que se utiliza para proponer el controlador de seguimiento de trayectoria con objetivos secundarios para mejorar el consumo de energía durante la tarea.

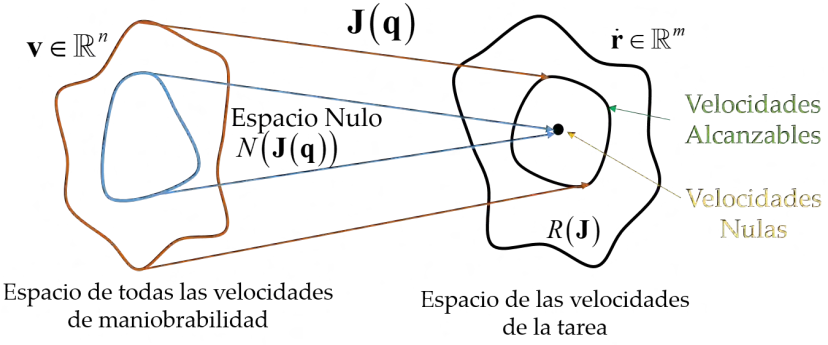


Figura B.1: Representación del mapeo lineal entre espacios mediante el Jacobiano (**J**).

Como se puede observar:

$$N(\mathbf{J}) = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n / \mathbf{J}\mathbf{v} = 0\} \tag{B.4}$$

es decir, el espacio nulo de $N(\mathbf{J})$ está formado por todas las velocidades de maniobrabilidad que no generan velocidades en el espacio de trabajo. mientras que:

$$R(\mathbf{J}) = \{\mathbf{J}\mathbf{v} / \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n\} \tag{B.5}$$

es un subespacio de $\mathbb{R}^n$ que mapea al subespacio de $\mathbb{R}^m$ que contiene las velocidades alcanzables del extremo operativo en el espacio de la tarea.

B.4. Solución de un Sistema Redundante

Dado que un sistema redundante tiene infinitas se presenta las ecuaciones para determinar la solución particular y la solución general.

B.4.1. Solución Particular

También conocida como solución de mínima norma de $\mathbf{v}(t)$

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{J}^{\dagger}\dot{\mathbf{r}}(t) \tag{B.6}$$

donde, $\mathbf{J}^{\dagger}$ es la matriz pseudoinversa por derecha de $\mathbf{J}$, calculada por:

$$\mathbf{J}^{\dagger} = \mathbf{J}^{\intercal}(\mathbf{J}\mathbf{J}^{\intercal})^{-1} \quad m < n \tag{B.7}$$

B.4.2. Solución General

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{J}^{\dagger}\dot{\mathbf{r}}(t) + \left(\mathbf{I} - \mathbf{J}^{\dagger}\mathbf{J}\right)\mathbf{v_0}(t) \tag{B.8}$$

donde:

- $\mathbf{J}^{\dagger}\dot{\mathbf{r}}(t)$: Solución de mínima norma de $\mathbf{v}$
- $\left(\mathbf{I} - \mathbf{J}^{\dagger}\mathbf{J}\right)\mathbf{v_0}(t)$: Solución homogénea, velocidad en el espacio nulo de $\mathbf{J}$

donde, $\left(\mathbf{I}-\mathbf{J}^{\dagger}\mathbf{J}\right)$ es la proyección ortogonal en el espacio $N(\mathbf{J})$ y $\dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{0}}(t)$ es una velocidad arbitraria del espacio nulo, es decir, una velocidad proyectada en el espacio nulo.

La solución homogénea genera movimiento internos del robot, es decir modifica la contrafigura interna del robot sin modificar la velocidad del extremo operativo. Utilizando esta característica de los sistemas redundantes se puede implementar controladores basados en ele velocidad en el espacio nulo puede ser en función a tareas secundarias u objetivos secundarios como:

- Maximizar la cuantificación de la manipulabilidad $\mathrm{w}(\mathbf{q})$.
- Evadir obstáculos.
- Minimizar el consumo energético.
- Evitar configuraciones no deseadas.
- Evitar singularidades en el sistema.

APÉNDICE C

Manipulabilidad

C.1. Índice de Manipulabilidad

Es un criterio mediante el cual se evalúan las posiciones angulares del robot en la ejecución de una tarea o maniobra. Permite ver configuraciones no deseadas del robot, es decir, cuando el sistema está en presencia de una singularidad analizando el Jacobiano.

Según [110] propone una cuantificación de la medida de manipulabilidad por:

$$\begin{array}{rll} \mathrm{w}(\mathbf{q}) = \sqrt{\det\left(\mathbf{J}\mathbf{J}^{\intercal}\right)} & \text{para} & m \neq n \\ \mathrm{w}(\mathbf{q}) = \left|\det\left(\mathbf{J}\right)\right| & \text{para} & m = n \end{array} \tag{C.1}$$

Conocida como medida de manipulabilidad del estado con respecto al vector de manipulación. Es claro que:

$$\mathrm{w}(\mathbf{q}) \geq 0 \quad \text{y} \quad \mathrm{w}(\mathbf{q}) = 0 \Leftrightarrow r_k < m \quad \text{con} \quad r_k = rank(\mathbf{J}) \tag{C.2}$$

donde, r_k es el rango y representa la cantidad de valores singulares no nulos. Si $\mathrm{w}(\mathbf{q}) = 0$ resulta cuando el brazo robótico entra en singularidad.

A continuación, se realiza el análisis de manipulabilidad para dos casos específicos: el brazo robótico de 3DOF y el manipulador aéreo. Este análisis permitirá comparar el desempeño de los dos robots en términos de su capacidad de movimiento y la presencia de posibles configuraciones no deseadas

C.2. Brazo Robótico de 3DOF

Consideremos al brazo robótico de 3DOF que se monta en la plataforma aérea (Apéndice A.2.2). En la Figura C.1) se presenta el brazo robótico:

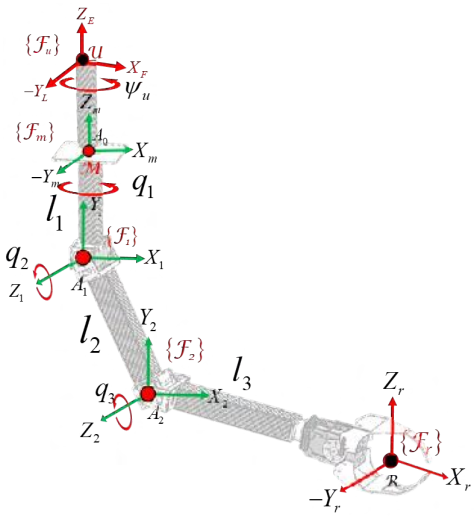


Figura C.1: Brazo robótico de 3 grados de libertad.

Consideremos un manipulador con n grados de libertad denotados por $\mathbf{q}$ y la tarea $\mathbf{r}$ a realizar por el manipulador descrita con m variables donde $m = n$, y la

relación entre $\mathbf{q}$ y $\mathbf{r}$ está dada por:

$$\mathbf{r} = f(\mathbf{q}) \tag{C.3}$$

donde, $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \end{bmatrix}^\intercal$ es el vector de las articulaciones del robot y $\mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_x & r_y & r_z \end{bmatrix}^\intercal$ es el vector de coordenadas de la tarea o de manipulación. La velocidad de la tarea $\dot{\mathbf{r}}$ en función de las velocidades de las articulaciones $\dot{\mathbf{q}}$ está dada por:

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}}(t) \tag{C.4}$$

donde, $\dot{\mathbf{r}} \in \mathbb{R}^m$ (con m siendo la dimensión del espacio euclidiano), $\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de velocidades de maniobrabilidad del brazo robótico y $\mathbf{J} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ es la matriz Jacobiana del sistema.

C.2.1. Cinemática Directa

$$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(q_1)\left(l_2\cos(q_2) + l_3\cos(q_2+q_3)\right) \\ \sin(q_1)\left(l_2\cos(q_2) + l_3\cos(q_2+q_3)\right) \\ -l_1 + l_2\sin(q_2) + l_2\sin(q_2+q_3) \end{bmatrix} \tag{C.5}$$

C.2.2. Cinemática Diferencial

$$\begin{bmatrix} \dot{r}_x \\ \dot{r}_y \\ \dot{r}_z \end{bmatrix} = \mathbf{J}(\mathbf{q}) \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} \tag{C.6}$$

donde:

$$
\begin{aligned}
j_{11} &= -\sin(q_1)\left(l_2\sin(q_2) + l_3\sin(q_2+q_3)\right)\\
j_{12} &= \cos(q_1)\left(l_2\cos(q_2) + l_3\cos(q_2+q_3)\right)\\
j_{13} &= \cos(q_1)\left(l_3\cos(q_2+q_3)\right)\\
\\
j_{21} &= -\cos(q_1)\left(l_2\sin(q_2) + l_3\sin(q_2+q_3)\right)\\
j_{22} &= \sin(q_1)\left(l_2\cos(q_2) + l_3\cos(q_2+q_3)\right)\\
j_{23} &= \sin(q_1)\left(l_3\cos(q_2+q_3)\right)\\
\\
j_{31} &= 0\\
j_{32} &= l_2\sin\left(q_2\right) + l_3\sin\left(q_2+q_3\right)\\
j_{33} &= l_3\sin\left(q_2+q_3\right)
\end{aligned}
\tag{C.7}
$$

C.2.3. Análisis de la Manipulabilidad

Ahora, analizaremos el comportamiento de la manipulabilidad en función de la variación de todas las articulaciones del sistema (C.6). Para esto, se hace variar cada articulación en el rango de $q_1, q_2, q_3 \in [-\pi, \pi]$. La Figura C.2 presenta el valor del índice de la manipulabilidad respecto a cada articulación del robot.

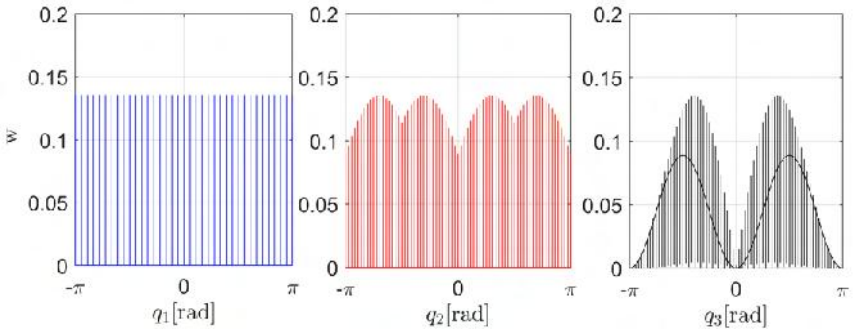
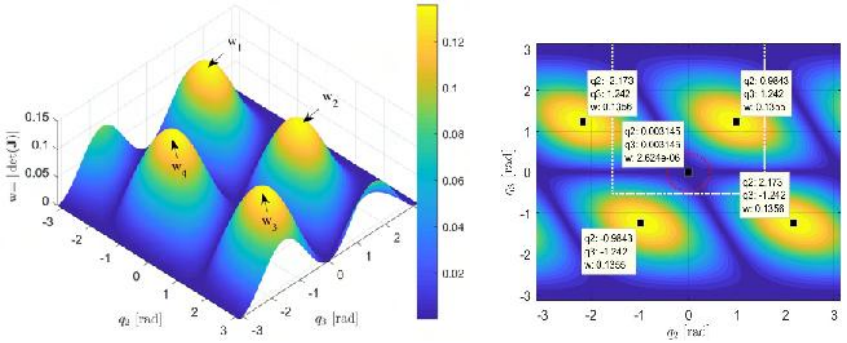


Figura C.2: Indice de manipulabilidad respecto a la variación de cada articulación del brazo robótico.

Ahora, considerando las articulaciones que mas interfieren en el desempeño del sistema. La Figura C.3 muestra el resultado del análisis en función de q_2 y q_3. La

gráfica presenta dos mapas de calor, donde las regiones en color amarillo indican los valores de máxima manipulabilidad, mientras que las áreas con tonalidades azul corresponden a configuraciones articulares en las que el sistema entra en una condición de singularidad, es decir, el índice de manipulabilidad tiene a cero. Además, en la gráfica se se encierra en un rectángulo los valores que puede tomar el robot según la Tabla A.2.



(a) Mapa de calor 3D. **(b)** Mapa de calor 2D.

Figura C.3: Comportamiento del índice de manipulabilidad respecto a las articulaciones q_1 y q_2 del sistema.

A partir de los resultados obtenidos en la Figura C.3 y la Figura C.2, en la Tabla C.1 se presentan cuatro configuraciones para las articulaciones del robot, donde se alcanzan los valores máximos de manipulabilidad para el brazo robótico de 3DOF.

Tabla C.1
Valores de las articulaciones de máxima manipulabilidad del brazo robótico de 3DOF

Manipulabilidad	q_1 [rad]	q_2 [rad]	q_3 [rad]
$\mathrm{w}_{1,3}(\mathbf{q})$	$[-\pi, \pi]$	$\pm 0{,}697027\pi$	$\pm 0{,}393939\pi$
$\mathrm{w}_{2,4}(\mathbf{q})$	$[-\pi, \pi]$	$\pm 0{,}297979\pi$	$\pm 0{,}393939\pi$

Sin embargo, la estructura mecánica del brazo robótico no permite que las articulaciones adopten cualquier valor. En función de la constitución mecánica del robot (Tabla A.2), el recuadro blanco en la Figura C.3b delimita el conjunto de posiciones alcanzables. Por lo tanto, las configuraciones articulares que maximizan la manipulabilidad corresponde a w_2 y valores articulares cercanos asociados con w_1.

C.3. Manipulador Aéreo

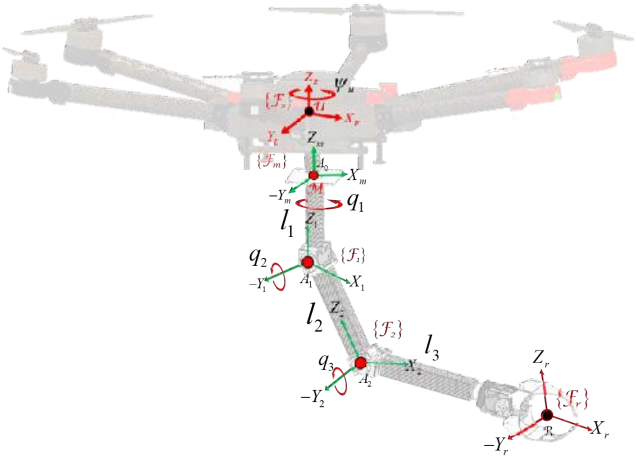


Figura C.4: Brazo robótico de 4 grados de libertad.

El robot manipulador aéreo, al estar compuesto por dos sistemas robóticos, constituye un sistema altamente redundante, como se puede observar en el modelo cinemático diferencial del robot (2.46). Así, se tiene que:

$$\dot{\mathbf{r}}\left(\mathbf{q}\right) = \mathbf{J}\left(\mathbf{q_u}, \mathbf{q_a}\right) \boldsymbol{\mu}(t) \tag{C.8}$$

donde, $\boldsymbol{\mu}(t) \in \mathbb{R}^7$ son las velocidades del robot, $\dot{\mathbf{r}}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{\mathbf{4}}$ son las velocidades de la tarea y $\mathbf{J}\left(\mathbf{q_u}, \mathbf{q_a}\right) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es el Jacobiano del manipulador aéreo con

$n = 7$ que es la dimensión del espacio de configuración del robot y $m = 4$, tal que, $m < n$. Dado que hay más grados de libertad disponibles, el robot cuenta con mayor flexibilidad para evitar singularidades. Esto le permite moverse en múltiples direcciones sin inconvenientes y ajustar su postura para prevenir dichas situaciones.

C.3.1. Análisis de la Manipulabilidad

De forma similar a la Sección C.2, se analiza el comportamiento del índice de manipulabilidad $\mathrm{w}(\mathbf{q})$. A partir de (C.1), se considera el caso en el que $m < n$ para el manipulador aéreo (MA). Dado que en el sistema (C.8) existen múltiples grados de libertad, el brazo robótico es el componente que puede entrar en singularidad, ya que, como se observó en la sección anterior, puede tener configuraciones que conduzcan al sistema a esta condición. Por tanto, el análisis de manipulabilidad se realiza considerando las siguientes articulaciones y en el rango de: $\psi_u, q_1, q_2, q_3 \in [-\pi, \pi]$. La Figura C.5 presenta el resultado del análisis de manipulabilidad realizado.

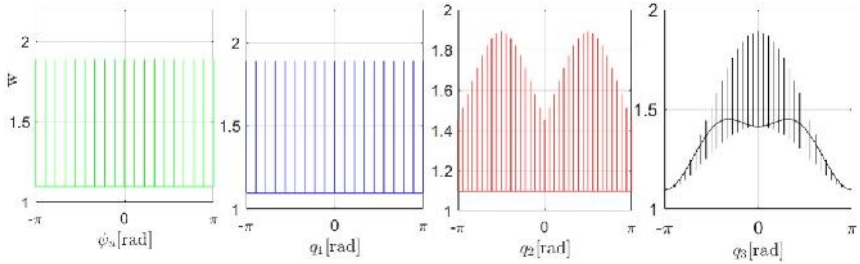
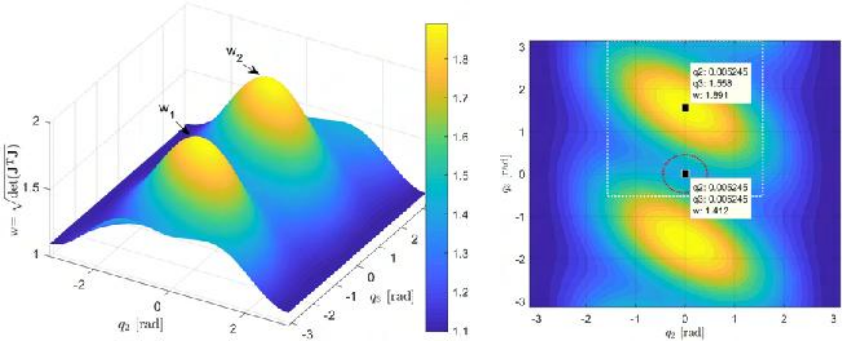


Figura C.5: Indice de manipulabilidad respecto a cuatro articulaciones del manipular aéreo.

Es evidente que el índice de manipulabilidad tiende a ser elevado, lo que demuestra que el robot posee una buena capacidad de movimiento en el espacio operativo para todas las configuraciones evaluadas. Por lo tanto, se demuestra que el robot es altamente redundante, lo que permite optimizar su postura para otros objetivos, como la evasión de obstáculos o la optimización del consumo de energía.

Ahora, la Figura C.6 se presenta dos gráficas correspondientes a un mapa de calor 2D y 3D, donde es posible visualizar el comportamiento del índice de manipulabilidad en función de la variación de las articulaciones del brazo robótico montado en el hexarrotor. En este caso, para el sistema (C.8), se identifican dos configuraciones en las que el robot alcanza su máxima manipulabilidad. Sin embargo, por la constitución mecánica del brazo robótico solo puede llegar a una configuración en la que se alcanza la máxima manipulabilidad.



(a) Mapa de calor 3D. **(b)** Mapa de calor 2D.

Figura C.6: Comportamiento del índice de manipulabilidad del manipulador aéreo respecto a q_1 y q_2.

A partir del análisis, en la Tabla C.2 se presenta el rango de valores para evitar configuraciones cercanas a la singularidad y maximizar la capacidad del robot para moverse eficientemente en el espacio operativo.

Tabla C.2
Rangos recomendados para q_1 y q_2 que garantizan una alta manipulabilidad.

Articulación	Rango recomendado [rad]
q_2	$[-\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{3}\pi]$
q_3	$[\frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi]$

Estos valores garantizan que el robot trabaje con una alta eficiencia en la mayoría

de las configuraciones analizadas, proporcionando flexibilidad en la ejecución de tareas y reduciendo el riesgo de configuraciones cercanas a la singularidad que podrían comprometer su desempeño. Además, los rangos establecidos son alcanzables dentro de los límites mecánicos del brazo robótico, asegurando su factibilidad en la implementación práctica.

C.4. Elipse de Manipulabilidad

Otra medida del indice de desempeño para manipuladores es la elipse de manipulabilidad [110]. La cual describe la relación entre las velocidades articulares y las velocidades del extremo operativo en el espacio cartesiano.

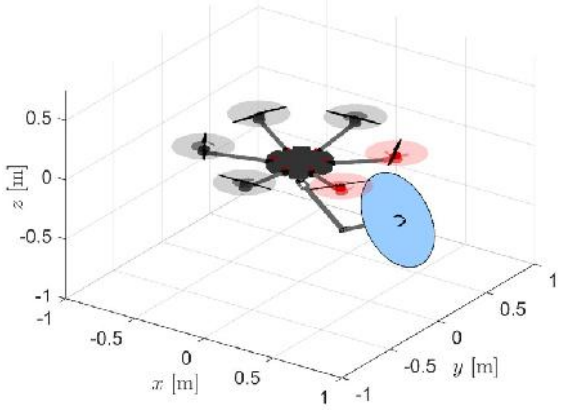
Se analiza el comportamiento de la elipse de manipulabilidad en función de la variación de las articulaciones q_2 y q_3 del manipulador aéreo, debido a su impacto en la movilidad del extremo operativo. Para ello, se seleccionan valores dentro del rango obtenido en la Tabla C.2, que aseguran una alta manipulabilidad. La Figura presenta le elipse de manipulabilidad para $q_2 = \frac{\pi}{4}$ y $q_3 = \frac{7}{18}\pi$.

La Figura C.8 presenta un análisis similar considerando únicamente el brazo robótico de 3DOF. Para lo cual, se seleccionan dos configuraciones articulares: una en la que el robot alcanza una singularidad ($q_2 = q_3 = 0$) y otra en la que se encuentra muy cercana a esta condición ($q_2 = -\frac{\pi}{36}, q_3 = -\frac{\pi}{16}$) en función a la Figura C.3 y Tabla C.1, permitiendo evaluar el comportamiento de la elipse de manipulabilidad.

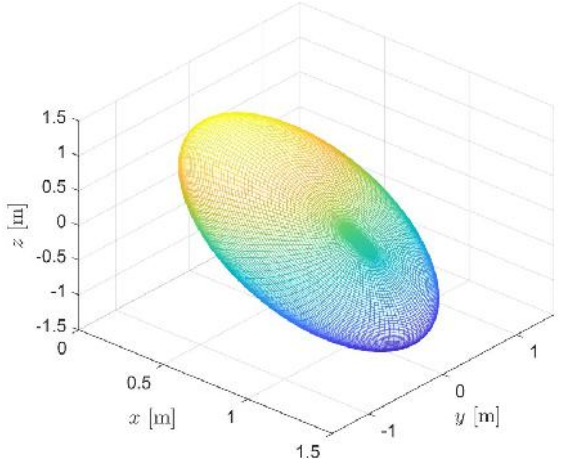
Se puede observar que la elipse de manipulabilidad para estas configuraciones el brazo robótico adopta una configuración en singularidad y otra muy cercana a la singularidad. Se evidencia como la elipse se deforma significativamente, indicando una reducción en la capacidad de movimiento del extremo operativo y una posible pérdida de destreza en ciertas direcciones.

Considerando estos análisis de los indicadores de desempeño para el brazo robótico y para el manipulador aéreo se observa que:

- El tamaño y la orientación de la elipse indican la capacidad de movimiento en distintas direcciones.

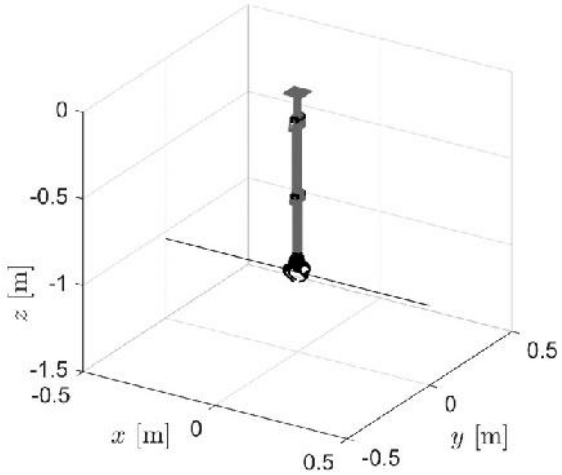


(a) Elipse de manipulabilidad en el plano (dos ejes).

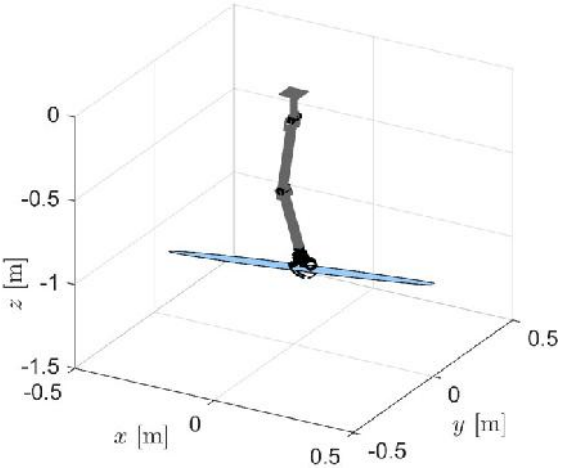


(b) Elipsoide de manipulabilidad (tres ejes).

Figura C.7: Elipse de manipulabilidad en configuración óptima.



(a) Configuración en singularidad.



(b) Configuración cerca de singularidad.

Figura C.8: Elipse de manipulabilidad para dos configuraciones del brazo robótico.

- El eje mas de la elipse indica que el extremo operativo tiene una alta velocidad en esa dirección, permitiendo mayor libertad de movimiento.
- Los ejes mas cortos indican una restricción en la movilidad, lo que podría indicar proximidad a una singularidad o una limitación mecánica del sistema.
- El índice de manipulabilidad permite identificar que configuraciones de las articulaciones del robot permiten optimizar y mejorar la capacidad de movimiento del extremo operativo.

Observación C.3 *Este análisis permite identificar configuraciones óptimas del manipulador aéreo, asegurando un desempeño eficiente y reduciendo el riesgo de alcanzar configuraciones cercanas a la singularidad.*

APÉNDICE D

Propiedades del Modelo Dinámico

El modelo dinámico de un sistema robótico presenta propiedades que permiten su análisis y la implementación de controladores [70]. A continuación, se describen las principales propiedades:

D.1. Propiedad de la Matriz $\bar{\mathbf{M}}(\mathbf{q})$

La matriz de inercia $\bar{\mathbf{M}}(\mathbf{q})$ es:

- Simétrica (por construcción):

$$\bar{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) = \bar{\mathbf{M}}^{\intercal}(\mathbf{q}) \tag{D.1}$$

- Inversa definida positiva $\bar{\mathbf{M}}(\mathbf{q})^{-1}$

- Definida positiva: Para cualquier vector $\boldsymbol{x}$,

$$\mathbf{x}^{\intercal}\bar{\mathbf{M}}(\mathbf{q})\mathbf{x} > \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \tag{D.2}$$

- Acotamiento por arriba y por debajo:

$$\lambda_{\text{mín}}\left(\bar{\mathbf{M}}(\mathbf{q})\right)\mathbf{I} \leq \bar{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) \leq \lambda_{\text{máx}}\left(\bar{\mathbf{M}}(\mathbf{q})\right)\mathbf{I} \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n \tag{D.3}$$

  donde, $\lambda_{min}(\bullet)$ y $\lambda_{min}(\bullet)$ representan el valor propio más pequeño y el valor propio mas grande de $\bar{\mathbf{M}}(\mathbf{q})$ respectivamente. La propiedad dice que para ninguna configuración del robot, puede ocurrir que $\bar{\mathbf{M}}(\mathbf{q})$ no genere energía cinética con el robot en movimiento.

Es una propiedad clave para garantizar estabilidad en los sistemas de control y para el cálculo de energía cinética del sistema.

D.2. Propiedad de la Matriz $\bar{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$

La matriz $\bar{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, que representa las fuerzas centrífugas y de Coriolis en el modelo dinámico, presenta las siguientes propiedades fundamentales:

- Dependencia lineal en $\dot{\mathbf{q}}$: La matriz $\bar{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ depende linealmente de las velocidades articulares $\dot{\mathbf{q}}$. Esto implica que si:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \Rightarrow \bar{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^{\mathbf{n}} \tag{D.4}$$

- Relación con la matriz de inercia: Los elementos de la matriz $\bar{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ se calculan a partir de la matriz de inercia $\bar{\mathbf{M}}(\mathbf{q})$ y sus derivadas parciales. Los términos de Christoffel $\bar{c}_{ijk}$ y están definidos como:

$$\bar{c}_{ijk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar{m}_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial \bar{m}_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial \bar{m}_{jk}}{\partial q_i}\right) \tag{D.5}$$

  donde, $\bar{m}_{ij}$ son los elementos de la matriz de inercia $\bar{\mathbf{M}}(\mathbf{q})$. El término correspondiente a la matriz $\bar{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ es:

$$\bar{c}_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \bar{c}_{ijk}\dot{q}_k. \tag{D.6}$$

D.3. Antisimetría (Skew-symetry)

- Antisimetría de la matriz $\mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \dot{\bar{\mathbf{M}}}(\mathbf{q}) - 2\bar{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$.
- La matriz $\bar{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ garantiza la correcta conservación de la energía cinética del sistema. Esto se refleja en la siguiente propiedad:

$$\mathbf{q}^{\intercal} \left[\frac{d}{dt}\bar{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) - \mathbf{2}\bar{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \right] \mathbf{q} = \mathbf{0} \tag{D.7}$$

  asegura un balance dinámico interno.

D.4. Linealidad en los parámetros dinámicos

El modelo dinámico es lineal respecto a los parámetros dinámicos ($\boldsymbol{\vartheta}$), por lo tanto, el modelo dinámico se puede expresar como:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})\boldsymbol{\vartheta} \tag{D.8}$$

donde, $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n \times \eta}$ es la matriz de regresión que depende de las posiciones, velocidades y aceleraciones articulares del robot.

D.5. No linealidad

El modelo dinámico es intrínsecamente no lineal, debido a las dependencias de las matrices $\bar{\mathbf{M}}(\mathbf{q})$, $\bar{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ y el vector gravitacional $\bar{\mathbf{g}}(\mathbf{q})$ respecto a las configuraciones articulares.

APÉNDICE E

Ecuaciones del Modelo Dinámico

E.1. Modelo Dinámico en Función a Torques

El modelo dinámico en función de torques está descrito de la forma:

$$\boldsymbol{\tau}(t) = \bar{\mathbf{M}}\left(\mathbf{q}\right)\ddot{\mathbf{q}}(t) + \bar{\mathbf{C}}\left(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}\right)\dot{\mathbf{q}}(t) + \bar{\mathbf{g}}\left(\mathbf{q}\right) \tag{E.1}$$

E.1.1. Matriz de Masas o de Inercia

$$\bar{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \bar{m}_{11} & \bar{m}_{12} & \bar{m}_{13} & \bar{m}_{14} & \bar{m}_{15} & \bar{m}_{16} & \bar{m}_{17} \\ \bar{m}_{21} & \bar{m}_{22} & \bar{m}_{23} & \bar{m}_{24} & \bar{m}_{25} & \bar{m}_{26} & \bar{m}_{27} \\ \bar{m}_{31} & \bar{m}_{32} & \bar{m}_{33} & \bar{m}_{34} & \bar{m}_{35} & \bar{m}_{36} & \bar{m}_{37} \\ \bar{m}_{41} & \bar{m}_{42} & \bar{m}_{43} & \bar{m}_{44} & \bar{m}_{45} & \bar{m}_{46} & \bar{m}_{47} \\ \bar{m}_{51} & \bar{m}_{52} & \bar{m}_{53} & \bar{m}_{54} & \bar{m}_{55} & \bar{m}_{56} & \bar{m}_{57} \\ \bar{m}_{61} & \bar{m}_{62} & \bar{m}_{63} & \bar{m}_{64} & \bar{m}_{65} & \bar{m}_{66} & \bar{m}_{67} \\ \bar{m}_{71} & \bar{m}_{72} & \bar{m}_{73} & \bar{m}_{74} & \bar{m}_{75} & \bar{m}_{76} & \bar{m}_{77} \end{bmatrix} \tag{E.2}$$

Donde:

$$\bar{m}_{11} = m_1 + m_2 + m_3 + m_u$$
$$\bar{m}_{12} = 0$$
$$\bar{m}_{13} = 0$$
$$\bar{m}_{14} = -\sin(\psi_u + q_1)(l_2 m_2 \sin(q_2) + l_2 m_3 \sin(q_2) + l_3 m_3 \sin(q_2 + q_3))$$
$$\bar{m}_{15} = -sin(\psi_u + q_1)(l_2 m_2 \sin(q_2) + l_2 m_3 \sin(q_2) + l_3 m_3 \sin(q_2 + q_3))$$
$$\bar{m}_{16} = \cos(\psi_u + q_1)(l_2 m_2 \cos(q_2) + l_2 m_3 \cos(q_2) + l_3 m_3 \cos(q_2 + q_3))$$
$$\bar{m}_{17} = l_3 m_3 \cos(\psi_u + q_1)\cos(q_2 + q_3)$$

$$\bar{m}_{21} = 0$$
$$\bar{m}_{22} = m_1 + m_2 + m_3 + m_u$$
$$\bar{m}_{23} = 0$$
$$m_{24} = \cos(\psi_u + q_1)(l_2 m_2 \sin(q_2) + l_2 m_3 \sin(q_2) + l_3 m_3 \sin(q_2 + q_3))$$
$$\bar{m}_{25} = \cos(\psi_u + q_1)(l_2 m_2 \sin(q_2) + l_2 m_3 \sin(q_2) + l_3 m_3 \sin(q_2 + q_3))$$
$$\bar{m}_{26} = \sin(\psi_u + q_1)(l_2 m_2 \cos(q_2) + l_2 m_3 \cos(q_2) + l_3 m_3 \cos(q_2 + q_3))$$
$$\bar{m}_{27} = l_3 m_3 \cos(q_2 + q_3)\sin(\psi_u + q_1)$$

$$\bar{m}_{31} = 0$$
$$\bar{m}_{32} = 0$$

$$\bar{m}_{33} = m_1 + m_2 + m_3 + m_u$$
$$\bar{m}_{34} = 0$$
$$\bar{m}_{35} = 0$$
$$\bar{m}_{36} = \bar{m}_3 \left(l_3 \sin\left(q_2 + q_3\right) + l_2 \sin\left(q_2\right)\right) + l_2 m_2 \sin\left(q_2\right)$$
$$\bar{m}_{37} = l_3 m_3 \sin\left(q_2 + q_3\right)$$

$$\bar{m}_{41} = -\sin\left(\psi_u + q_1\right)\left(l_2 m_2 \sin\left(q_2\right) + l_2 m_3 \sin\left(q_2\right) + l_3 m_3 \sin\left(q_2 + q_3\right)\right)$$
$$\bar{m}_{42} = \cos\left(\psi_u + q_1\right)\left(l_2 m_2 \sin\left(q_2\right) + l_2 m_3 \sin\left(q_2\right) + l_3 m_3 \sin\left(q_2 + q_3\right)\right)$$
$$\bar{m}_{43} = 0$$
$$\bar{m}_{44} = \frac{l_2^2 m_2}{2} + \frac{l_2^2 m_3}{2} + \frac{l_3^2 m_3}{2} - \frac{l_2^2 m_2 \cos\left(2q_2\right)}{2} - \frac{l_2^2 m_3 \cos\left(2q_2\right)}{2} - \frac{l_3^2 m_3 \cos\left(2q_2 + 2q_3\right)}{2} + \ldots$$
$$\ldots l_2 l_3 m_3 \cos\left(q_3\right) - l_2 l_3 m_3 \cos\left(2q_2 + q_3\right) + I_1 + I_{UAV}$$
$$\bar{m}_{45} = I_1 + \frac{l_2^2 m_2}{2} + \frac{l_2^2 m_3}{2} + \frac{l_3^2 m_3}{2} - \frac{l_2^2 m_2 \cos\left(2q_2\right)}{2} - \frac{l_2^2 m_3 \cos\left(2q_2\right)}{2} - \frac{l_3^2 m_3 \cos\left(2q_2 + 2q_3\right)}{2} + \ldots$$
$$\ldots l_2 l_3 m_3 \cos\left(q_3\right) - l_2 l_3 m_3 \cos\left(2q_2 + q_3\right)$$
$$\bar{m}_{46} = 0$$
$$\bar{m}_{47} = 0$$

$$\bar{m}_{51} = -\sin\left(\psi_u + q_1\right)\left(l_2 m_2 \sin\left(q_2\right) + l_2 m_3 \sin\left(q_2\right) + l_3 m_3 \sin\left(q_2 + q_3\right)\right)$$
$$\bar{m}_{52} = \cos\left(\psi_u + q_1\right)\left(l_2 m_2 \sin\left(q_2\right) + l_2 m_3 \sin\left(q_2\right) + l_3 m_3 \sin\left(q_2 + q_3\right)\right)$$
$$\bar{m}_{53} = 0$$
$$\bar{m}_{54} = I_1 + \frac{l_2^2 m_2}{2} + \frac{l_2^2 m_3}{2} + \frac{l_3^2 m_3}{2} - \frac{l_2^2 m_2 \cos\left(2q_2\right)}{2} - \frac{l_2^2 m_3 \cos\left(2q_2\right)}{2} - \frac{l_3^2 m_3 \cos\left(2q_2 + 2q_3\right)}{2} \ldots +$$

$$
\begin{aligned}
&\ldots l_2 l_3 m_3 \cos(q_3) - l_2 l_3 m_3 \cos(2q_2 + q_3) \\
\bar{m}_{55} &= I_1 + \frac{l_2^2 m_2}{2} + \frac{l_2^2 m_3}{2} + \frac{l_3^2 m_3}{2} - \frac{l_2^2 m_2 \cos(2q_2)}{2} - \frac{l_2^2 m_3 \cos(2q_2)}{2} - \frac{l_3^2 m_3 \cos(2q_2 + 2q_3)}{2} + \ldots \\
&\ldots l_2 l_3 m_3 \cos(q_3) - l_2 l_3 m_3 \cos(2q_2 + q_3) \\
\bar{m}_{56} &= 0 \\
\bar{m}_{57} &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\bar{m}_{61} &= \cos(\psi_u + q_1)\left(l_2 m_2 \cos(q_2) + l_2 m_3 \cos(q_2) + l_3 m_3 \cos(q_2 + q_3)\right) \\
\bar{m}_{62} &= \sin(\psi_u + q_1)\left(l_2 m_2 \cos(q_2) + l_2 m_3 \cos(q_2) + l_3 m_3 \cos(q_2 + q_3)\right) \\
\bar{m}_{63} &= \bar{m}_3\left(l_3 \sin(q_2 + q_3) + l_2 \sin(q_2)\right) + l_2 m_2 \sin(q_2) \\
\bar{m}_{64} &= 0 \\
\bar{m}_{65} &= 0 \\
\bar{m}_{66} &= I_2 + I_3 + l_2^2 m_2 + l_2^2 m_3 + l_3^2 m_3 + 2 l_2 l_3 m_3 \cos(q_3) \\
m_{67} &= m_3 l_3^2 + l_2 m_3 \cos(q_3)\, l_3 + I_3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\bar{m}_{71} &= l_3 m_3 \cos(\psi_u + q_1)\cos(q_2 + q_3) \\
\bar{m}_{72} &= l_3 m_3 \cos(q_2 + q_3)\sin(\psi_u + q_1) \\
\bar{m}_{73} &= l_3 m_3 \sin(q_2 + q_3) \\
\bar{m}_{74} &= 0 \\
\bar{m}_{75} &= 0 \\
\bar{m}_{76} &= m_3 l_3^2 + l_2 m_3 \cos(q_3)\, l_3 + I_3 \\
\bar{m}_{77} &= m_3 l_3^2 + I_3
\end{aligned}
$$

E.1.2. Matriz de Fuerza Centrípetas y de Coriolis

$$\bar{\mathbf{C}}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \bar{c}_{11} & \bar{c}_{12} & \bar{c}_{13} & \bar{c}_{14} & \bar{c}_{15} & \bar{c}_{16} & \bar{c}_{17} \\ \bar{c}_{21} & \bar{c}_{22} & \bar{c}_{23} & \bar{c}_{24} & \bar{c}_{25} & \bar{c}_{26} & \bar{c}_{27} \\ \bar{c}_{31} & \bar{c}_{32} & \bar{c}_{33} & \bar{c}_{34} & \bar{c}_{35} & \bar{c}_{36} & \bar{c}_{37} \\ \bar{c}_{41} & \bar{c}_{42} & \bar{c}_{43} & \bar{c}_{44} & \bar{c}_{45} & \bar{c}_{46} & \bar{c}_{47} \\ \bar{c}_{51} & \bar{c}_{52} & \bar{c}_{53} & \bar{c}_{54} & \bar{c}_{55} & \bar{c}_{56} & \bar{c}_{57} \\ \bar{c}_{61} & \bar{c}_{62} & \bar{c}_{63} & \bar{c}_{64} & \bar{c}_{65} & \bar{c}_{66} & \bar{c}_{67} \\ \bar{c}_{71} & \bar{c}_{72} & \bar{c}_{73} & \bar{c}_{74} & \bar{c}_{75} & \bar{c}_{76} & \bar{c}_{77} \end{bmatrix} \tag{E.3}$$

Donde:

$\bar{c}_{11} = 0$

$\bar{c}_{12} = 0$

$\bar{c}_{13} = 0$

$\bar{c}_{14} = -\dot{q}_2 \sin(\psi_u + q_1)(l_2 m_2 \cos(q_2) + l_2 m_3 \cos(q_2) + l_3 m_3 \cos(q_2 + q_3)) - \ldots$
$\omega \cos(\psi_u + q_1)(l_2 m_2 \sin(q_2) + l_2 m_3 \sin(q_2) + l_3 m_3 \sin(q_2 + q_3)) - \dot{q}_1 \cos(\psi_u + q_1) \ldots$
$\ldots (l_2 m_2 \sin(q_2) + l_2 m_3 \sin(q_2) + l_3 m_3 \sin(q_2 + q_3)) - l_3 m_3 \dot{q}_3 \cos(q_2 + q_3) \sin(\psi_u + q_1)$

$\bar{c}_{15} = -\dot{q}_2 \sin(\psi_u + q_1)(l_2 m_2 \cos(q_2) + l_2 m_3 \cos(q_2) + l_3 m_3 \cos(q_2 + q_3)) - \ldots$
$\omega \cos(\psi_u + q_1)(l_2 m_2 \sin(q_2) + l_2 m_3 \sin(q_2) + l_3 m_3 \sin(q_2 + q_3)) - \dot{q}_1 \cos(\psi_u + q_1)(l_2 m_2 \sin(q_2) + \ldots$
$\ldots + l_2 m_3 \sin(q_2) + l_3 m_3 \sin(q_2 + q_3)) - l_3 m_3 \dot{q}_3 \cos(q_2 + q_3) \sin(\psi_u + q_1)$

$\bar{c}_{16} = -\omega \sin(\psi_u + q_1)(l_2 m_2 \cos(q_2) + l_2 m_3 \cos(q_2) + l_3 m_3 \cos(q_2 + q_3)) - \ldots$
$\ldots \dot{q}_1 \sin(\psi_u + q_1)(l_2 m_2 \cos(q_2) + l_2 m_3 \cos(q_2) + l_3 m_3 \cos(q_2 + q_3)) - \dot{q}_2 \cos(\psi_u + q_1) \ldots$

$$
\begin{aligned}
&\ldots (l_2 m_2 \sin(q_2) + l_2 m_3 \sin(q_2) + l_3 m_3 \sin(q_2 + q_3)) - l_3 m_3 \dot{q}_3 \cos(\psi_u + q_1) \sin(q_2 + q_3) \\
\bar{c}_{17} &= -l_3 m_3 (\sin(\psi_u + q_1) (\omega \cos(q_2 + q_3) + \dot{q}_1 \cos(q_2 + q_3))) - \ldots \\
&\ldots l_3 m_3 (\cos(\psi_u + q_1) (\dot{q}_2 \sin(q_2 + q_3) + \dot{q}_3 \sin(q_2 + q_3)))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\bar{c}_{21} &= 0 \\
\bar{c}_{22} &= 0 \\
\bar{c}_{23} &= 0 \\
\bar{c}_{24} &= \dot{q}_2 \cos(\psi_u + q_1) (l_2 m_2 \cos(q_2) + l_2 m_3 \cos(q_2) + l_3 m_3 \cos(q_2 + q_3)) - \dot{q}_1 \sin(\psi_u + q_1) \ldots \\
&\ldots (l_2 m_2 \sin(q_2) + l_2 m_3 \sin(q_2) + l_3 m_3 \sin(q_2 + q_3)) - \omega \sin(\psi_u + q_1) - (l_2 m_2 \sin(q_2) + \ldots \\
&\ldots l_2 m_3 \sin(q_2) + l_3 m_3 \sin(q_2 + q_3)) + l_3 m_3 \dot{q}_3 \cos(\psi_u + q_1) \cos(q_2 + q_3) \\
\bar{c}_{25} &= \dot{q}_2 \cos(\psi_u + q_1) (l_2 m_2 \cos(q_2) + l_2 m_3 \cos(q_2) + l_3 m_3 \cos(q_2 + q_3)) - \dot{q}_1 \sin(\psi_u + q_1) \ldots \\
&\ldots (l_2 m_2 \sin(q_2) + l_2 m_3 \sin(q_2) + l_3 m_3 \sin(q_2 + q_3)) - \omega \sin(\psi_u + q_1) - (l_2 m_2 \sin(q_2) + \ldots \\
&\ldots l_2 m_3 \sin(q_2) + l_3 m_3 \sin(q_2 + q_3)) + l_3 m_3 \dot{q}_3 \cos(\psi_u + q_1) \cos(q_2 + q_3) \\
\bar{c}_{26} &= \omega \cos(\psi_u + q_1) (l_2 m_2 \cos(q_2) + l_2 m_3 \cos(q_2) + l_3 m_3 \cos(q_2 + q_3)) - \dot{q}_2 \sin(\psi_u + q_1) \ldots \\
&\ldots (l_2 m_2 \sin(q_2) + l_2 m_3 \sin(q_2) + l_3 m_3 \sin(q_2 + q_3)) + \dot{q}_1 \cos(\psi_u + q_1) (l_2 m_2 \cos(q_2) + \ldots \\
&\ldots l_2 m_3 \cos(q_2) + l_3 m_3 \cos(q_2 + q_3)) - l_3 m_3 \dot{q}_3 \sin(\psi_u + q_1) \sin(q_2 + q_3) \\
\bar{c}_{27} &= l_3 m_3 (\cos(\psi_u + q_1) (\omega \cos(q_2 + q_3) + \dot{q}_1 \cos(q_2 + q_3))) - \ldots \\
&\ldots l_3 m_3 (\sin(\psi_u + q_1) (\dot{q}_2 \sin(q_2 + q_3) + \dot{q}_3 \sin(q_2 + q_3)))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\bar{c}_{31} &= 0 \\
\bar{c}_{32} &= 0 \\
\bar{c}_{33} &= 0
\end{aligned}
$$

$$\bar{c}_{34} = 0$$
$$\bar{c}_{35} = 0$$
$$\bar{c}_{36} = \dot{q}_2 \left(m_3 \left(l_3 \cos\left(q_2 + q_3\right) + l_2 \cos\left(q_2\right)\right) + l_2 m_2 \cos\left(q_2\right)\right) + l_3 m_3 \dot{q}_3 \cos\left(q_2 + q_3\right)$$
$$\bar{c}_{37} = l_3 m_3 \cos\left(q_2 + q_3\right)\left(\dot{q}_2 + \dot{q}_3\right)$$

$$\bar{c}_{41} = 0$$
$$\bar{c}_{42} = 0$$
$$\bar{c}_{43} = 0$$
$$\bar{c}_{44} = \frac{l_2^2 m_2 \dot{q}_2 \sin\left(2q_2\right)}{2} + \frac{l_2^2 m_3 \dot{q}_2 \sin\left(2q_2\right)}{2} + \frac{l_3^2 m_3 \dot{q}_2 \sin\left(2q_2 + 2q_3\right)}{2} \frac{l_3^2 m_3 \dot{q}_3 \sin\left(2q_2 + 2q_3\right)}{2} + \ldots$$
$$\ldots l_2 l_3 m_3 \dot{q}_2 \sin\left(2q_2 + q_3\right) + \frac{l_2 l_3 m_3 \dot{q}_3 \sin\left(2q_2 + q_3\right)}{2} - \frac{l_2 l_3 m_3 \dot{q}_3 \sin\left(q_3\right)}{2}$$
$$\bar{c}_{45} = l_2^2 m_2 \dot{q}_2 \sin\left(2q_2\right) 2 + \frac{l_2^2 m_3 \dot{q}_2 \sin\left(2q_2\right)}{2} + \frac{l_3^2 m_3 \dot{q}_2 \sin\left(2q_2 + 2q_3\right)}{2} + \frac{l_3^2 m_3 \dot{q}_3 \sin\left(2q_2 + 2q_3\right)}{2} + \ldots$$
$$\ldots l_2 l_3 m_3 \dot{q}_2 \sin\left(2q_2 + q_3\right) + \frac{l_2 l_3 m_3 \dot{q}_3 \sin\left(2q_2 + q_3\right)}{2} - \frac{l_2 l_3 m_3 \dot{q}_3 \sin\left(q_3\right)}{2}$$
$$\bar{c}_{46} = \tfrac{1}{2}\left(\omega + \dot{q}_1\right)\left(l_3^2 m_3 \sin\left(2q_2 + 2q_3\right) + l_2^2 m_2 \sin\left(2q_2\right) + l_2^2 m_3 \sin\left(2q_2\right) + 2 l_2 l_3 m_3 \sin\left(2q_2 + q_3\right)\right)$$
$$\bar{c}_{47} = \tfrac{1}{2} l_3 m_3 \left(\omega + \dot{q}_1\right)\left(l_3 \sin\left(2q_2 + 2q_3\right) - l_2 \sin\left(q_3\right) + l_2 \sin\left(2q_2 + q_3\right)\right)$$

$$\bar{c}_{51} = 0$$
$$\bar{c}_{52} = 0$$
$$\bar{c}_{53} = 0$$

$$\bar{c}_{54} = l_2^2 m_2 \dot{q}_2 \sin(2q_2)\, 2 + \frac{l_2^2 m_3 \dot{q}_2 \sin(2q_2)}{2} + \frac{l_3^2 m_3 \dot{q}_2 \sin(2q_2+2q_3)}{2} + \frac{l_3^2 m_3 \dot{q}_3 \sin(2q_2+2q_3)}{2} + \ldots$$
$$\ldots l_2 l_3 m_3 \dot{q}_2 \sin(2q_2+q_3) + \frac{l_2 l_3 m_3 \dot{q}_3 \sin(2q_2+q_3)}{2} - \frac{l_2 l_3 m_3 \dot{q}_3 \sin(q_3)}{2}$$
$$\bar{c}_{55} = l_2^2 m_2 \dot{q}_2 \sin(2q_2)\, 2 + \frac{l_2^2 m_3 \dot{q}_2 \sin(2q_2)}{2} + \frac{l_3^2 m_3 \dot{q}_2 \sin(2q_2+2q_3)}{2} + \frac{l_3^2 m_3 \dot{q}_3 \sin(2q_2+2q_3)}{2} + \ldots$$
$$\ldots l_2 l_3 m_3 \dot{q}_2 \sin(2q_2+q_3) + \frac{l_2 l_3 m_3 \dot{q}_3 \sin(2q_2+q_3)}{2} - \frac{l_2 l_3 m_3 \dot{q}_3 \sin(q_3)}{2}$$
$$\bar{c}_{56} = \tfrac{1}{2}(\omega + \dot{q}_1)\left(l_3^2 m_3 \sin(2q_2+2q_3) + l_2^2 m_2 \sin(2q_2) + l_2^2 m_3 \sin(2q_2) + 2 l_2 l_3 m_3 \sin(2q_2+q_3)\right)$$
$$\bar{c}_{57} = \tfrac{1}{2} l_3 m_3 (\omega + \dot{q}_1)\left(l_3 \sin(2q_2+2q_3) - l_2 \sin(q_3) + l_2 \sin(2q_2+q_3)\right)$$

$$\bar{c}_{61} = 0$$
$$\bar{c}_{62} = 0$$
$$\bar{c}_{63} = 0$$
$$\bar{c}_{64} = -\tfrac{1}{2}(\omega + \dot{q}_1)\left(l_3^2 m_3 \sin(2q_2+2q_3) + l_2^2 m_2 \sin(2q_2) + l_2^2 m_3 \sin(2q_2) + 2 l_2 l_3 m_3 \sin(2q_2+q_3)\right)$$
$$\bar{c}_{65} = -\tfrac{1}{2}(\omega + \dot{q}_1)\left(l_3^2 m_3 \sin(2q_2+2q_3) + l_2^2 m_2 \sin(2q_2) + l_2^2 m_3 \sin(2q_2) + 2 l_2 l_3 m_3 \sin(2q_2+q_3)\right)$$
$$\bar{c}_{66} = -l_2 l_3 m_3 \dot{q}_3 \sin(q_3)$$
$$\bar{c}_{67} = -l_2 l_3 m_3 \sin(q_3)(\dot{q}_2 + \dot{q}_3)$$

$$\bar{c}_{71} = 0$$
$$\bar{c}_{72} = 0$$
$$\bar{c}_{73} = 0$$
$$\bar{c}_{74} = -\tfrac{1}{2} l_3 m_3 (\omega + \dot{q}_1)\left(l_3 \sin(2q_2+2q_3) - l_2 \sin(q_3) + l_2 \sin(2q_2+q_3)\right)$$

$$\bar{c}_{75} = -\tfrac{1}{2} l_3 m_3 \left(\omega + \dot{q}_1\right) \left(l_3 \sin\left(2q_2 + 2q_3\right) - l_2 \sin\left(q_3\right) + l_2 \sin\left(2q_2 + q_3\right)\right)$$
$$\bar{c}_{76} = l_2 l_3 m_3 \dot{q}_2 \sin\left(q_3\right)$$
$$\bar{c}_{77} = 0$$

E.1.3. Vector de Gravedad

$$\bar{\mathbf{g}}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g\left(m_1 + m_2 + m_3 + m_u\right) \\ 0 \\ 0 \\ g m_3 \left(l_3 \sin\left(q_2 + q_3\right) + l_2 \sin\left(q_2\right)\right) + g l_2 m_2 \sin\left(q_2\right) \\ g l_3 m_3 \sin\left(q_2 + q_3\right) \end{bmatrix} \tag{E.4}$$

E.2. Modelo Dinámico en Función a Velocidades de Referencia

El modelo dinámico en función a velocidades de referencia está dado de la siguiente forma:

$$\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{ref}}(t) = \mathbf{M}\left(\mathbf{q}\right)\dot{\boldsymbol{\mu}}(t) + \mathbf{C}\left(\mathbf{q}, \boldsymbol{\mu}\right)\boldsymbol{\mu}(t) + \mathbf{g}\left(\mathbf{q}\right) \tag{E.5}$$

E.2.1. Matriz de Masa o de Inercia

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} & m_{15} & m_{16} & m_{17} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} & m_{25} & m_{26} & m_{27} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} & m_{35} & m_{36} & m_{37} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} & m_{45} & m_{46} & m_{47} \\ m_{51} & m_{52} & m_{53} & m_{54} & m_{55} & m_{56} & m_{57} \\ m_{61} & m_{62} & m_{63} & m_{64} & m_{65} & m_{66} & m_{67} \\ m_{71} & m_{72} & m_{73} & m_{74} & m_{75} & m_{76} & m_{77} \end{bmatrix} \tag{E.6}$$

Donde:

$m_{11} = \vartheta_1$
$m_{12} = 0$
$m_{13} = 0$
$m_{14} = \vartheta_4 \sin\left(q_1\right)\left(\vartheta_{12}\sin\left(q_2 + q_3\right) + \vartheta_{11}\sin\left(q_2\right) + \vartheta_{13}\sin\left(q_2\right)\right)$
$m_{15} = \vartheta_4 \sin\left(q_1\right)\left(\vartheta_{12}\sin\left(q_2 + q_3\right) + \vartheta_{11}\sin\left(q_2\right) + \vartheta_{13}\sin\left(q_2\right)\right)$

$$m_{16} = \vartheta_4 \cos(q_1) (\vartheta_{12} \cos(q_2 + q_3) + \vartheta_{11} \cos(q_2) + \vartheta_{13} \cos(q_2))$$
$$m_{17} = \vartheta_4 \vartheta_{12} \cos(q_2 + q_3) \cos(q_1)$$

$$m_{21} = 0$$
$$m_{22} = \vartheta_1$$
$$m_{23} = 0$$
$$m_{24} = \vartheta_4 \cos(q_1) (\vartheta_{12} \sin(q_2 + q_3) + \vartheta_{11} \sin(q_2) + \vartheta_{13} \sin(q_2))$$
$$m_{25} = \vartheta_4 \cos(q_1) (\vartheta_{12} \sin(q_2 + q_3) + \vartheta_{11} \sin(q_2) + \vartheta_{13} \sin(q_2))$$
$$m_{26} = \vartheta_4 \sin(q_1) (\vartheta_{12} \cos(q_2 + q_3) + \vartheta_{11} \cos(q_2) + \vartheta_{13} \cos(q_2))$$
$$m_{27} = \vartheta_4 \vartheta_{12} \cos(q_2 + q_3) \sin(q_1)$$

$$m_{31} = 0$$
$$m_{32} = 0$$
$$m_{33} = \vartheta_2$$
$$m_{34} = 0$$
$$m_{35} = 0$$
$$m_{36} = \vartheta_{16} (\vartheta_{12} \sin(q_2 + q_3) + \vartheta_{11} \sin(q_2) + \vartheta_{13} \sin(q_2))$$
$$m_{37} = \vartheta_{12} \vartheta_{16} \sin(q_2 + q_3)$$

$$m_{41} = -\vartheta_3 \sin(q_1) (\vartheta_{12} \sin(q_2 + q_3) + \vartheta_{11} \sin(q_2) + \vartheta_{13} \sin(q_2))$$
$$m_{42} = \vartheta_3 \cos(q_1) (\vartheta_{12} \sin(q_2 + q_3) + \vartheta_{11} \sin(q_2) + \vartheta_{13} \sin(q_2))$$

$$m_{43} = 0$$

$$m_{44} = \frac{1}{2}\vartheta_3 \left(2\vartheta_6 + l_2\vartheta_{11} + l_2\vartheta_{13} + l_3\vartheta_{12} + 2l_2\vartheta_{12}\cos\left(q_3\right) - 2l_2\vartheta_{12}\cos\left(2q_2 + q_3\right) - l_2\vartheta_{11}\cos\left(2q_2\right) - \ldots \right.$$
$$\left. \ldots\, l_2\vartheta_{13}\cos\left(2q_2\right) - l_3\vartheta_{12}\cos\left(2q_2 + 2q_3\right)\right)$$

$$m_{45} = \frac{1}{2}\vartheta_3 \left(2\vartheta_7 + l_2\vartheta_{11} + l_2\vartheta_{13} + l_3\vartheta_{12} + 2l_2\vartheta_{12}\cos\left(q_3\right) - 2l_2\vartheta_{12}\cos\left(2q_2 + q_3\right) - l_2\vartheta_{11}\cos\left(2q_2\right) - \ldots \right.$$
$$\left. \ldots\, l_2\vartheta_{13}\cos\left(2q_2\right) - l_3\vartheta_{12}\cos\left(2q_2 + 2q_3\right)\right)$$

$$m_{46} = 0$$

$$m_{47} = 0$$

$$m_{51} = -\vartheta_5 \sin\left(q_1\right)\left(\vartheta_{12}\sin\left(q_2 + q_3\right) + \vartheta_{11}\sin\left(q_2\right) + \vartheta_{13}\sin\left(q_2\right)\right)$$

$$m_{52} = \vartheta_5 \cos\left(q_1\right)\left(\vartheta_{12}\sin\left(q_2 + q_3\right) + \vartheta_{11}\sin\left(q_2\right) + \vartheta_{13}\sin\left(q_2\right)\right)$$

$$m_{53} = 0$$

$$m_{54} = \tfrac{1}{2}\vartheta_5 \left(2\vartheta_7 + l_2\vartheta_{11} + l_2\vartheta_{13} + l_3\vartheta_{12} + 2l_2\vartheta_{12}\cos\left(q_3\right) - 2l_2\vartheta_{12}\cos\left(2q_2 + q_3\right) - \ldots \right.$$
$$\left. \ldots\, l_2\vartheta_{11}\cos\left(2q_2\right) - l_2\vartheta_{13}\cos\left(2q_2\right) - l_3\vartheta_{12}\cos\left(2q_2 + 2q_3\right)\right)$$

$$m_{55} = \tfrac{1}{2}\vartheta_5 \left(2\vartheta_7 + 2\vartheta_9 + l_2\vartheta_{11} + l_2\vartheta_{13} + l_3\vartheta_{12} + 2l_2\vartheta_{12}\cos\left(q_3\right) - 2l_2\vartheta_{12}\cos\left(2q_2 + q_3\right) - \ldots \right.$$
$$\left. \ldots\, l_2\vartheta_{11}\cos\left(2q_2\right) - l_2\vartheta_{13}\cos\left(2q_2\right) - l_3\vartheta_{12}\cos\left(2q_2 + 2q_3\right)\right)$$

$$m_{56} = 0$$

$$m_{57} = 0$$

$$m_{61} = \vartheta_5 \cos\left(q_1\right)\left(\vartheta_{12}\cos\left(q_2 + q_3\right) + \vartheta_{11}\cos\left(q_2\right) + \vartheta_{13}\cos\left(q_2\right)\right)$$

$$m_{62} = \vartheta_5 \sin\left(q_1\right)\left(\vartheta_{12}\cos\left(q_2 + q_3\right) + \vartheta_{11}\cos\left(q_2\right) + \vartheta_{13}\cos\left(q_2\right)\right)$$

$$
\begin{aligned}
m_{63} &= \vartheta_5 \left(\vartheta_{12} \sin\left(q_2 + q_3\right) + \vartheta_{11} \sin\left(q_2\right) + \vartheta_{13} \sin\left(q_2\right) \right) \\
m_{64} &= 0 \\
m_{65} &= 0 \\
m_{66} &= \vartheta_5 \left(\vartheta_9 + \vartheta_{14} + l_2 \vartheta_{11} + l_2 \vartheta_{13} + l_3 \vartheta_{12} + 2 l_2 \vartheta_{12} \cos\left(q_3\right) \right) \\
m_{67} &= \vartheta_5 \left(\vartheta_{15} + l_3 \vartheta_{12} + l_2 \vartheta_{12} \cos\left(q_3\right) \right) \\
\\
m_{71} &= \vartheta_5 \vartheta_{12} \cos\left(q_2 + q_3\right) \cos\left(q_1\right) \\
m_{72} &= \vartheta_5 \vartheta_{12} \cos\left(q_2 + q_3\right) \sin\left(q_1\right) \\
m_{73} &= \vartheta_5 \vartheta_{12} \sin\left(q_2 + q_3\right) \\
m_{74} &= 0 \\
m_{75} &= 0 \\
m_{76} &= \vartheta_5 \left(\vartheta_{15} + l_3 \vartheta_{12} + l_2 \vartheta_{12} \cos\left(q_3\right) \right) \\
m_{77} &= \vartheta_5 \left(\vartheta_9 + \vartheta_{15} + l_3 \vartheta_{12} \right)
\end{aligned}
$$

E.2.2. Vector de de Fuerzas Centrípetas y de Coriolis

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} & c_{17} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} & c_{27} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} & c_{37} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} & c_{47} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} & c_{56} & c_{57} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66} & c_{67} \\ c_{71} & c_{72} & c_{73} & c_{74} & c_{75} & c_{76} & c_{77} \end{bmatrix} \tag{E.7}$$

Donde:

$$c_{11} = \vartheta_{20}$$
$$c_{12} = -\omega\vartheta_{17}$$
$$c_{13} = 0$$
$$\begin{aligned} c_{14} = &-\vartheta_4 \left(\dot{q}_1\vartheta_{11}\cos(q_1)\sin(q_2) + \dot{q}_2\vartheta_{11}\cos(q_2)\sin(q_1) + \dot{q}_1\vartheta_{13}\cos(q_1)\sin(q_2) + \ldots\right. \\ &\ldots \dot{q}_2\vartheta_{13}\cos(q_2)\sin(q_1) + \omega\vartheta_{11}\cos(q_1)\sin(q_2) + \omega\vartheta_{13}\cos(q_1)\sin(q_2) + \ldots \\ &\ldots \dot{q}_1\vartheta_{12}\cos(q_1)\cos(q_2)\sin(q_3) + \dot{q}_1\vartheta_{12}\cos(q_1)\cos(q_3)\sin(q_2) + \dot{q}_2\vartheta_{12}\cos(q_2)\cos(q_3)\sin(q_1) + \ldots \\ &\ldots \dot{q}_3\vartheta_{12}\cos(q_2)\cos(q_3)\sin(q_1) + \omega\vartheta_{12}\cos(q_1)\cos(q_2)\sin(q_3) + \omega\vartheta_{12}\cos(q_1)\cos(q_3)\sin(q_2) - \ldots \\ &\left.\ldots \dot{q}_2\vartheta_{12}\sin(q_1)\sin(q_2)\sin(q_3) - \dot{q}_3\vartheta_{12}\sin(q_1)\sin(q_2)\sin(q_3)\right) \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} c_{15} = &-\vartheta_4 \left(\dot{q}_1\vartheta_{11}\cos(q_1)\sin(q_2) + \dot{q}_2\vartheta_{11}\cos(q_2)\sin(q_1) + \dot{q}_1\vartheta_{13}\cos(q_1)\sin(q_2) + \ldots\right. \\ &\ldots \dot{q}_2\vartheta_{13}\cos(q_2)\sin(q_1) + \omega\vartheta_{11}\cos(q_1)\sin(q_2) + \omega\vartheta_{13}\cos(q_1)\sin(q_2) + \ldots \\ &\left.\ldots \dot{q}_1\vartheta_{12}\cos(q_1)\cos(q_2)\sin(q_3) + \dot{q}_1\vartheta_{12}\cos(q_1)\cos(q_3)\sin(q_2) + \dot{q}_2\vartheta_{12}\cos(q_2)\cos(q_3)\sin(q_1) + \ldots\right. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\ldots\ \dot{q}_3\vartheta_{12}\cos(q_2)\cos(q_3)\sin(q_1)+\omega\vartheta_{12}\cos(q_1)\cos(q_2)\sin(q_3)+\omega\vartheta_{12}\cos(q_1)\cos(q_3)\sin(q_2)\ -\ldots\\
&\ldots\ \dot{q}_2\vartheta_{12}\sin(q_1)\sin(q_2)\sin(q_3)-\dot{q}_3\vartheta_{12}\sin(q_1)\sin(q_2)\sin(q_3))\\
c_{16} &= -\vartheta_4\,(\dot{q}_1\vartheta_{11}\cos(q_2)\sin(q_1)+\dot{q}_2\vartheta_{11}\cos(q_1)\sin(q_2)+\dot{q}_1\vartheta_{13}\cos(q_2)\sin(q_1)\ +\ldots\\
&\ldots\ \dot{q}_2\vartheta_{13}\cos(q_1)\sin(q_2)+\omega\vartheta_{11}\cos(q_2)\sin(q_1)+\omega\vartheta_{13}\cos(q_2)\sin(q_1)\ +\ldots\\
&\ldots\ \dot{q}_1\vartheta_{12}\cos(q_2)\cos(q_3)\sin(q_1)+\dot{q}_2\vartheta_{12}\cos(q_1)\cos(q_2)\sin(q_3)+\dot{q}_2\vartheta_{12}\cos(q_1)\cos(q_3)\sin(q_2)\ +\ldots\\
&\ldots\ \dot{q}_3\vartheta_{12}\cos(q_1)\cos(q_2)\sin(q_3)+\dot{q}_3\vartheta_{12}\cos(q_1)\cos(q_3)\sin(q_2)+\omega\vartheta_{12}\cos(q_2)\cos(q_3)\sin(q_1)\ -\ldots\\
&\ldots\ \dot{q}_1\vartheta_{12}\sin(q_1)\sin(q_2)\sin(q_3)-\omega\vartheta_{12}\sin(q_1)\sin(q_2)\sin(q_3))\\
c_{17} &= -\vartheta_4\vartheta_{12}\,(\dot{q}_1\cos(q_2)\cos(q_3)\sin(q_1)+\dot{q}_2\cos(q_1)\cos(q_2)\sin(q_3)+\dot{q}_2\cos(q_1)\cos(q_3)\sin(q_2)\ +\ldots\\
&\ldots\ \dot{q}_3\cos(q_1)\cos(q_2)\sin(q_3)+\dot{q}_3\cos(q_1)\cos(q_3)\sin(q_2)+\omega\cos(q_2)\cos(q_3)\sin(q_1)\ -\ldots\\
&\ldots\ \dot{q}_1\sin(q_1)\sin(q_2)\sin(q_3)-\omega\sin(q_1)\sin(q_2)\sin(q_3))\\
\\
c_{21} &= \omega\vartheta_{17}\\
c_{22} &= \vartheta_{20}\\
c_{23} &= 0\\
c_{24} &= -\vartheta_4\,(\dot{q}_1\vartheta_{11}\sin(q_1)\sin(q_2)+\dot{q}_1\vartheta_{13}\sin(q_1)\sin(q_2)+\omega\vartheta_{11}\sin(q_1)\sin(q_2)\ +\ldots\\
&\ldots\ \omega\vartheta_{13}\sin(q_1)\sin(q_2)-\dot{q}_2\vartheta_{11}\cos(q_1)\cos(q_2)-\dot{q}_2\vartheta_{13}\cos(q_1)\cos(q_2)\ -\ldots\\
&\ldots\ \dot{q}_2\vartheta_{12}\cos(q_1)\cos(q_2)\cos(q_3)-\dot{q}_3\vartheta_{12}\cos(q_1)\cos(q_2)\cos(q_3)+\dot{q}_1\vartheta_{12}\cos(q_2)\sin(q_1)\sin(q_3)\ +\ldots\\
&\ldots\ \dot{q}_1\vartheta_{12}\cos(q_3)\sin(q_1)\sin(q_2)+\dot{q}_2\vartheta_{12}\cos(q_1)\sin(q_2)\sin(q_3)+\dot{q}_3\vartheta_{12}\cos(q_1)\sin(q_2)\sin(q_3)\ +\ldots\\
&\ldots\ \omega\vartheta_{12}\cos(q_2)\sin(q_1)\sin(q_3)+\omega\vartheta_{12}\cos(q_3)\sin(q_1)\sin(q_2))\\
c_{25} &= -\vartheta_4\,(\dot{q}_1\vartheta_{11}\sin(q_1)\sin(q_2)+\dot{q}_1\vartheta_{13}\sin(q_1)\sin(q_2)+\omega\vartheta_{11}\sin(q_1)\sin(q_2)\ +\ldots\\
&\ldots\ \omega\vartheta_{13}\sin(q_1)\sin(q_2)-\dot{q}_2\vartheta_{11}\cos(q_1)\cos(q_2)-\dot{q}_2\vartheta_{13}\cos(q_1)\cos(q_2)\ -\ldots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\ldots \dot{q}_2\vartheta_{12}\cos(q_1)\cos(q_2)\cos(q_3) - \dot{q}_3\vartheta_{12}\cos(q_1)\cos(q_2)\cos(q_3) + \dot{q}_1\vartheta_{12}\cos(q_2)\sin(q_1)\sin(q_3) + \ldots \\
&\ldots \dot{q}_1\vartheta_{12}\cos(q_3)\sin(q_1)\sin(q_2) + \dot{q}_2\vartheta_{12}\cos(q_1)\sin(q_2)\sin(q_3) + \dot{q}_3\vartheta_{12}\cos(q_1)\sin(q_2)\sin(q_3) + \ldots \\
&\ldots \omega\vartheta_{12}\cos(q_2)\sin(q_1)\sin(q_3) + \omega\vartheta_{12}\cos(q_3)\sin(q_1)\sin(q_2)) \\
c_{26} &= -\vartheta_4\,(\dot{q}_2\vartheta_{11}\sin(q_1)\sin(q_2) + \dot{q}_2\vartheta_{13}\sin(q_1)\sin(q_2) - \dot{q}_1\vartheta_{11}\cos(q_1)\cos(q_2) - \ldots \\
&\ldots \dot{q}_1\vartheta_{13}\cos(q_1)\cos(q_2) - \omega\vartheta_{11}\cos(q_1)\cos(q_2) - \omega\vartheta_{13}\cos(q_1)\cos(q_2) - \ldots \\
&\ldots \dot{q}_1\vartheta_{12}\cos(q_1)\cos(q_2)\cos(q_3) - \omega\vartheta_{12}\cos(q_1)\cos(q_2)\cos(q_3) + \dot{q}_1\vartheta_{12}\cos(q_1)\sin(q_2)\sin(q_3) + \ldots \\
&\ldots \dot{q}_2\vartheta_{12}\cos(q_2)\sin(q_1)\sin(q_3) + \dot{q}_2\vartheta_{12}\cos(q_3)\sin(q_1)\sin(q_2) + \dot{q}_3\vartheta_{12}\cos(q_2)\sin(q_1)\sin(q_3) + \ldots \\
&\ldots \dot{q}_3\vartheta_{12}\cos(q_3)\sin(q_1)\sin(q_2) + \omega\vartheta_{12}\cos(q_1)\sin(q_2)\sin(q_3)) \\
c_{27} &= -\vartheta_4\vartheta_{12}\,(\dot{q}_1\cos(q_1)\sin(q_2)\sin(q_3) - \omega\cos(q_1)\cos(q_2)\cos(q_3) - \dot{q}_1\cos(q_1)\cos(q_2)\cos(q_3) + \ldots \\
&\ldots \dot{q}_2\cos(q_2)\sin(q_1)\sin(q_3) + \dot{q}_2\cos(q_3)\sin(q_1)\sin(q_2) + \dot{q}_3\cos(q_2)\sin(q_1)\sin(q_3) + \ldots \\
&\ldots \dot{q}_3\cos(q_3)\sin(q_1)\sin(q_2) + \omega\cos(q_1)\sin(q_2)\sin(q_3))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c_{31} &= 0 \\
c_{32} &= 0 \\
c_{33} &= \vartheta_{18} \\
c_{34} &= 0 \\
c_{35} &= 0 \\
c_{36} &= \vartheta_{16}\,(\dot{q}_2\vartheta_{11}\cos(q_2) + \dot{q}_2\vartheta_{13}\cos(q_2) + \dot{q}_2\vartheta_{12}\cos(q_2+q_3) + \dot{q}_3\vartheta_{12}\cos(q_2+q_3)) \\
c_{37} &= \vartheta_{12}\vartheta_{16}\cos(q_2+q_3)\,(\dot{q}_2+\dot{q}_3)
\end{aligned}
$$

$$
c_{41} = \omega\vartheta_3\cos(q_1)\,(\vartheta_{12}\sin(q_2+q_3) + \vartheta_{11}\sin(q_2) + \vartheta_{13}\sin(q_2))
$$

$$
\begin{aligned}
c_{42} &= \omega\vartheta_3 \sin(q_1)\left(\vartheta_{12}\sin(q_2+q_3)+\vartheta_{11}\sin(q_2)+\vartheta_{13}\sin(q_2)\right)\\
c_{43} &= 0\\
c_{44} &= \frac{1}{2}\vartheta_3\left(2\vartheta_{22}+l_3\dot{q}_2\vartheta_{12}\sin(2q_2+2q_3)\right. + ...\\
&\quad ... \; l_3\dot{q}_3\vartheta_{12}\sin(2q_2+2q_3) - l_2\dot{q}_3\vartheta_{12}\sin(q_3) + ...\\
&\quad ... \; 2l_2\dot{q}_2\vartheta_{12}\sin(2q_2+q_3) + l_2\dot{q}_3\vartheta_{12}\sin(2q_2+q_3) + l_2\dot{q}_2\vartheta_{11}\sin(2q_2) + ...\\
&\quad \left. ... \; l_2\dot{q}_2\vartheta_{13}\sin(2q_2)\right)\\
c_{45} &= \tfrac{1}{2}\vartheta_3\left(l_3\dot{q}_2\vartheta_{12}\sin(2q_2+2q_3)+l_3\dot{q}_3\vartheta_{12}\sin(2q_2+2q_3)-l_2\dot{q}_3\vartheta_{12}\sin(q_3)+2l_2\dot{q}_2\vartheta_{12}\sin(2q_2+q_3) + ...\right.\\
&\quad \left. ... \; l_2\dot{q}_3\vartheta_{12}\sin(2q_2+q_3)+l_2\dot{q}_2\vartheta_{11}\sin(2q_2)+l_2\dot{q}_2\vartheta_{13}\sin(2q_2)\right)\\
c_{47} &= \tfrac{1}{2}\vartheta_3\vartheta_{12}\left(\dot{q}_1+\omega\right)\left(l_3\sin(2q_2+2q_3)-l_2\sin(q_3)+l_2\sin(2q_2+q_3)\right)\\
\\
c_{51} &= \omega\vartheta_5\cos(q_1)\left(\vartheta_{12}\sin(q_2+q_3)+\vartheta_{11}\sin(q_2)+\vartheta_{13}\sin(q_2)\right)\\
c_{52} &= \omega\vartheta_5\sin(q_1)\left(\vartheta_{12}\sin(q_2+q_3)+\vartheta_{11}\sin(q_2)+\vartheta_{13}\sin(q_2)\right)\\
c_{53} &= 0\\
c_{54} &= \tfrac{1}{2}\vartheta_5\left(l_3\dot{q}_2\vartheta_{12}\sin(2q_2+2q_3)+l_3\dot{q}_3\vartheta_{12}\sin(2q_2+2q_3)-l_2\dot{q}_3\vartheta_{12}\sin(q_3)+2l_2\dot{q}_2\vartheta_{12}\sin(2q_2+q_3) + ...\right.\\
&\quad \left. ... \; l_2\dot{q}_3\vartheta_{12}\sin(2q_2+q_3)+l_2\dot{q}_2\vartheta_{11}\sin(2q_2)+l_2\dot{q}_2\vartheta_{13}\sin(2q_2)\right)\\
c_{55} &= \tfrac{1}{2}\vartheta_5\left(2\vartheta_8+2\vartheta_{10}+l_3\dot{q}_2\vartheta_{12}\sin(2q_2+2q_3)+l_3\dot{q}_3\vartheta_{12}\sin(2q_2+2q_3) - ...\right.\\
&\quad ... \; l_2\dot{q}_3\vartheta_{12}\sin(q_3)+2l_2\dot{q}_2\vartheta_{12}\sin(2q_2+q_3)+l_2\dot{q}_3\vartheta_{12}\sin(2q_2+q_3) + ...\\
&\quad \left. ... \; l_2\dot{q}_2\vartheta_{11}\sin(2q_2)+l_2\dot{q}_2\vartheta_{13}\sin(2q_2)\right)\\
c_{56} &= \tfrac{1}{2}\vartheta_5\left(\dot{q}_1+\omega\right)\left(2l_2\vartheta_{12}\sin(2q_2+q_3)+l_2\vartheta_{11}\sin(2q_2)+l_2\vartheta_{13}\sin(2q_2)+l_3\vartheta_{12}\sin(2q_2+2q_3)\right)\\
c_{57} &= \tfrac{1}{2}\vartheta_5\vartheta_{12}\left(\dot{q}_1+\omega\right)\left(l_3\sin(2q_2+2q_3)-l_2\sin(q_3)+l_2\sin(2q_2+q_3)\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c_{61} &= \omega\vartheta_5 \sin(q_1)\left(\vartheta_{12}\cos(q_2+q_3)+\vartheta_{11}\cos(q_2)+\vartheta_{13}\cos(q_2)\right)\\
c_{62} &= -\omega\vartheta_5 \cos(q_1)\left(\vartheta_{12}\cos(q_2+q_3)+\vartheta_{11}\cos(q_2)+\vartheta_{13}\cos(q_2)\right)\\
c_{63} &= 0\\
c_{64} &= -\tfrac{1}{2}\vartheta_5\left(\dot{q}_1+\omega\right)\left(2l_2\vartheta_{12}\sin(2q_2+q_3)+l_2\vartheta_{11}\sin(2q_2)+l_2\vartheta_{13}\sin(2q_2)+l_3\vartheta_{12}\sin(2q_2+2q_3)\right)\\
c_{65} &= -\tfrac{1}{2}\vartheta_5\left(\dot{q}_1+\omega\right)\left(2l_2\vartheta_{12}\sin(2q_2+q_3)+l_2\vartheta_{11}\sin(2q_2)+l_2\vartheta_{13}\sin(2q_2)+l_3\vartheta_{12}\sin(2q_2+2q_3)\right)\\
c_{66} &= \vartheta_5\left(\vartheta_8+\vartheta_{10}-l_2\dot{q}_3\vartheta_{12}\sin(q_3)\right)\\
c_{67} &= -l_2\vartheta_5\vartheta_{12}\sin(q_3)\left(\dot{q}_2+\dot{q}_3\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c_{71} &= \omega\vartheta_5\vartheta_{12}\cos(q_2+q_3)\sin(q_1)\\
c_{72} &= -\omega\vartheta_5\vartheta_{12}\cos(q_2+q_3)\cos(q_1)\\
c_{73} &= 0\\
c_{74} &= -\tfrac{1}{2}\vartheta_5\vartheta_{12}\left(\dot{q}_1+\omega\right)\left(l_3\sin(2q_2+2q_3)-l_2\sin(q_3)+l_2\sin(2q_2+q_3)\right)\\
c_{75} &= -\tfrac{1}{2}\vartheta_5\vartheta_{12}\left(\dot{q}_1+\omega\right)\left(l_3\sin(2q_2+2q_3)-l_2\sin(q_3)+l_2\sin(2q_2+q_3)\right)\\
c_{76} &= l_2\dot{q}_2\vartheta_5\vartheta_{12}\sin(q_3)\\
c_{77} &= \vartheta_{19}
\end{aligned}
$$

E.2.3. Vector de Gravedad

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g\vartheta_{21} \\ 0 \\ 0 \\ g\vartheta_5\left(\vartheta_{12}\sin\left(q_2+q_3\right)+\vartheta_{11}\sin\left(q_2\right)+\vartheta_{13}\sin\left(q_2\right)\right) \\ g\vartheta_5\vartheta_{12}\sin\left(q_2+q_3\right) \end{bmatrix} \tag{E.8}$$

APÉNDICE F

Identificación y Validación del Modelo Dinámico

La identificación y validación de los parámetros del modelo dinámico del robot manipulador aéreo se hace uso de datos reales para estimar los valores de los parámetros que mejor describan el comportamiento del sistema en condiciones de vuelo reales.

F.1. Proceso de Identificación y Validación

El procedimiento consiste en dos etapas:

1. Proceso en línea (**On-Line**).

2. Proceso fuera de línea (**Off-Line**).

F.1.1. Proceso en Línea

Esta etapa consiste en inyectar señales de referencia al robot real $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{xi}} \in \mathbb{R}^7$. Obteniendo así señales reales que proporciona el robot $\boldsymbol{\mu}^0(t) \in \mathbb{R}^7$ en función a las velocidades de referencia inyectadas (Figura F.1). Es importante mencionar que las señales de referencia deben ser capaces de excitar toda la dinámica del robot. En [201] se presenta la excitación del manipulador aéreo físico para la obtención de las señales del robot.



Figura F.1: Proceso en línea (On-Line).

F.1.2. Proceso Fuera de Línea

Este proceso se ejecuta fuera de línea, es decir, una ves obtenido varios datos del robot en función a múltiples señales de referencia (Figura F.2). Seguidamente se realizar la identificación de los parámetros utilizando el modelo matemático planteado mediante cualquier método de identificación, por ejemplo, mínimos cuadrados o métodos de optimización. Finalmente, se realiza la validación del modelo con los parámetros obtenidos de la identificación.

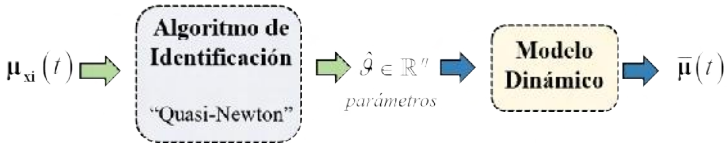


Figura F.2: Proceso fuera de línea (Off-Line).

El objetivo de este procedimiento es ajustar de la mejor manera posible el modelo dinámico hasta que represente con gran similitud la respuesta del manipulador aéreo ante distintas señales de excitación $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{xi}} \in \mathbb{R}^7$.

F.2. Validación del Modelo Dinámico

La validación del modelo dinámico permite observar y verificar que los parámetros identificados del modelo dinámico (Apéndice E.2) son aceptables. Esto se hace mediante la comparación ante las entradas de referencia $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{xi}} \in \mathbb{R}^7$ inyectadas al robot manipulador aéreo (Apéndice A) de las velocidades reales obtenidas el robot $\boldsymbol{\mu}^0(t) \in \mathbb{R}^7$ con las velocidades obtenidas del modelo dinámico $\bar{\boldsymbol{\mu}}(t) \in \mathbb{R}^7$. Para la validación se considera dos vectores diferentes de velocidad de referencia $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{xi}} \in \mathbb{R}^7$. La Figura F.3 muestra el comportamiento del modelo con el primer tipo de señales de referencia para el hexarrotor, mientras que la Figura F.4 muestra el resultado para el brazo robótio.

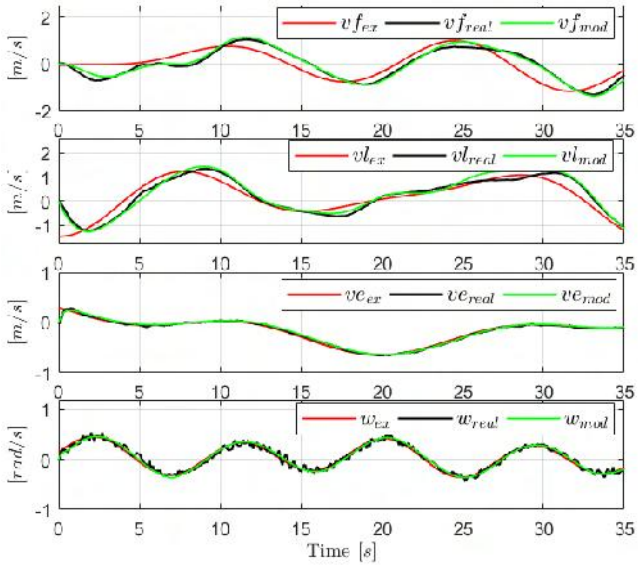


Figura F.3: Velocidades del hexarrotor.

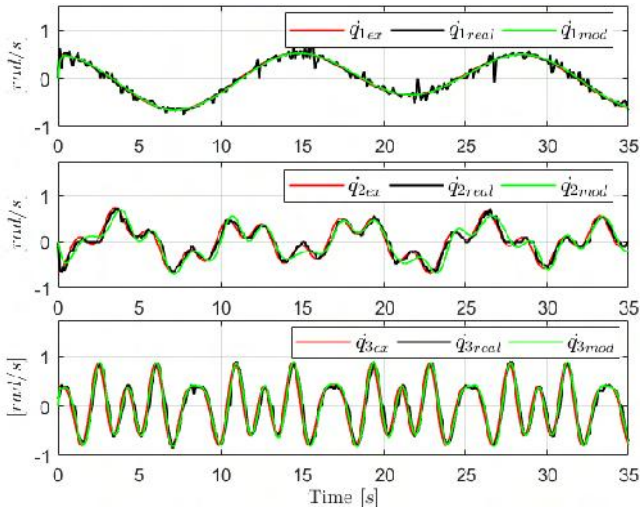


Figura F.4: Velocidades de las articulaciones del brazo robótico.

Las señales con el subíndice "*ex*" representa la velocidad de excitación al sistema robótico, "*real*" representa la velocidad real producida por el robot y "*mod*" es la velocidad obtenida del modelo dinámico del manipulador aéreo.

Ahora, la Figura F.5 muestra la validación del modelo dinámico con entradas de referencia step-type para la plataforma aérea y la Figura F.6 para las articulaciones del brazo robótico. La similitud entre las señales reales y las del modelo valida el modelo dinámico identificado.

Observación F.1 *Las señales utilizadas para la validación del modelo dinámico son diferentes de las señales utilizadas para la identificación de los parámetros del modelo.*

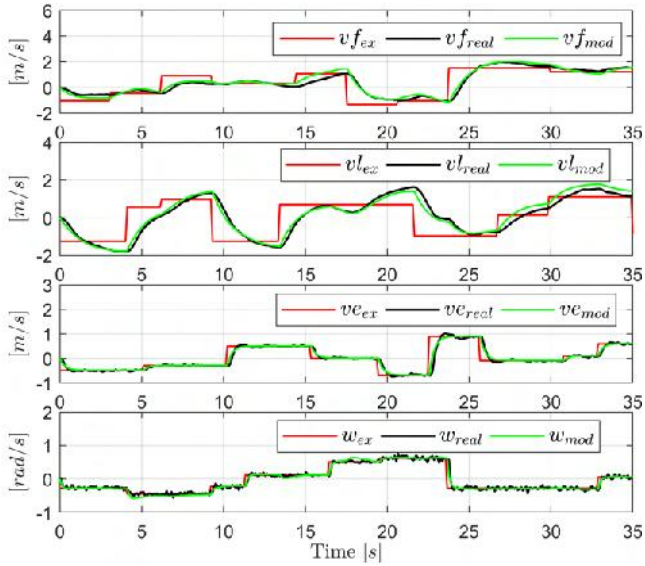


Figura F.5: Velocidades del hexarrotor ante señales de tipo escalón.

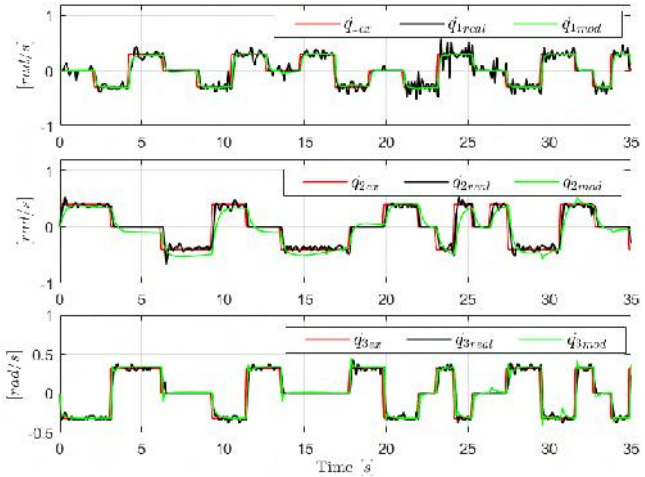


Figura F.6: Velocidades del brazo robótico ante señales de tipo escalón.

F.3. Parámetros del Modelo Dinámico

El modelo dinámico cuenta con viente y siete parámetros, los cuales se muestran en la Tabla F.1

Tabla F.1
Parámetros identificados y validados del modelo dinámico en función a velocidades de referencia

$\vartheta_1 = 0{,}947549$	$\vartheta_2 = 0{,}919743$	$\vartheta_3 = 9{,}4858 \times 10^{-4}$
$\vartheta_4 = 0{,}00589$	$\vartheta_5 = 0{,}348479$	$\vartheta_6 = 0{,}00327298$
$\vartheta_7 = 0{,}101957$	$\vartheta_8 = 0{,}358049$	$\vartheta_9 = 0{,}104979$
$\vartheta_{10} = 0{,}00103795$	$\vartheta_{11} = 0{,}00327298$	$\vartheta_{12} = 0{,}103164$
$\vartheta_{13} = 0{,}373259$	$\vartheta_{14} = 0{,}391826$	$\vartheta_{15} = 0{,}133687$
$\vartheta_{16} = -0{,}114953$	$\vartheta_{17} = -0{,}0108092$	$\vartheta_{18} = 0{,}207709$
$\vartheta_{19} = 0{,}478103$	$\vartheta_{20} = -0{,}0363918$	$\vartheta_{21} = 0{,}783627$
$\vartheta_{22} = 0{,}764114$	$\vartheta_{23} = 0{,}997509$	$\vartheta_{24} = 2{,}67153$
$\vartheta_{25} = 0{,}968225$	$\vartheta_{26} = 0{,}978286$	$\vartheta_{27} = 2{,}19235$

Bibliografía

[1] P. Corke, *Robotics, Vision and Control* (Springer Tracts in Advanced Robotics), red. de B. Siciliano y O. Khatib. Berlin, Heidelberg: Springer, 2011, vol. 73, ISBN: 978-3-642-20144-8. DOI: 10.1007/978-3-642-20144-8. dirección: http://link.springer.com/10.1007/978-3-642-20144-8.

[2] B. S. Dhillon, *Robot Reliability and Safety*. New York, NY: Springer, 1991, ISBN: 978-1-4612-3148-6. DOI: 10.1007/978-1-4612-3148-6. dirección: http://link.springer.com/10.1007/978-1-4612-3148-6.

[3] KUKA Roboter GmbH, *KUKA ready2_spot – Soldadura por puntos con robots KUKA*, 2025. dirección: https://www.kuka.com/es-es/productos-servicios/sistemas-de-robot/ready2_use/kuka-ready2_spot.

[4] Industria al Día, *YuMi, robot industrial de doble brazo*, 2025. dirección: https://industriaaldia.com/product/yumi-robot-industrial-de-doble-brazo/.

[5] Mitsubishi Electric Corporation, *Robot de 6 ejes serie RV-4FR-D*, 2025. dirección: https://es.mitsubishielectric.com/fa/p

roducts/rbt/robot/vertical/rvfr-series/rv-4fr-d.html.

[6] *Robot Manipulators and Control Systems*. Boston, MA: Springer US, 2007, págs. 35-107, ISBN: 978-0-387-23326-0. DOI: 10.1007/978-0-387-23326-0_2. dirección: https://doi.org/10.1007/978-0-387-23326-0_2.

[7] M. Hutter y R. Siegwart, eds., *Field and Service Robotics*, vol. 5, Springer Proceedings in Advanced Robotics, Cham: Springer International Publishing, 2018, ISBN: 978-3-319-67360-8. DOI: 10.1007/978-3-319-67361-5. dirección: http://link.springer.com/10.1007/978-3-319-67361-5.

[8] S. Saunderson y G. Nejat, «How robots influence humans: A survey of nonverbal communication in social human–robot interaction», *International Journal of Social Robotics*, vol. 11, n.º 4, págs. 575-608, 1 de ago. de 2019, ISSN: 1875-4805. DOI: 10.1007/s12369-019-00523-0. visitado 12 de dic. de 2024. dirección: https://doi.org/10.1007/s12369-019-00523-0.

[9] A. Rodić, D. Pisla y H. Bleuler, eds., *New Trends in Medical and Service Robots: Challenges and Solutions* (Mechanisms and Machine Science). Cham: Springer International Publishing, 2014, vol. 20, ISBN: 978-3-319-05430-8. DOI: 10.1007/978-3-319-05431-5. dirección: https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-319-05431-5.

[10] R. A. Suarez Fernandez, D. Grande, A. Martins, L. Bascetta, S. Dominguez y C. Rossi, «Modeling and Control of Underwater Mine Explorer Robot UX-1», *IEEE Access*, vol. 7, págs. 39 432-39 447, 2019. DOI: 10.1109/ACCESS.2019.2907193.

[11] R. López, H. Aguilar, S. Salazar, R. Lozano y J. A. Torres, «Modelado y Control de un Exoesqueleto para la Rehabilitación de Extremidad Inferior con dos grados de libertad», *Revista Iberoamericana de Automática e Informática industrial*, vol. 11, n.º 3, págs. 304-314, 2014, Number: 3, ISSN: 1697-7920. DOI: 10.1016/j.riai.2014.02.008. dirección: https://polipapers.upv.es/index.php/RIAI/article/view/9443.

[12] D. Voth, «A new generation of military robots», *IEEE Intelligent Systems*, vol. 19, n.º 4, págs. 2-3, 2004. DOI: 10.1109/MIS.2004.30.

[13] L. Murray, «Meet the Tokyo robots», *Engineering & Technology*, vol. 16, n.º 6, págs. 28-31, 2021. DOI: 10.1049/et.2021.0605.

[14] M. T. Gettman, M. L. Blute, G. K. Chow, R. Neururer, G. Bartsch y R. Peschel, «Robotic-assisted laparoscopic partial nephrectomy: Technique and initial clinical experience with daVinci robotic system», *Urology*, vol. 64, n.º 5, págs. 914-918, 1 de nov. de 2004, ISSN: 0090-4295. DOI: 10.1016/j.urology.2004.06.049. visitado 12 de dic. de 2024. dirección: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0090429504008143.

[15] J. Keller. «Army Testing Robot Dogs Armed with Artificial Intelligence-Enabled Rifles in Middle East», Military.com. Section: Daily News. dirección: https://www.military.com/daily-news/2024/10/01/army-has-sent-armed-robot-dog-middle-east-testing.html.

[16] N. Michael, D. Scaramuzza y V. Kumar, «Special issue on micro-UAV perception and control», *Autonomous Robots*, vol. 33, n.º 1, págs. 1-3, 2012, ISSN: 1573-7527. DOI: 10.1007/s10514-012-9295-y. dirección: https://doi.org/10.1007/s10514-012-9295-y.

[17] G. C. S. Cruz y P. M. M. Encarnação, «Obstacle Avoidance for Unmanned Aerial Vehicles», *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, vol. 65, n.º 1, págs. 203-217, 2012, ISSN: 1573-0409. DOI: 10.1007/s10846-011-9587-z. dirección: https://doi.org/10.1007/s10846-011-9587-z.

[18] J. Tiemann y C. Wietfeld, «Scalable and precise multi-UAV indoor navigation using TDOA-based UWB localization», en *2017 International Conference on Indoor Positioning and Indoor Navigation (IPIN)*, 2017, págs. 1-7. DOI: 10.1109/IPIN.2017.8115937.

[19] D. Jones, «Power line inspection - a UAV concept», en *2005 The IEE Forum on Autonomous Systems (Ref. No. 2005/11271)*, 2005, 8 pp.-. DOI: 10.1049/ic:20050472.

[20] J. J. Castillo-Zamora, J. Escareno, I. Boussaada, O. Labbani y K. Camarillo, «Modeling and Control of an Aerial Multi-Cargo System: Robust Acquiring and Transport Operations», en *2019 18th European Control Conference (ECC)*, 2019, págs. 1708-1713. DOI: 10.23919/ECC.2019.8796045.

[21] P. Tokekar, J. V. Hook, D. Mulla y V. Isler, «Sensor Planning for a Symbiotic UAV and UGV System for Precision Agriculture», *IEEE Transactions on Robotics*, vol. 32, n.º 6, págs. 1498-1511, 2016. DOI: 10.1109/TRO.2016.2603528.

[22] Z. Zaheer, A. Usmani, E. Khan y M. A. Qadeer, «Aerial surveillance system using UAV», en *2016 Thirteenth International Conference on Wireless and Optical Communications Networks (WOCN)*, 2016, págs. 1-7. DOI: 10.1109/WOCN.2016.7759885.

[23] A. G. Acosta et al., «E-tourism: Governmental planning and management mechanism», en *Augmented Reality, Virtual Reality, and Computer Graphics*, L. T. De Paolis y P. Bourdot, eds., Cham: Springer International Publishing, 2018, págs. 162-170, ISBN: 978-3-319-95270-3. DOI: 10.1007/978-3-319-95270-3_11.

[24] A. Elfes, S. Siqueira Bueno, M. Bergerman y J. Ramos, «A semi-autonomous robotic airship for environmental monitoring missions», en *Proceedings. 1998 IEEE International Conference on Robotics and Automation (Cat. No.98CH36146)*, vol. 4, 1998, 3449-3455 vol.4. DOI: 10.1109/ROBOT.1998.680971.

[25] I. H. B. Pizetta, A. S. Brandão y M. Sarcinelli-Filho, «Modelling and control of a PVTOL quadrotor carrying a suspended load», en *2015 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS)*, 2015, págs. 444-450. DOI: 10.1109/ICUAS.2015.7152321.

[26] T. Bacelar, C. Cardeira y P. Oliveira, «Cooperative Load Transportation with Quadrotors», en *2019 IEEE International Conference on Autonomous Robot Systems and Competitions (ICARSC)*, 2019, págs. 1-6. DOI: 10.1109/ICARSC.2019.8733619.

[27] K. Sreenath, T. Lee y V. Kumar, «Geometric control and differential flatness of a quadrotor UAV with a cable-suspended load», en *52nd IEEE Conference on Decision and Control*, ISSN: 0191-2216, dic. de 2013, págs. 2269-2274. DOI: 10.1109/CDC.2013.6760219. visitado 9 de dic. de 2024. dirección: https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/6760219.

[28] F. Rossomando et al., «Aerial load transportation with multiple quadrotors based on a kinematic controller and a neural SMC dynamic compensation», *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, vol. 100, n.º 2, págs. 519-530, 1 de nov. de 2020, ISSN: 1573-0409. DOI: 10.1007/s10

846-020-01195-z. visitado 9 de dic. de 2024. dirección: https://doi.org/10.1007/s10846-020-01195-z.

[29] A. Ollero y B. Siciliano, eds., *Aerial Robotic Manipulation: Research, Development and Applications* (Springer Tracts in Advanced Robotics). Springer, 2019, vol. 1, ISBN: 978-3-030-12945-3. DOI: 10.1007/978-3-030-12945-3. dirección: https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-030-12945-3.

[30] A. Ollero, M. Tognon, A. Suarez, D. Lee y A. Franchi, «Past, Present, and Future of Aerial Robotic Manipulators», *IEEE Transactions on Robotics*, vol. 38, n.º 1, págs. 626-645, 2022. DOI: 10.1109/TRO.2021.3084395.

[31] A. Suarez, P. Grau, G. Heredia y A. Ollero, «Winged Aerial Manipulation Robot with Dual Arm and Tail», *Applied Sciences*, vol. 10, n.º 14, 2020, ISSN: 2076-3417. DOI: 10.3390/app10144783.

[32] G. Heredia et al., «Control of a multirotor outdoor aerial manipulator», en *2014 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, ISSN: 2153-0866, sep. de 2014, págs. 3417-3422. DOI: 10.1109/IROS.2014.6943038. visitado 9 de dic. de 2024. dirección: https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/6943038.

[33] H. Yoshinada et al., «Dual-Arm Construction Robot with Remote-Control Function», en *Disaster Robotics: Results from the ImPACT Tough Robotics Challenge*, S. Tadokoro, ed. Cham: Springer International Publishing, 2019, págs. 195-264, ISBN: 978-3-030-05321-5. DOI: 10.1007/978-3-030-05321-5_5.

[34] A. Suárez Fernández-Miranda, «Compliant Aerial Manipulation», Disponible en línea: https://files.core.ac.uk/download/186617206.pdf, PhD Thesis, University of Seville, Spain, Seville, Spain, 2018.

[35] P. Yang, H. Wang, Z. Liu, Z. Dong y L. Zhang, «Development of an Anthropomorphic and Dexterous Dual-Arm System for Aerial Cooperative Bimanual Manipulation», *Machines*, vol. 10, n.º 4, 2022, ISSN: 2075-1702. DOI: 10.3390/machines10040273.

[36] C.-A. Lee y T.-H. Cheng, «Concurrent Learning for Cooperative UAV Transportation of Unknown Payloads», *IEEE Open Journal of Control Systems*, vol. 4, págs. 187-198, 2025. DOI: 10.1109/OJCSYS.2024.3517317.

[37] P. E. Pounds, D. R. Bersak y A. M. Dollar, «The Yale Aerial Manipulator: Grasping in flight», en *2011 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, ISSN: 1050-4729, mayo de 2011, págs. 2974-2975. DOI: 10.1109/ICRA.2011.5980477. visitado 9 de dic. de 2024. dirección: https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/5980477.

[38] P. E. I. Pounds, D. R. Bersak y A. M. Dollar, «Grasping from the air: Hovering capture and load stability», en *2011 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, ISSN: 1050-4729, mayo de 2011, págs. 2491-2498. DOI: 10.1109/ICRA.2011.5980314. visitado 9 de dic. de 2024. dirección: https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/5980314.

[39] D. Mellinger, Q. Lindsey, M. Shomin y V. Kumar, «Design, modeling, estimation and control for aerial grasping and manipulation», en *2011 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, 2011, págs. 2668-2673. DOI: 10.1109/IROS.2011.6094871.

[40] J. Thomas, J. Polin, K. Sreenath y V. Kumar, «Avian-Inspired Grasping for Quadrotor Micro UAVs», en *IDETC-CIE2013*, V06AT07A014, Volume 6A: 37th Mechanisms y Robotics Conference, 4 de ago. de 2013. DOI: 10.1115/DETC2013-13289. visitado 12 de sep. de 2024. dirección: https://doi.org/10.1115/DETC2013-13289.

[41] M. Kamel, K. Alexis y R. Siegwart, «Design and modeling of dexterous aerial manipulator», en *2016 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, ISSN: 2153-0866, oct. de 2016, págs. 4870-4876. DOI: 10.1109/IROS.2016.7759715. visitado 9 de dic. de 2024. dirección: https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/7759715.

[42] M. Fumagalli et al., «Developing an Aerial Manipulator Prototype: Physical Interaction with the Environment», *IEEE Robotics & Automation Magazine*, vol. 21, n.º 3, págs. 41-50, 2014. DOI: 10.1109/MRA.2013.2287454.

[43] S. Hamaza, I. Georgilas y T. Richardson, «Towards an Adaptive - Compliance Aerial Manipulator for Contact- Based Interaction», en *2018 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, 2018, págs. 1-9. DOI: 10.1109/IROS.2018.8593576.

[44] S. Hamaza, I. Georgilas, G. Heredia, A. Ollero y T. Richardson, «Design, modeling, and control of an aerial manipulator for placement and retrieval of sensors in the environment», *Journal of Field Robotics*, vol. 37, n.º 7, págs. 1224-1245, 2020. DOI: https://doi.org/10.1002/rob.21963. eprint: https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/rob.21963. dirección: https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/rob.21963.

[45] X. Meng, Y. He y J. Han, «Hybrid Force/Motion Control and Implementation of an Aerial Manipulator towards Sustained Contact Operations», en *2019 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, 2019, págs. 3678-3683. DOI: 10.1109/IROS40897.2019.8967808.

[46] J. R. Kutia, K. A. Stol y W. Xu, «Initial flight experiments of a canopy sampling aerial manipulator», en *2016 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS)*, 2016, págs. 1359-1365. DOI: 10.1109/ICUAS.2016.7502616.

[47] C. Korpela, M. Orsag, T. Danko y P. Oh, «Insertion tasks using an aerial manipulator», en *2014 IEEE International Conference on Technologies for Practical Robot Applications (TePRA)*, 2014, págs. 1-6. DOI: 10.1109/TePRA.2014.6869148.

[48] C. Kanellakis y G. Nikolakopoulos, «Guidance for Autonomous Aerial Manipulator Using Stereo Vision», *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, vol. 100, págs. 1545-1557, 2019, ISSN: 1573-0409. DOI: 10.1007/s10846-019-01060-8. dirección: https://link.springer.com/article/10.1007/s10846-019-01060-8.

[49] A. Jimenez-Cano, G. Heredia y A. Ollero, «Aerial manipulator with a compliant arm for bridge inspection», en *2017 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS)*, 2017, págs. 1217-1222. DOI: 10.1109/ICUAS.2017.7991458.

[50] A. Suarez, P. Sanchez-Cuevas, M. Fernandez, M. Perez, G. Heredia y A. Ollero, «Lightweight and Compliant Long Reach Aerial Manipulator for Inspection Operations», en *2018 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, 2018, págs. 6746-6752. DOI: 10.1109/IROS.2018.8593940.

[51] A. Suarez, A. Caballero, A. Garofano, P. J. Sanchez-Cuevas, G. Heredia y A. Ollero, «Aerial Manipulator With Rolling Base for Inspection of Pipe Arrays», *IEEE Access*, vol. 8, págs. 162 516-162 532, 2020. DOI: 10.1109/ACCESS.2020.3021126.

[52] R. Cano, C. Peréz, F. Pruaño, A. Ollero y G. Heredia, «Mechanical Design of a 6-DOF Aerial Manipulator for assembling bar structures using UAVs», 2014. dirección: https://api.semanticscholar.org/CorpusID:16821713.

[53] G. Zhang et al., «Aerial Grasping of an Object in the Strong Wind: Robust Control of an Aerial Manipulator», *Applied Sciences*, vol. 9, n.º 11, 2019, ISSN: 2076-3417. DOI: 10.3390/app9112230. dirección: https://www.mdpi.com/2076-3417/9/11/2230.

[54] A. E. Jimenez-Cano, G. Heredia, M. Bejar, K. Kondak y A. Ollero, «Modelling and control of an aerial manipulator consisting of an autonomous helicopter equipped with a multi-link robotic arm», *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering*, vol. 230, n.º 10, págs. 1860-1870, 2016. DOI: 10.1177/0954410015619442. dirección: https://doi.org/10.1177/0954410015619442.

[55] S. Kim, H. Seo y H. J. Kim, «Operating an unknown drawer using an aerial manipulator», en *2015 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, 2015, págs. 5503-5508. DOI: 10.1109/ICRA.2015.7139968.

[56] M. Orsag, C. Korpela, P. Oh y S. Bogdan, «Aerial Manipulator Dynamics», en *Aerial Manipulation*, Cham: Springer International Publishing, 2018, págs. 123-163, ISBN: 978-3-319-61022-1. DOI: 10.1007/978-3-319-61022-1_5. dirección: https://doi.org/10.1007/978-3-319-61022-1_5.

[57] A. Ollero et al., «The AEROARMS Project: Aerial robots with advanced manipulation capabilities for inspection and maintenance», 2018, Accepted: 2019-04-04T13:11:20Z Publisher: Institute of Electrical and Electronics Engineers, ISSN: 1070-9932. DOI: 10.1109/MRA.2018.2852789. dirección: https://digital.csic.es/handle/10261/179361.

[58] L. U. of Technology y partners. «AEROWORKS: Collaborative aerial robotic workers», CORDIS | European Commission. Proyecto financiado por la Unión Europea bajo el programa Horizonte 2020, número de acuerdo 644128.

[59] X. Meng, Y. He y J. Han, «Survey on Aerial Manipulator: System, Modeling, and Control», *Robotica*, vol. 38, n.º 7, págs. 1288-1317, 2020. DOI: 10.1017/S0263574719001450.

[60] P. J. Sanchez-Cuevas et al., «Fully-Actuated Aerial Manipulator for Infrastructure Contact Inspection: Design, Modeling, Localization, and Control», *Sensors*, vol. 20, n.º 17, 2020, ISSN: 1424-8220. DOI: 10.3390/s20174708. dirección: https://www.mdpi.com/1424-8220/20/17/4708.

[61] T. Yamamoto, K. Terada, A. Ochiai, F. Saito, Y. Asahara y K. Murase, «Development of Human Support Robot as the research platform of a domestic mobile manipulator», *ROBOMECH Journal*, vol. 6, n.º 1, pág. 4, 2019. DOI: 10.1186/s40648-019-0132-3. dirección: https://doi.org/10.1186/s40648-019-0132-3.

[62] J. R. Kutia, K. A. Stol y W. Xu, «Aerial Manipulator Interactions With Trees for Canopy Sampling», *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, vol. 23, n.º 4, págs. 1740-1749, 2018. DOI: 10.1109/TMECH.2018.2837005.

[63] X. Meng, Y. He, F. Gu, Q. Li y J. Han, «Dynamics modeling and simulation analysis for rotorcraft aerial manipulator system», en *2017 36th Chinese Control Conference (CCC)*, 2017, págs. 1156-1161. DOI: 10.23919/ChiCC.2017.8027504.

[64] B. Uragun, «Energy Efficiency for Unmanned Aerial Vehicles», en *2011 10th International Conference on Machine Learning and Applications and Workshops*, vol. 2, 2011, págs. 316-320. DOI: 10.1109/ICMLA.2011.159.

[65] K. Karydis y V. Kumar, «Energetics in robotic flight at small scales», *Interface Focus*, vol. 7, n.º 1, pág. 20 160 088, 2017. DOI: 10.1098/rsfs.2016.0088. eprint: https://royalsocietypublishing.org/doi/pdf/10.1098/rsfs.2016.0088. dirección: https://royalsocietypublishing.org/doi/abs/10.1098/rsfs.2016.0088.

[66] G. Ma, K. Tian, H. Sun, Y. Wang y H. Li, «A Dynamic Inverse Decoupling Control Method for Reducing Energy Consumption in a Quadcopter UAV», *Automation*, vol. 6, n.º 2, 2025, ISSN: 2673-4052. DOI: 10.3390/automation6020019.

[67] E. Smeur, D. Höppener y C. De Wagter, «Prioritized control allocation for quadrotors subject to saturation», en *International Micro Air Vehicle Conference and Flight Competition*, ISAE-SUPAERO Toulouse, France, 2017, págs. 37-43.

[68] D. Bianchi, A. Borri, F. Cappuzzo y S. Di Gennaro, «Quadrotor Trajectory Control Based on Energy-Optimal Reference Generator», *Drones*, vol. 8, n.º 1, 2024, ISSN: 2504-446X. DOI: 10.3390/drones8010029.

[69] A. Seewald, H. G. de Marina, H. S. Midtiby y U. P. Schultz, «Energy-Aware Planning-Scheduling for Autonomous Aerial Robots», págs. 2946-2953, 2022. DOI: 10.1109/IROS47612.2022.9981285.

[70] L. Sciavicco y B. Siciliano, *Modelling and Control of Robot Manipulators* (Advanced Textbooks in Control and Signal Processing). London: Springer, 2000, ISBN: 978-1-85233-221-1. DOI: 10.1007/978-1-4471-0449-0.

[71] V. Andaluz, F. Roberti, J. M. Toibero y R. Carelli, «Adaptive unified motion control of mobile manipulators», *Control Engineering Practice*, vol. 20, n.º 12, págs. 1337-1352, 2012, ISSN: 0967-0661. DOI: https://doi.org/10.1016/j.conengprac.2012.07.008.

[72] M. W. Spong, S. Hutchinson y M. Vidyasagar, *Robot Modeling and Control*. John Wiley & Sons, 610 págs., ISBN: 978-1-119-52399-4.

[73] F. A. Chicaiza, E. Slawiñski y V. Mut, «Delayed Bilateral Teleoperation of Mobile Manipulators With Hybrid Mapping: Rate/Nonlinear-Position Modes», *IEEE Open Journal of the Industrial Electronics Society*, vol. 5, págs. 663-681, 2024. DOI: 10.1109/OJIES.2024.3419422.

[74] Q. Quan, *Introduction to Multicopter Design and Control*. Singapore: Springer Singapore, 2017, ISBN: 978-981-10-3381-0. DOI: 10.1007/978-981-10-3382-7.

[75] M. Kaushik, *Theoretical and Experimental Aerodynamics*, en. 2019. DOI: 10.1007/978-981-13-1678-4.

[76] J. D. Anderson, *Fundamentals of aerodynamics* (McGraw-Hill series in aeronautical and aerospace engineering), en, Sixth edition. New York, NY: McGraw Hill Education, 2017, ISBN: 978-1-259-12991-9.

[77] D. F. Shanno, «Conditioning of Quasi-Newton Methods for Function Minimization», *Mathematics of Computation*, vol. 24, n.º 111, págs. 647-656, 1970, ISSN: 00255718, 10886842. visitado 4 de abr. de 2025. dirección: http://www.jstor.org/stable/2004840.

[78] K. Daniilidis y R. Klette, *Imaging beyond the pinhole camera*, eng. Springer Netherlands, 2006, págs. 1-367, ISBN: 9781402048937. DOI: 10.1007/978-1-4020-4894-4.

[79] R. A. Hamzah y H. Ibrahim, «Literature Survey on Stereo Vision Disparity Map Algorithms», *Journal of Sensors*, vol. 2016, n.º 1, pág. 8 742 920, 2016. DOI: https://doi.org/10.1155/2016/8742920. eprint: https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1155/2016/8742920.

[80] A. González-Morgado et al., «Multi-robot Aerial Soft Manipulator For Floating Litter Collection», *arXiv preprint arXiv:2507.03517*, 2025. arXiv: 2507.03517 [cs.RO].

[81] A. Ollero et al., «Multi-Aerial Robotic System for Power Line Inspection and Maintenance: Comparative Analysis From the AERIAL-CORE Final Experiments», *IEEE Transactions on Field Robotics*, vol. 2, págs. 549-573, 2025. DOI: 10.1109/TFR.2025.3586991.

[82] H. Zhong, J. Liang, Y. Chen, H. Zhang, J. Mao e Y. Wang, «Prototype, Modeling, and Control of Aerial Robots With Physical Interaction: A Review», *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, vol. 22, págs. 3528-3542, 2025. DOI: 10.1109/TASE.2024.3395658.

[83] M. Alkaddour et al., «Novel Design of Lightweight Aerial Manipulator for Solar Panel Cleaning Applications», *IEEE Access*, vol. 11, 2023. DOI: 10.1109/ACCESS.2023.3321859.

[84] C. Korpela, M. Orsag y P. Oh, «Towards valve turning using a dual-arm aerial manipulator», en *2014 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, 2014, págs. 3411-3416. DOI: 10.1109/IROS.2014.6943037.

[85] M. Orsag, C. Korpela, S. Bogdan y P. Oh, «Valve turning using a dual-arm aerial manipulator», en *2014 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS)*, 2014, págs. 836-841. DOI: 10.1109/ICUAS.2014.6842330.

[86] J. S. Ortiz et al., «Modeling and Kinematic Nonlinear Control of Aerial Mobile Manipulators», en *Computational Kinematics*, S. Zeghloul, L. Romdhane y M. A. Laribi, eds., Cham: Springer International Publishing, 2018, págs. 87-95, ISBN: 978-3-319-60867-9.

[87] A. Y. Mersha, S. Stramigioli y R. Carloni, «Exploiting the dynamics of a robotic manipulator for control of UAVs», en *2014 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, 2014, págs. 1741-1746. DOI: 10.1109/ICRA.2014.6907086.

[88] P. E. I. Pounds, D. R. Bersak y A. M. Dollar, «Stability of small-scale UAV helicopters and quadrotors with added payload mass under PID control», en, *Autonomous Robots*, vol. 33, n.º 1, págs. 129-142, ago. de 2012, ISSN: 1573-7527. DOI: 10.1007/s10514-012-9280-5.

[89] A. S. Brandão, V. H. Andaluz, M. Sarcinelli-Filho y R. Carelli, «3-D path-following with a miniature helicopter using a high-level nonlinear underactuated controller», en *2011 9th IEEE International Conference on Control and Automation (ICCA)*, 2011, págs. 434-439. DOI: 10.1109/ICCA.2011.6138018.

[90] P. Garcia-Aunon, M. S. Peñas y J. M. de la Cruz García, «Parameter selection based on fuzzy logic to improve UAV path-following algorithms», *Journal of Applied Logic*, vol. 24, págs. 62-75, 2017, SI:SOCO 2015, ISSN: 1570-8683. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jal.2016.11.025.

[91] V. H. Andaluz, C. P. Carvajal, J. A. Pérez y L. E. Proaño, «Kinematic Nonlinear Control of Aerial Mobile Manipulators», en *Intelligent Robotics and Applications*, Y. Huang, H. Wu, H. Liu y Z. Yin, eds., Cham: Springer International Publishing, 2017, págs. 740-749, ISBN: 978-3-319-65298-6.

[92] D. Galar, U. Kumar y D. Seneviratne, *Robots, Drones, UAVs and UGVs for Operation and Maintenance*. mayo de 2020, ISBN: 978-0-429-45226-0. DOI: 10.1201/9780429452260.

[93] J. Autenrieb, N. Strawa, H.-S. Shin y J.-H. Hong, «A Mission Planning and Task Allocation Framework For Multi-UAV Swarm Coordination», en *2019 Workshop on Research, Education and Development of Unmanned Aerial Systems (RED UAS)*, nov. de 2019, págs. 297-304. DOI: 10.1109/REDUAS47371.2019.8999708.

[94] C. Xia, L. Yongtai, Y. Liyuan y Q. Lijie, «Cooperative Task Assignment and Track Planning For Multi-UAV Attack Mobile Targets», en, *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, vol. 100, n.º 3, págs. 1383-1400, dic. de 2020, ISSN: 1573-0409. DOI: 10.1007/s10846-020-01241-w.

[95] E. Smeur, D. Höppener y C. De Wagter, *Prioritized Control Allocation for Quadrotors Subject to Saturation*. sep. de 2017.

[96] C. Di Franco y G. Buttazzo, «Energy-Aware Coverage Path Planning of UAVs», en *2015 IEEE International Conference on Autonomous Robot Systems and Competitions*, 2015, págs. 111-117. DOI: 10.1109/ICARSC.2015.17.

[97] K. Vicencio, T. Korras, K. A. Bordignon e I. Gentilini, «Energy-optimal path planning for six-rotors on multi-target missions», en *2015 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, sep. de 2015, págs. 2481-2487. DOI: 10.1109/IROS.2015.7353714.

[98] D. C. Gandolfo, L. R. Salinas, A. Brandão y J. M. Toibero, «Stable Path-Following Control for a Quadrotor Helicopter Considering Energy Consumption», *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 25, n.º 4, págs. 1423-1430, 2017. DOI: 10.1109/TCST.2016.2601288.

[99] Y. Zeng y R. Zhang, «Energy-Efficient UAV Communication With Trajectory Optimization», *IEEE Transactions on Wireless Communications*, vol. 16, n.º 6, págs. 3747-3760, 2017. DOI: 10.1109/TWC.2017.2688328.

[100] P. Fahlstrom y T. Gleason, «Introduction to UAV Systems: Fourth Edition», *Introduction to UAV Systems: Fourth Edition*, ago. de 2012, ISSN: 9781119978664. DOI: 10.1002/9781118396780.

[101] G. Markarian y A. Staniforth, *Countermeasures for Aerial Drones*, en. Artech House, nov. de 2020, Google-Books-ID: In0qEAAAQBAJ, ISBN: 978-1-63081-802-9.

[102] C. M. Korpela, T. W. Danko y P. Y. Oh, «Designing a system for mobile manipulation from an Unmanned Aerial Vehicle», en *2011 IEEE Conference on Technologies for Practical Robot Applications*, ISSN: 2325-0534, abr. de 2011, págs. 109-114. DOI: 10.1109/TEPRA.2011.5753491.

[103] C. M. Korpela, T. W. Danko y P. Y. Oh, «MM-UAV: Mobile Manipulating Unmanned Aerial Vehicle», en, *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, vol. 65, n.º 1, págs. 93-101, ene. de 2012, ISSN: 1573-0409. DOI: 10.1007/s10846-011-9591-3.

[104] A. Praveen, H. Yang, H. Jang y R. M. Voyles, «Aerial Mobile Manipulator System to Enable Dexterous Manipulations with Increased Precision», *arXiv:2010.09618 [cs, eess]*, oct. de 2020, arXiv: 2010.09618.

[105] Q. Liu et al., «A Compact Aerial Manipulator: Design and Control for Dexterous Operations», *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, vol. 110, n.º 2, pág. 66, 2024, ISSN: 1573-0409. DOI: 10.1007/s10846-024-02090-7.

[106] Y. Mulgaonkar, M. Whitzer, B. Morgan, C. M. Kroninger, A. M. Harrington y V. Kumar, «Power and weight considerations in small, agile quadrotors», en *Micro- and Nanotechnology Sensors, Systems, and Applications VI*, vol. 9083, International Society for Optics y Photonics, jun. de 2014, 90831Q. DOI: 10.1117/12.2051112.

[107] M. Kothari, I. Postlethwaite y D.-W. Gu, «UAV Path Following in Windy Urban Environments», en, *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, vol. 74, n.º 3, págs. 1013-1028, jun. de 2014, ISSN: 1573-0409. DOI: 10.1007/s10846-013-9873-z.

[108] B. N. Datta, «CHAPTER 1 - INTRODUCTION AND OVERVIEW», en, en *Numerical Methods for Linear Control Systems*, B. N. Datta, ed., San Diego: Academic Press, ene. de 2004, págs. 1-15, ISBN: 978-0-12-203590-6. DOI: 10.1016/B978-012203590-6/50005-7.

[109] Gilbert strang, *Gilbert Strang Linear Algebraand Its Applications 4ed Brooks Cole 2005.* eng. jun. de 2005.

[110] T. Yoshikawa, «Manipulabilidad de mecanismos robóticos», en, *The International Journal of Robotics Research*, vol. 4, n.º 2, págs. 3-9, jun. de 1985, Publisher: SAGE Publications Ltd STM, ISSN: 0278-3649. DOI: 10.1177/027836498500400201. visitado 15 de feb. de 2022.

[111] K. Do y J. Pan, «State- and output-feedback robust path-following controllers for underactuated ships using Serret–Frenet frame», *Ocean Engineering*, vol. 31, n.º 5, págs. 587-613, 2004, ISSN: 0029-8018. DOI: https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2003.08.006.

[112] M. S. UNDERWOOD y K.-P. MARZLIN, «FERMI–FRENET COORDINATES FOR SPACELIKE CURVES», *International Journal of Modern Physics A*, vol. 25, n.º 06, págs. 1147-1154, 2010. DOI: 10.1142/S0217751X10047841.

[113] WeatherSpark, *El tiempo histórico en Ambato en 5 de abril de 2021 (Ecuador) - Weather Spark*, es, 2021. visitado 5 de mayo de 2022. dirección: https://es.weatherspark.com/h/d/20027/2021/4/5/Tiempo-hist%C3%B3rico-el-lunes-5-de-abril-de-2021-en-Ambato-Ecuador#Figures-WindSpeed.

[114] C. Carvajal. «Control for Aerial Manipulators Robots with Priority on Energy Saving (Config1)». dirección: https://youtu.be/7NNDstgVIh8.

[115] C. Carvajal. «Control for Aerial Manipulators Robots with Priority on Energy Saving (Config2)». dirección: https://youtu.be/wYcnL7aZ5aM.

[116] D. Chaikalis, F. Khorrami y A. Tzes, «Adaptive Control Approaches for an Unmanned Aerial Manipulation System», en *2020 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS)*, 2020, págs. 498-503. DOI: 10.1109/ICUAS48674.2020.9213920.

[117] G. Zhang, Y. He, B. Dai, F. Gu, J. Han y G. Liu, «Robust Control of an Aerial Manipulator Based on a Variable Inertia Parameters Model», *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 67, n.º 11, págs. 9515-9525, 2020. DOI: 10.1109/TIE.2019.2956414.

[118] M. Jafarinasab, S. Sirouspour y E. Dyer, «Model-Based Motion Control of a Robotic Manipulator With a Flying Multirotor Base», *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, vol. 24, n.º 5, págs. 2328-2340, 2019. DOI: 10.1109/TMECH.2019.2936760.

[119] Y. Chen et al., «Robust Control for Unmanned Aerial Manipulator Under Disturbances», *IEEE Access*, vol. 8, págs. 129 869-129 877, 2020. DOI: 10.1109/ACCESS.2020.3008971.

[120] G. Boucher, T. Laliberté y C. Gosselin, «Mechanical Design of a Low-Impedance 6 Degree-of-Freedom Displacement Sensor for Intuitive Physical Human–Robot Interaction», *Journal of Mechanisms and Robotics*, vol. 13, n.º 2, ene. de 2021, ISSN: 1942-4302. DOI: 10.1115/1.4049191.

[121] E. Cataldi et al., «Set-based Inverse Kinematics Control of an Anthropomorphic Dual Arm Aerial Manipulator», en *2019 International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, 2019, págs. 2960-2966. DOI: 10.1109/ICRA.2019.8793470.

[122] K. Morton, A. McFadyen y F. Gonzalez, «Generalized Trajectory Control for Tree-Structured Aerial Manipulators», en *2018 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS)*, 2018, págs. 947-956. DOI: 10.1109/ICUAS.2018.8453446.

[123] K. Morton, A. McFadyen y L. F. Gonzalez Toro, «Feasible Polynomial Trajectory Planning for Aerial Manipulation», en *2020 IEEE Aerospace Conference*, 2020, págs. 1-9. DOI: 10.1109/AERO47225.2020.9172501.

[124] O. Camacho, P. Leica, J. Antamba y J. Quiñónez, «Null-Space Based Control Applied to a Formation of Aerial Manipulators in Congested Environment», en *2019 International Conference on Information Systems and Computer Science (INCISCOS)*, 2019, págs. 244-250. DOI: 10.1109/INCISCOS49368.2019.00046.

[125] C. P. Carvajal, V. H. Andaluz, F. Roberti y R. Carelli, «Path-following control for aerial manipulators robots with priority on energy saving», *Control Engineering Practice*, vol. 131, pág. 105 401, 2023, ISSN: 0967-0661. DOI: https://doi.org/10.1016/j.conengprac.2022.105401.

[126] K. Bodie, M. Tognon y R. Siegwart, «Dynamic End Effector Tracking With an Omnidirectional Parallel Aerial Manipulator», *IEEE Robotics and Automation Letters*, vol. 6, n.º 4, págs. 8165-8172, 2021. DOI: 10.1109/LRA.2021.3101864.

[127] G. J. E. Scaglia, M. E. Serrano, S. A. Godoy y F. Rossomando, «Linear algebra-based controller for trajectory tracking in mobile robots with additive uncertainties estimation», *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, vol. 37, n.º 2, págs. 607-624, mayo de 2019, ISSN: 1471-6887. DOI: 10.1093/imamci/dnz016. eprint: https://acad

emic.oup.com/imamci/article-pdf/37/2/607/33762533/dnz016.pdf.

[128] P. Proaño, L. Capito, A. Rosales y O. Camacho, «Sliding Mode Control: Implementation Like PID for Trajectory-Tracking for Mobile Robots», en *2015 Asia-Pacific Conference on Computer Aided System Engineering*, 2015, págs. 220-225. DOI: 10.1109/APCASE.2015.46.

[129] V. Andaluz, F. Roberti, J. M. Toibero y R. Carelli, «Adaptive unified motion control of mobile manipulators», *Control Engineering Practice*, vol. 20, n.º 12, págs. 1337-1352, 2012, ISSN: 0967-0661. DOI: https://doi.org/10.1016/j.conengprac.2012.07.008.

[130] Y. F. Atchadé y J. S. Rosenthal, «On Adaptive Markov Chain Monte Carlo Algorithms», *Bernoulli*, vol. 11, n.º 5, págs. 815-828, 2005, ISSN: 13507265. visitado 4 de abr. de 2025. dirección: http://www.jstor.org/stable/25464765.

[131] G. Arfken, H. Weber y F. Harris, *Mathematical Methods for Physicists Elsevier*, Sixth edition. Boston, 2005, págs. 322-323.

[132] W. Spark. «El tiempo histórico en Ambato en 16 de junio de 2021 (Ecuador) - Weather Spark». es, visitado 1 de feb. de 2023. dirección: https://es.weatherspark.com/h/d/20027/2021/6/16/Tiempo-histC3B3rico-elmiC3A9rcoles-16-de-junio-de-2021-en-Ambato-Ecuador#Figures-WindSpeed.

[133] C. Carvajal. «Position Control (Aerial Mobile Manipulator)». dirección: https://youtu.be/vc94n0Z9ik0.

[134] C. Carvajal. «Trajectory Tracking Control (Aerial Mobile Manipulator)». dirección: https://youtu.be/gjhfo3iJpfA.

[135] C. Carvajal. «Path following control of an aerial manipulator without dynamic compensation.» dirección: https://youtu.be/hEXQcfkgtWI.

[136] C. Carvajal. «Path following control of an aerial manipulator with dynamic compensation.» dirección: https://youtu.be/8n2QSbf1lmc.

[137] C. McDonnell, M. Devine y D. Kavanagh, «The general public's perception of robotic surgery – A scoping review», *The Surgeon*, vol. 23, n.º 2, e49-e62, 2025, ISSN: 1479-666X. DOI: https://doi.org/10.1016/j.surge.2024.12.001.

[138] I. Skubis, «Exploring the Potential and Perceptions of Social Robots in Tourism and Hospitality: Insights from Industry Executives and Technology Evaluation», *International Journal of Social Robotics*, vol. 17, pág. 59, 1 2025, ISSN: 1875-4805. DOI: 10.1007/s12369-024-01197-z.

[139] J. Kelly y G. S. Sukhatme, «A General Framework for Temporal Calibration of Multiple Proprioceptive and Exteroceptive Sensors», en *Experimental Robotics: The 12th International Symposium on Experimental Robotics*, O. Khatib, V. Kumar y G. Sukhatme, eds., Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2014, págs. 195-209, ISBN: 978-3-642-28572-1. DOI: 10.1007/978-3-642-28572-1_14.

[140] G. Soter, A. Conn, H. Hauser y J. Rossiter, «Bodily Aware Soft Robots: Integration of Proprioceptive and Exteroceptive Sensors», en *2018 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, vol. n/a, 2018, págs. 2448-2453. DOI: 10.1109/ICRA.2018.8463169.

[141] F. Jia et al., «Design and Validation of Flexible Aerial Robotics for Safe Human-Robot Interaction», págs. 9342-9347, 2024. DOI: 10.1109/IROS58592.2024.10801991.

[142] G. Li, X. Liu y G. Loianno, «Human-Aware Physical Human–Robot Collaborative Transportation and Manipulation With Multiple Aerial Robots», *IEEE Transactions on Robotics*, vol. 41, págs. 762-781, 2025. DOI: 10.1109/TRO.2024.3502508.

[143] F. Caballero, L. Merino, J. Ferruz y A. Ollero, «Vision-based odometry and SLAM for medium and high altitude flying UAVs», *J Intell Robot Syst*, vol. 54, n.º 1, págs. 137-161, 2009, ISSN: 1573-0409. DOI: 10.1007/s10846-008-9257-y.

[144] H. Li et al., «MARS-LVIG dataset: A multi-sensor aerial robots SLAM dataset for LiDAR-visual-inertial-GNSS fusion», *The International Journal of Robotics Research*, vol. 43, n.º 8, págs. 1114-1127, 2024. DOI: 10.1177/02783649241227968.

[145] E. A. Rodríguez-Martínez, W. Flores-Fuentes, F. Achakir, O. Sergiyenko y F. N. Murrieta-Rico, «Vision-Based Navigation and Perception for Autonomous Robots: Sensors, SLAM, Control Strategies, and Cross-Domain Applications—A Review», *Eng*, vol. 6, n.º 7, 2025, ISSN: 2673-4117. DOI: 10.3390/eng6070153.

[146] X. Chen e Y. Yu, «An unsupervised low-light image enhancement method for improving V-SLAM localization in uneven low-light construction sites», *Automation in Construction*, vol. 162, pág. 105 404, 2024, ISSN: 0926-5805. DOI: https://doi.org/10.1016/j.autcon.2024.105404.

[147] H. Rostum y J. Vásárhelyi, «Enhancing Machine Learning Techniques in VSLAM for Robust Autonomous Unmanned Aerial Vehicle Navigation», *Electronics*, vol. 14, n.º 7, 2025, ISSN: 2079-9292. DOI: 10.3390/electronics14071440.

[148] D. Tiozzo Fasiolo, L. Scalera, E. Maset y A. Gasparetto, «Towards autonomous mapping in agriculture: A review of supportive technologies for ground robotics», *Robotics and Autonomous Systems*, vol. 169, pág. 104 514, 2023, ISSN: 0921-8890. DOI: https://doi.org/10.1016/j.robot.2023.104514.

[149] R. Bogue, «Fruit picking robots: Has their time come?», *Industrial Robot: the international journal of robotics research and application*, vol. 47, n.º 2, págs. 141-145, 2020, Publisher: Emerald Publishing Limited, ISSN: 0143-991X. DOI: 10.1108/IR-11-2019-0243.

[150] F. Aghili, «Robust Impedance-Matching of Manipulators Interacting With Uncertain Environments: Application to Task Verification of the Space Station's Dexterous Manipulator», *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, vol. 24, n.º 4, págs. 1565-1576, 2019, Conference Name: IEEE/ASME Transactions on Mechatronics, ISSN: 1941-014X. DOI: 10.1109/TMECH.2019.2928281.

[151] M. Aranda, G. López-Nicolás, C. Sagüés e Y. Mezouar, «Formation Control of Mobile Robots Using Multiple Aerial Cameras», *IEEE Transactions on Robotics*, vol. 31, n.º 4, págs. 1064-1071, 2015. DOI: 10.1109/TRO.2015.2452777.

[152] J. P. Vasconez, G. A. Kantor y F. A. Auat Cheein, «Human–robot interaction in agriculture: A survey and current challenges», *Biosystems Engineering*, vol. 179, págs. 35-48, 2019, ISSN: 1537-5110. DOI: https://doi.org/10.1016/j.biosystemseng.2018.12.005.

[153] A. J. Spiers, M. V. Liarokapis, B. Calli y A. M. Dollar, «Single-Grasp Object Classification and Feature Extraction with Simple Robot Hands and Tactile Sensors», *IEEE Transactions on Haptics*, vol. 9, n.º 2, págs. 207-220, 2016. DOI: 10.1109/TOH.2016.2521378.

[154] C. Bartneck, T. Belpaeme, F. Eyssel, T. Kanda, M. Keijsers y S. Šabanović, *Human-Robot Interaction: An Introduction*. Cambridge University Press, 2024, 324 págs., Accedido: 27 de julio de 2024, ISBN: 978-1-00-942422-6.

[155] D. Tezza y M. Andujar, «The State-of-the-Art of Human–Drone Interaction: A Survey», *IEEE Access*, vol. 7, págs. 167 438-167 454, 2019. DOI: 10.1109/ACCESS.2019.2953900.

[156] J. Li, D. H. Ye, T. Chung, M. Kolsch, J. Wachs y C. Bouman, «Multi-target detection and tracking from a single camera in Unmanned Aerial Vehicles (UAVs)», en *2016 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, 2016, págs. 4992-4997. DOI: 10.1109/IROS.2016.7759733.

[157] L. Merino, F. Caballero, J. Martínez-de Dios, J. Ferruz y A. Ollero, «A cooperative perception system for multiple UAVs: Application to automatic detection of forest fires», *Journal of Field Robotics*, vol. 23, n.º 3-4, págs. 165-184, 2006. DOI: https://doi.org/10.1002/rob.20108.

[158] A. K. Nasir, A. Hsino, H. Roth y K. Hartmann, «Aerial Robot Localization Using Ground Robot Tracking – Towards Cooperative SLAM», *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 46, n.º 19, págs. 313-318, 2013, 19th IFAC Symposium on Automatic Control in Aerospace, ISSN: 1474-6670. DOI: https://doi.org/10.3182/20130902-5-DE-2040.00116.

[159] G. Best, R. Garg, J. Keller, G. A. Hollinger y S. Scherer, «Multi-robot, multi-sensor exploration of multifarious environments with full mission aerial autonomy», *The International Journal of Robotics Research*, vol. 43, n.º 4, págs. 485-512, 2024. DOI: 10.1177/02783649231203342.

[160] M. F. Santos, P. Castillo y A. C. Victorino, «Aerial Vision Based Guidance and control for Perception-Less Ground Vehicle», en *2024 European Control Conference (ECC)*, vol. n/a, 2024, págs. 2780-2785. DOI: 10.23919/ECC64448.2024.10590923.

[161] A. Coates y A. Y. Ng, «Multi-camera object detection for robotics», en *2010 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 2010, págs. 412-419. DOI: 10.1109/ROBOT.2010.5509644.

[162] Z. Liu, J. Zhou, C. Mucchiani y K. Karydis, «Vision-Assisted Avocado Harvesting with Aerial Bimanual Manipulation», *Advanced Robotics Research*, vol. n/a, n.º n/a, pág. 202 500 003, 2025. DOI: 10.1002/adrr.202500003.

[163] A. Tapus, A. Bandera, R. Vazquez-Martin y L. V. Calderita, «Perceiving the person and their interactions with the others for social robotics – A review», *Pattern Recognition Letters*, vol. 118, págs. 3-13, 2019, Cooperative and Social Robots: Understanding Human Activities and Intentions, ISSN: 0167-8655. DOI: https://doi.org/10.1016/j.patrec.2018.03.006.

[164] M. Kleinehagenbrock, S. Lang, J. Fritsch, F. Lomker, G. Fink y G. Sagerer, «Person tracking with a mobile robot based on multi-modal anchoring», en *Proceedings. 11th IEEE International Workshop on Robot and Human Interactive Communication*, 2002, págs. 423-429. DOI: 10.1109/ROMAN.2002.1045659.

[165] D. López-Pérez y J. Antonino-Daviu, «Application of Infrared Thermography to Failure Detection in Industrial Induction Motors: Case Stories», *IEEE Transactions on Industry Applications*, vol. 53, n.º 3, págs. 1901-1908, 2017. DOI: 10.1109/TIA.2017.2655008.

[166] M. Waqar Akram, G. Li, Y. Jin y X. Chen, «Failures of Photovoltaic modules and their Detection: A Review», *Applied Energy*, vol. 313, pág. 118 822, 2022, ISSN: 0306-2619. DOI: https://doi.org/10.1016/j.apenergy.2022.118822.

[167] G. Valvano et al., «Automatic Electrical Wiring Inspection with Advanced Computer Vision Models», en *Proceedings of the Abu Dhabi International Petroleum Exhibition and Conference (ADIPEC)*, ép. Abu Dhabi International Petroleum Exhibition and Conference, vol. ADIPEC, nov. de 2024, D021S068R005. DOI: 10.2118/222543-MS.

[168] R. Mebarki y V. Lippiello, «Image-Based Control for Aerial Manipulation», *Asian Journal of Control*, vol. 16, n.º 3, págs. 646-656, 2014. DOI: https://doi.org/10.1002/asjc.887.

[169] V. Lippiello et al., «Hybrid Visual Servoing With Hierarchical Task Composition for Aerial Manipulation», *IEEE Robotics and Automation Letters*, vol. 1, n.º 1, págs. 259-266, 2016. DOI: 10.1109/LRA.2015.2510749.

[170] J. M. Toibero, F. Roberti, R. Carelli y P. Fiorini, «Switching control approach for stable navigation of mobile robots in unknown environments», *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, vol. 27, n.º 3, págs. 558-568, 2011, ISSN: 0736-5845. DOI: https://doi.org/10.1016/j.rcim.2010.10.002.

[171] F. Tajdari, E. Khodabakhshi, M. Kabganian y A. Golgouneh, «Switching controller design to swing-up a two-link underactuated robot», en *2017 IEEE 4th International Conference on Knowledge-Based Engineering and Innovation (KBEI)*, 2017, págs. 0595-0599. DOI: 10.1109/KBEI.2017.8324869.

[172] B. Luo, H. Chen, F. Quan, S. Zhang e Y. Liu, «Natural feature-based visual servoing for grasping target with an aerial manipulator», *J Bionic Eng*, vol. 17, n.º 2, págs. 215-228, 2020, ISSN: 2543-2141. DOI: 10.1007/s42235-020-0017-4.

[173] C. Luo, W. Yang, P. Huang y J. Zhou, «Overview of Image Matching Based on ORB Algorithm», *Journal of Physics: Conference Series*, vol. 1237, n.º 3, pág. 032 020, jun. de 2019. DOI: 10.1088/1742-6596/1237/3/032020.

[174] H. Zhong et al., «A Practical Visual Servo Control for Aerial Manipulation Using a Spherical Projection Model», *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 67, n.º 12, págs. 10 564-10 574, 2020, ISSN: 1557-9948. DOI: 10.1109/TIE.2019.2958305.

[175] G. He, Y. Jangir, J. Geng, M. Mousaei, D. Bai y S. Scherer, «Image-Based Visual Servo Control for Aerial Manipulation Using a Fully-Actuated UAV», en *2023 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, 2023, págs. 5042-5049. DOI: 10.1109/IROS55552.2023.10342145.

[176] Y. Chen et al., «Image-Based Visual Servoing of Unmanned Aerial Manipulators for Tracking and Grasping a Moving Target», *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, vol. 19, n.º 8, págs. 8889-8899, ago. de 2023, ISSN: 1941-0050. DOI: 10.1109/TII.2022.3222688.

[177] A. Begazo. «Alimentación y Caza del Águila Real», Aves de Peru, visitado 19 de feb. de 2025. dirección: https://avesdeperu.org/alimentacion-aguila-real/.

[178] F. Zoratto, C. Carere, F. Chiarotti, D. Santucci y E. Alleva, «Aerial hunting behaviour and predation success by peregrine falcons Falco peregrinus on starling flocks Sturnus vulgaris», *Journal of Avian Biology*, vol. 41, n.º 4, págs. 427-433, 2010. DOI: https://doi.org/10.1111/j.1600-048X.2010.04974.x.

[179] D. E. Bakaloudis, «Hunting strategies and foraging performance of the short-toed eagle in the Dadia-Lefkimi-Soufli National Park, north-east Greece», *Journal of Zoology*, vol. 281, n.º 3, págs. 168-174, 2010. DOI: https://doi.org/10.1111/j.1469-7998.2010.00691.x.

[180] D. Demerdzhiev, I. Angelov y D. Dobrev, «Foraging Patterns of Non-Territorial Eastern Imperial Eagle (Aquila heliaca): A Case of Successful Adaptation», *Diversity*, vol. 14, n.º 12, 2022, ISSN: 1424-2818. DOI: 10.3390/d14121060.

[181] Y. Yang, Z. He, P. Jiao y H. Ren, «Bioinspired Soft Robotics: How Do We Learn From Creatures?», *IEEE Reviews in Biomedical Engineering*, vol. 17, págs. 153-165, 2024, ISSN: 1941-1189. DOI: 10.1109/RBME.2022.3210015.

[182] A. Hamed, M. T. Masouleh y A. Kalhor, «Design & characterization of a bio-inspired 3-DOF Tactile/Force sensor and implementation on a 3-DOF decoupled parallel mechanism for human-robot interaction purposes», *Mechatronics*, vol. 66, pág. 102 325, 2020, ISSN: 0957-4158. DOI: https://doi.org/10.1016/j.mechatronics.2020.102325.

[183] S. W. Hameed, N. Imanberdiyev, E. Camci, W.-Y. Yau y M. Feroskhan, «Bio-inspired classification and evolution of multirotor Micro Aerial Vehicles (MAVs): A comprehensive review», *Robotics and Autonomous Systems*, vol. 182, pág. 104 802, 2024, ISSN: 0921-8890. DOI: https://doi.org/10.1016/j.robot.2024.104802.

[184] K. Saho y M. Masugi, «Performance analysis of α, β and γ tracking filters using position and velocity measurements», *EURASIP J. Adv. Signal Process.*, vol. 35, n.º 1, 2015, ISSN: 1687-6180. DOI: 10.1186/s13634-015-0220-3.

[185] S. R. Rogers, «Alpha-Beta Filter with Correlated Measurement Noise», *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. AES-23, n.º 4, págs. 592-594, 1987. DOI: 10.1109/TAES.1987.310893.

[186] W. Spark, *El tiempo histórico en Ambato en 19 de mayo de 2024 (Ecuador) - Weather Spark*, es, 2024. visitado 19 de mayo de 2024. dirección: https://es.weatherspark.com/h/d/20027/2024/5/19/Tiempo-hist%C3%B3rico-el-domingo-19-de-mayo-de-2024-en-Ambato-Ecuador#Figures-WindDirection.

[187] C. Carvajal. «Experiment of the complete scheme for the bio-inspired aerial grasping with the aerial manipulator robot.» dirección: https://youtu.be/8AabIde5eAE.

[188] C. Carvajal. «Bio-inspired Servo-Visual Control for the Aerial Grasping of Static Targets by an Aerial Manipulator.» dirección: https://youtu.be/ch-rns_xWmw.

[189] C. Carvajal. «Bio-inspired Servo-Visual Control for the Aerial Grasping of Moving Targets by an Aerial Manipulator.» dirección: https://youtu.be/DvhSg7B86RU.

[190] C. Carvajal. «Bio-inspired Servo-Visual Control for the Aerial Grasping of Moving Targets with Nonlinear Trajectory.» dirección: https://youtu.be/93boKuttXCY.

[191] «Matrice 600 Pro - Product Information - DJI». en, visitado 9 de mayo de 2022. dirección: https://www.dji.com/matrice600-pro/info.

[192] ROBOTIS Co., Ltd. «DYNAMIXEL | Smart Robot Actuator», visitado 20 de ene. de 2021. dirección: https://www.robotis.us/dynamixel/.

[193] Y. Name. «ROBOTIS e-manual», ROBOTIS e-Manual, visitado 31 de mar. de 2025. dirección: https://emanual.robotis.com/docs/en/parts/interface/usb2dynamixel/.

[194] «DROK LM2596 DC Buck Volt Regulator 36V to 24V 12V 5V 3.3V 3V Converters Constant Volt & Amp 5-36V to 1.25-32V 5A 75W Step-Down LED Driver Switch Power Supply Digital LED Voltmeter USB Output», Amazon, visitado 26 de feb. de 2025. dirección: https://www.amazon.com/gp/product/B00WEBJRE8/ref=as_li_tl?tag=proeng-20&keywords=buck+converter.

[195] «Amazon.com: 4 Pieces Adjustable LM2596S DC-DC Buck Converter Reduced Voltage Regulator Power Module 36V 24V 12V to 5V 2A Voltage Stabilizer with Digital Voltmeter Display : Electronics», visitado 26 de feb. de 2025. dirección: https://www.amazon.com/dp/B081N6WWJS.

[196] «Mini PC Intel NUC 11 Enthusiast, i7-1165G7, Ram 16GB, SSD 512GB + Optane 32GB, RTX 2060, W10H | SP Digital», visitado 26 de feb. de 2025. dirección: https://www.spdigital.cl/mini-pc-intel-nuc-11-enthusiast-i7-1165g7-ram-16gb-ssd-512gb-optane-32gb-rtx-2060-w10h/.

[197] A. Koubaa, ed., *Robot Operating System (ROS)*, vol. 625, Studies in Computational Intelligence, Cham: Springer International Publishing, 2016, ISBN: 978-3-319-26052-5. DOI: 10.1007/978-3-319-26054-9. visitado 28 de mar. de 2025. dirección: http://link.springer.com/10.1007/978-3-319-26054-9.

[198] ROBOTIS, *ROBOTIS-GIT/DynamixelSDK*. visitado 28 de mar. de 2025. dirección: https://github.com/ROBOTIS-GIT/DynamixelSDK.

[199] *dji-sdk/Onboard-SDK*, original-date: 2015-06-07T09:16:26Z, 23 de mar. de 2025. visitado 28 de mar. de 2025. dirección: https://github.com/dji-sdk/Onboard-SDK.

[200] hapticshouse. «Novint's* Falcon Haptic Device», HapticsHouse.com, visitado 28 de mar. de 2025. dirección: https://hapticshouse.com/pages/novints-falcon-haptic-device.

[201] C. Carvajal. «Aerial Manipulator Dynamic Model Identification.» dirección: https://youtu.be/4VjTmUoaQDA.

ISBN 978-631-90962-4-8
9 786319 096248

ISBN: 978-631-90962-4-8