



Universidad Nacional de San Juan
Facultad de Ingeniería
Instituto de Automática

Planificación y Control de Formación de Robots. Aplicación a Robots Terrestres y Aéreos.

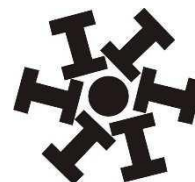
**Tesis Doctoral de
Carlos Alberto Vacca Sisterna**

Temas de Automática

114



Ministerio de Educación
Universidad Nacional de San Juan



Facultad de Ingeniería

Planificación y Control de Formación de Robots.

Aplicación a Robots Terrestres y Aéreos.

Tesis Doctoral de

Carlos Alberto Vacca Sisterna

Aprobada por la
Facultad de Ingeniería de la
Universidad Nacional de San Juan
Para el otorgamiento del grado académico de

DOCTOR EN INGENIERÍA DE SISTEMAS DE CONTROL

Dirección de Tesis:

Dr. Ing. Francisco Rossomando

Instituto de
Automática
Universidad Nacional
de San Juan, Argentina

Dr. Ing. Gustavo Scaglia

Inst. Ingeniería Química
Universidad Nacional
de San Juan, Argentina

Jurado de Tesis:

Dr. Ing. Humberto Secchi

Instituto de Automática
Universidad Nacional
de San Juan, Argentina

Dr. Ing. Andrés Rosales

Universidad de
Investigación de
Tecnología Experimental
Yachay, Ecuador

Fecha de defensa oral:

San Juan, 16 de diciembre de 2025

Vacca Sisterna, Carlos Alberto

Planificación y control de formación de robots: aplicación a robots terrestres y aéreos / Carlos Alberto Vacca Sisterna. - 1a ed. —

San Juan: Instituto de Automática, 2026.

128 p. ; 21 x 15 cm.



ISBN 978-631-90962-6-2

1. Sistemas de Control. I. Título.

CDD 629.892

PLANIFICACIÓN Y CONTROL DE FORMACIÓN DE ROBOTS: APLICACIÓN A ROBOTS TERRESTRES Y AÉREOS.

CARLOS ALBERTO VACCA SISTERNA

Tesis de Doctorado

Tesis de Automática

Primera edición: Marzo 2026

Impreso en Argentina

Queda prohibida la reproducción total o parcial de esta tesis, su almacenamiento o transmisión por cualquier medio, ya sea electrónico, mecánico, fotocopiado o cualquier otra índole, sin la autorización previa y por escrito del autor o de la institución a la que pertenece.

©2026 **CARLOS ALBERTO VACCA SISTERNA**

Hecho el depósito que marca la ley

A Silvia Inés, Gabriel Alberto y Juan David

Agradecimientos

A mi esposa Silvia Inés, por ser madre y esposa ejemplar, por su compañía incondicional, sus consejos y ejemplos, su constancia y paciencia, su coraje y su amor. Gracias por estar a mi lado y enseñarme con el ejemplo.

A mis hijos Gabriel y Juan, por llenar mi vida de alegría y felicidad. Gracias por sus sonrisas, besos y abrazos, porque se han vuelto indispensables en mi vida. Por el tiempo que junto a su madre me cedieron durante estos últimos años para poder culminar con éxito mis estudios.

A mi amigo Francisco Rossomando, que dedicó mucho de su tiempo a este trabajo a quién siempre le agradeceré por todo lo realizado: confianza, respeto, paciencia y predisposición por las cuales siempre estaré agradecido. Gracias por tu confianza.

A mi amigo Gustavo Scaglia, gracias por tu apoyo, consejos y amistad. Gracias por tu confianza.

Finalmente agradezco a todo el Instituto de Automática y a la Universidad Nacional de San Juan por la infraestructura, el apoyo y la ayuda desinteresada que me brindaron y al CONICET que hizo posible la realización de este trabajo por medio de su programa de becas de doctorado.

Título de Tesis: Planificación y Control de Formación de Robots.

Aplicación a Robots Terrestres y Aéreos.

Robot Training Planning and Control.

Application to Terrestrial and Aerial Robots.

Palabras Clave: Robótica, redes neuronales artificiales, identificación, control adaptable, control no lineal

Resumen:

El desarrollo de vehículos autónomos está redefiniendo el futuro del transporte. Para el despliegue efectivo de esta tecnología, es imperativo contar con controladores de movimiento de alto rendimiento que garanticen el seguimiento preciso de trayectorias en entornos diversos y ante distintos tipos de perturbaciones. Un vehículo autónomo se caracteriza por la integración inteligente entre la navegación y la ejecución de acciones, lo que determina su comportamiento y le permite cumplir objetivos programados a pesar de las incertidumbres intrínsecas del sistema.

Esta tesis aborda el seguimiento de trayectorias mediante el desarrollo de un **controlador inteligente robusto**, diseñado para mitigar perturbaciones externas y dinámicas no modeladas acotadas. La investigación se estructura en el modelado cinemático y dinámico de tres plataformas: robots móviles, vehículos aéreos autónomos y navíos. La estrategia propuesta combina el control basado en modelos con técnicas de control inteligente.

Estructura de la Investigación

- **Fundamentos Teóricos:** En la primera parte, se analizan diversas técnicas de control no lineal e inteligente. Estos métodos son fundamentales para sistemas complejos donde la teoría de control lineal resulta insuficiente, permitiendo la identificación de parámetros incluso cuando la estructura de la ley de control o parte de su dinámica son desconocidas.
- **Diseño de Controladores:** La segunda parte descompone el problema en controladores cinemáticos y dinámicos específicos para cada vehículo. La principal contribución es la formulación de controladores que minimizan el error de seguimiento mediante un enfoque de diseño unificado en **espacio de estados**.
- **Análisis Comparativo:** Se evalúa el rendimiento del **Control Adaptativo** frente al **Control Neuronal Adaptable mediante Superficies Deslizantes (NA-SMC)**. Asimismo, se analiza la estructura del **Control Basado en Álgebra Lineal (LABC)**, estableciendo un puente entre el diseño clásico y los enfoques modernos de inteligencia artificial.

Validación y Resultados

La viabilidad de las estrategias propuestas se demuestra mediante pruebas en diversos entornos y simulaciones que consideran variaciones dinámicas y perturbaciones. Los resultados, obtenidos tanto de simulaciones como de experimentación física según el caso, validan la robustez y eficacia del enfoque desarrollado.

Abstract:

The development of autonomous vehicles is reshaping the future of transportation. For the successful deployment of this technology, it is essential to have high-performance motion controllers capable of tracking trajectories across diverse environments while resisting various types of disturbances. An autonomous vehicle is distinguished by the intelligent connection between navigation and action, which defines its behavior and enables it to achieve programmed objectives—such as trajectory tracking—despite the inherent uncertainties of its characteristics.

This thesis focuses on trajectory tracking for autonomous vehicles, with the goal of developing an **intelligent controller** that is robust against external disturbances and bounded unmodeled dynamics. The research is divided into the modeling of different vehicle types: mobile robots, autonomous aerial vehicles, and marine vessels, covering both kinematics and vehicle dynamics. The control strategy is founded on a combination of model-based control and intelligent control techniques.

Research Structure

- **Theoretical Foundations:** The first part presents the theoretical basis and reviews several nonlinear and intelligent control techniques. These are applicable to complex nonlinear systems where linear control theory methods prove ineffective. These techniques are particularly suitable for parameter identification, as intelligent control allows for the estimation of parameters even when the control law structure is defined but its parameters or parts of its dynamics remain unknown.
- **Controller Design and Contribution:** The second part decomposes the control problem for each vehicle type into kinematic and dynamic controllers based on their specific models. The primary contribution of this thesis is the formulation of trajectory tracking controllers that minimize tracking error using a **unified design approach via state-space methods**.
- **Comparative Analysis:** The performance of control strategies based on **Adaptive Control** and **Neuronal Adaptive Sliding Mode Control (NA-SMC)** is compared. Additionally, the **Linear Algebra-Based Control (LABC)** structure is analyzed, establishing a link between classical control design and modern intelligent control approaches.

Validation and Results

The feasibility of these control strategies is demonstrated through tests in various environments and simulations involving different vehicle types, accounting for dynamic variations and the influence of unmodeled dynamics. The effectiveness of the proposed strategies is validated through both simulation and experimental results, as applicable.

Contenido

Capítulo 1. Estado del Arte.....	17
1.1. Introducción.....	17
1.2. Definición y Clasificación de Vehículos Autónomos	20
1.2.1. Vehículos aéreos no tripulados (UAV)	20
1.2.2. Vehículos Terrestres no Tripulados (UGV)	22
1.2.3. Vehículos de Superficie no Tripulados (USV).....	23
1.2.4. Vehículos Submarinos no Tripulados (UUV)	24
1.3. Hipótesis	24
1.4. Objetivo General.....	25
1.5. Objetivos Específicos:.....	25
1.6. Justificación.....	25
1.7. Marco de Realización.....	26
1.8. Estructura de la Tesis.	26
Capítulo 2. Preliminares Teóricos.....	29
2.1. Introducción:.....	29
2.2. Fundamentos teóricos de Sistemas No lineales:.....	30
2.3. Propiedades Fundamentales:	31
2.4. Conceptos de estabilidad:	31
2.5. Lema de Barbalat.....	33
2.6. Acotamiento y acotación final	34
2.7. Linealización por realimentación:.....	35
2.8. Control por Modo Deslizante (SMC).....	37
2.8.1. Descripción matemática:	38
2.8.2. Condiciones de existencia, invarianza y transversalidad	39
2.8.3. Dinámica del plano deslizante	40
2.8.4. Método de Filippov.....	40
2.8.5. Control equivalente	42
2.8.6. Robustez ante perturbaciones	45
2.8.7. Elección de la superficie deslizante	46
2.9. Redes Neuronales Artificiales (RNA).....	47
2.9.1. Red Neuronal MLP	48
2.9.2. Funciones de activación:	49
2.9.3. Red Neuronal RBF	50
2.9.4. Red Neuronal GRNN.....	51
2.9.5. Propiedad universal de aproximación de funciones.....	52

2.10.	Identificación de sistemas utilizando redes neuronales artificiales	52
2.10.1.	Identificación de sistemas SISO.....	53
2.10.2.	Identificación de Sistemas MIMO.....	55
2.11.	Control Basado en el Espacio Nulo	58
Capítulo 3.	Control de un vehículo marino usando LABC y compensación adaptable.	61
3.1.	Resumen del Capítulo	61
3.2.	Descripción del Modelo del Buque:.....	61
3.3.	Desarrollo del controlador basado en Algebra lineal	62
3.4.	Diseño del Controlador Adaptable	65
3.5.	Análisis de estabilidad y determinación de las reglas de ajuste	67
3.6.	Análisis de Robustez.....	70
3.7.	Resultados de la simulación y discusión.....	71
3.8.	Simulación teniendo en cuenta las perturbaciones de las olas	72
3.9.	Simulación en presencia de olas y efecto del viento	73
3.10.	Simulación teniendo en cuenta los errores de modelado.....	75
3.11.	Discusión de los resultados.....	76
3.12.	Observaciones finales	77
Capítulo 4.	Diseño de una estrategia de control para robots móviles utilizando técnicas de álgebra lineal (LABC) y estimación neuronal en el seguimiento de trayectorias	79
4.1.	Resumen del Capítulo	79
4.2.	Cinemática del Robot Móvil.....	79
4.3.	Descripción del Problema.....	80
4.3.1.	Estimación Neuronal.....	81
4.3.2.	Descripción de la estructura de la red neuronal RBF.....	82
4.4.	Controlador Propuesto.....	83
4.5.	Resultados Experimentales.....	86
4.6.	Observaciones finales	89
Capítulo 5.	Control Adaptable usando técnicas de supertwisting en un cuadricóptero para seguimiento de trayectorias.....	91
5.1.	Resumen del Capítulo	91
5.2.	Diseño del controlador.....	91
5.3.	Análisis de estabilidad y reglas de ajuste adaptable.....	94
5.4.	Resultados experimentales.....	97
5.5.	Observaciones finales	101
Capítulo 6.	Transporte de carga con UAV con control PID y compensación Neuronal.	103
6.1.	Resumen del Capitulo	103
6.2.	Planificación en Robótica Moderna.....	103

6.2.1.	Aplicación de la técnica de Espacio nulo a la planificación de trayectorias	104
6.3.	Formulación del Problema.....	104
6.4.	Simulación Numérica	107
6.4.1.	Modelado de la cuerda flexible.....	107
6.4.2.	Modelo Matemático del Vehículo UAV.....	107
6.5.	Diseño del Controlador Dinámico.....	109
6.5.1.	Diseño del sistema de corrección neuronal.....	111
6.6.	Análisis de Estabilidad y Reglas de Ajuste	113
6.7.	Resultados de Simulación	116
6.8.	Consideraciones Finales	121
Capítulo 7.	Conclusiones y consideraciones finales	123
7.1.	Trabajos futuros	123
7.2.	Difusión de los principales aportes de esta tesis.....	124
Referencias:		125
Apéndice A.	Análisis de Estabilidad.....	133

Lista de Acrónimos.

UAV Unmanned Aerial Vehicle *vehículos aéreos no tripulados*
UGV Unmanned Ground Vehicle *vehículos terrestres no tripulados*
USV Unmanned surface vessel *vehículos marinos no tripulados*
WMR Wheeled Mobile Robot Robot móvil sobre ruedas
MIMO Multi Input – Multi output
SISO Single Input – Single Output
PI Controlador Proporcional Integral
PD Controlador Proporcional Derivativo
PID Controlador Proporcional Integral Derivativo
SMC Sliding mode control Control de Modo deslizante
STA: Algoritmo Super-Twisting
LABC Linear Algebra Based Control – Control basado en Algebra Lineal
RNA Redes neuronales Artificiales
MLP Multi Layer Perceptron Perceptron Multicapa
RBF red neuronal función de base radial
GRNN red neuronal de regresión generalizada
IAE Integral del Error Absoluto
PWM Modulación por ancho de pulso
ECPD Embedded controller plus outer PD control loop - Controlador Embebido mas control PD
AMRC Adaptive model regressor control scheme - Esquema de control de modelo regresor adaptable.
ANNC Adaptive neural network controller - Controlador de red neuronal adaptable
ANSMC Adaptive Neural SMC
RMS Root Mean Square.
N-ODEs Neural ordinary differential equations.
N-Echo Neural Echo state networks.
LSTM Long short-term memory

Lista de variables

Variable	Descripción:
v	Velocidad lineal del vehículo
ω	Velocidad angular del vehículo
v_{ref}	Referencia de velocidad lineal
ω_{ref}	Referencia de velocidad angular
x, y	Coordenadas cartesianas del vehículo en el plano XY posición
$\mathbf{x}$	Vector de velocidades de salida Robot $\mathbf{x} = (v, \omega)^T$, Navio $\mathbf{x} = (u, r)^T$
$\mathbf{y}$	Vector de posición del robot móvil (x, y) .
$\mathbf{x}^w$	Posicion UAV respecto del referencial fijo $\mathbf{x}^w = (x \ y \ z \ \psi)^T$
G	Centro de masas del robot móvil
c	Posición de la rueda castor
a	Distancia del eje de las ruedas con respecto al centro de masas
ϑ_i	Parámetros del modelo dinámico del robot móvil $i = 1, 2, \dots, 6$
$\boldsymbol{\vartheta}$	Vector de parámetros del Robot móvil
α	Orientación del robot móvil.
$\mathbf{h}(\mathbf{x})$	Vector de campos escalares suaves en $\mathbb{R}^{2 \times 1}$ (modelo cinemático del robot móvil)
$\tilde{\mathbf{h}}(\mathbf{x})$	Vector de perturbaciones y cinemática no modelada
$\mathbf{f}(\mathbf{x})$	Campo vectorial suave en $\mathbb{R}^{2 \times 1}$ (modelo dinámico de robot móvil)
$\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$	Vector de perturbaciones y dinámica no modelada
$\mathbf{g}(\mathbf{x})$	Matriz de funciones de entrada
$\tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{x})$	Matriz de variaciones dinámicas de la matriz de entrada
$\mathbf{w}^*$	Matriz de pesos óptimos asociados a la función RBF para identificar $\mathbf{f}(\mathbf{x})$
$\hat{\mathbf{w}}$	Matriz de pesos estimados
$\tilde{\mathbf{w}}$	Matriz de error de pesos $\tilde{\mathbf{w}} = \mathbf{w}^* - \hat{\mathbf{w}}$
$\mathbf{W}^*$	Matriz de pesos óptimos asociados a la función RBF para identificar $\mathbf{g}(\mathbf{x})$
$\hat{\mathbf{W}}$	Matriz de pesos estimados
$\tilde{\mathbf{W}}$	Matriz de error de pesos $\tilde{\mathbf{W}} = \mathbf{W}^* - \hat{\mathbf{W}}$
$\boldsymbol{\omega}^*$	Matriz de pesos óptimos asociados a la función RBF para identificar $\boldsymbol{\delta}(\mathbf{x})$
$\hat{\boldsymbol{\omega}}$	Matriz de pesos estimados
$\tilde{\boldsymbol{\omega}}$	Matriz de error de pesos $\tilde{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\omega}^* - \hat{\boldsymbol{\omega}}$
φ_j^*	Neurona RBF con parámetros óptimos (centros y anchos)
$\boldsymbol{\varphi}^*(.)$	Vector de neuronas rbf con parámetros optimo
$\mathbf{c}_j^*$	Vector de centros óptimos de cada neurona j
$\mathbf{c}^*$	Vector de centros óptimos del vector de funciones rbf
σ_j^*	Apertura de cada neurona RBF

σ^*	Vector que contiene todos los valores de apertura del vector de neuronas
$L_f h_i(x), L_{g_j} h_i(x)$	Derivadas de Lie del sistema entrada-salida del robot móvil
$\Delta L_f h_i(x), \Delta L_{g_j} h_i(x)$	Derivadas de Lie correspondientes a las variaciones dinámicas y cinemáticas del robot móvil.
$\hat{v}_N(t)$	Vector de estimación neuronal
e	Error de velocidad
S	Superficie de deslizamiento
$\lambda_{x,y}$	Ganancia del error
Γ_i	Ganancia asociada a la función signo
t	Tiempo (dominio continuo)
t_S	Tiempo necesario para alcanzar la sup de deslizamiento
ϱ	Variable auxiliar
δ	Vector de variaciones dinámicas
$\lambda_{min}(\cdot)$	Operador que indica el autovalor mínimo de una matriz diagonal.
A :	Matriz de transición de estados de un sistema lineal
C :	Matriz de salidas de un sistema lineal
B o b :	Matriz de entrada de un sistema lineal
$\mathcal{L}$	función candidata de Lyapunov
k_i	constantes utilizadas en la definición de estabilidad $i = 1, 2, 3$
α_i	funciones de clase $\mathcal{K}$ $i = 1, 2$
B_r	espacio utilizado en la definición de estabilidad
$\mathcal{F}(x)$	función definida positiva
$E(x)$	matriz de desacoplamiento del sistema MIMO ($m \times m$)
r	grado relativo
D, D_0	dominios de una función
$S(x)$	superficie de deslizamiento
λ_i	constante asociada a la superficie de deslizamiento
$\Phi(x)$	campo que proyecta el sistema $f(x)$ sobre la superficie de deslizamiento
u^+ o u^-	supraíndice (sobre u o f) que indica valor creciente o decreciente
μ	valor que regula el campo de velocidad de los estados sea tangente a la superficie en un punto considerado
y_{ref}	señal de referencia de salida
u_{eq}	acción de control equivalente
$O(\cdot)$	términos de orden superior
ε	error de aproximación de la red neuronal
$\bar{\varepsilon}$	cota máxima del error de aproximación de la red neuronal
P	Matriz diagonal con elementos positivos definida por el diseñador
Q	Matriz solución de la ecuación de Lyapunov
Λ	matriz diagonal con valores constantes λ
M	matriz de inercias
$C(\cdot)$	matriz de Coriolis

$\mathbf{D}$	matriz de fricción (hidrodinámica o aerodinámica, según el caso)
$tr(.)$	Operador traza
b_i	constantes de diseño $i = 1,2,3,4,5$
$\boldsymbol{\eta}$	Actitud del Cuadricóptero $[\phi \ \theta \ \psi]^T$
ϕ	ángulo de balanceo (Roll)
θ	ángulo de cabeceo (pitch)
ψ	ángulo de guiñada (yaw)
$\mathbf{T}(\psi)$	es una matriz de transformación
$\mathbf{K}_u$	matriz diagonal de entrada al modelo reducido del Cuadricóptero
$\mathbf{K}_v$	matriz diagonal de estados del modelo reducido del Cuadricóptero
$\Delta \mathbf{H}_c$	derivada parcial de la matriz $\mathbf{H}$ con respecto al vector $\mathbf{c}$
$\Delta \mathbf{H}_\sigma$	derivada parcial de la matriz $\mathbf{H}$ con respecto al vector $\boldsymbol{\sigma}$
$\mathbf{K}_p$	matriz diagonal de ganancias proporcionales
$\mathbf{K}_d$	matriz diagonal de ganancias derivativas
$\mathbf{F}(t)$	fuerza de empuje proporcionado por los rotores
I_{xx}	inercia con respecto al eje X
I_{yy}	inercia con respecto al eje y
I_{zz}	inercia con respecto al eje Z
k_f	constante de fuerza del rotor
k_m	constante de par del rotor
ℓ	longitud del cable
m	masa del cuadricóptero
$\mathbf{q}$	vector de configuración del sistema cinemático de formación $(\mathbf{x}_1^w \ \psi_1^w \ \mathbf{x}_2^w \ \psi_2^w)^T$
$\xi_{o,i}^w$	posición del i – ésimo obstáculo. $(x_{o,i}^{w*} \ y_{o,i}^{w*} \ z_{o,i}^{w*})^T$
ξ_ℓ^w	posición de la carga útil $(x_\ell^w \ y_\ell^w \ z_\ell^w)^T$
d	distancia entre los dos vehículos aéreos no tripulados $\ \mathbf{x}_1^w - \mathbf{x}_2^w\ $
γ_1	ángulo de elevación $asen((z_2^w - z_1^w)/d)$
γ_2	orientación de guiñada de la formación $atan((y_2^w - y_1^w, x_2^w - x_1^w))$
V	potencial artificial positivo utilizada en la evasión de obstáculos
$\mathbf{E}_v$	Vector error velocidad del modelo cinemático de formación UAV
$\mathbf{X}_{ref}$	Referencia de velocidad de la formación
$\mathbf{X}$	Velocidad de la formación
$\mathbf{J}_1$	es el jacobiano de la tarea $\mathbf{J}_1(\mathbf{q})$
a_1	es un valor residual
$\mathbf{J}_2$	es el jacobiano de la tarea $\mathbf{J}_2(\mathbf{q})$
a_1	es un valor residual
$\mathbf{J}_1^\dagger$	matriz pseudoinversa de $\mathbf{J}_1$

ξ	vector de variables independiente de tareas $(x_\ell^w \ y_\ell^w \ z_\ell^w \ d \ \gamma_1 \ \gamma_2 \ \psi_1^w \ \psi_2^w)^T$
$\mathbf{v}_c$	vector de velocidades de referencia calculadas
$\mathbf{v}_x$	Variable auxiliar para cálculo de $\mathbf{v}_c$

Capítulo 1. Estado del Arte.

1.1. Introducción.

La robótica es un campo crucial para los Sistemas de Control, con un impacto creciente en la industria manufacturera y, más recientemente, en la agroindustria y el sector de servicios. Este campo ha impulsado el desarrollo de autómatas con altos niveles de destreza y autonomía, tanto en movimiento como en manipulación. Esta capacidad permite su aplicación en sistemas de producción altamente automatizados, así como en tareas y servicios en lugares de difícil acceso o en ambientes contaminados o peligrosos. Estas aplicaciones han tenido un impacto económico y social positivo en los países que las implementan [2],[5].

La robótica abarca la creación, planificación y programación de robots. Estos dispositivos, en contacto directo con el mundo físico, suelen realizar tareas monótonas y repetitivas, reemplazando a los humanos en dichas funciones. Los robots se pueden clasificar según su tamaño, ámbito de aplicación o finalidad. Esta tesis abordará la problemática de la navegación autónoma de vehículos autónomos y robots móviles.

Conforme se generan nuevas soluciones para las áreas de la navegación autónoma, los algoritmos se vuelven cada vez más complejos y requieren una mayor capacidad computacional. Aunque la tecnología electrónica ha avanzado junto con estas investigaciones, proporcionando plataformas de ejecución más potentes, la solución de estos problemas tiende a ser cada vez más tediosa y restringida a condiciones de trabajo específicas.

Un sistema robótico está compuesto por un tipo específico de robot, el cual integra diversos componentes que forman un sistema cohesivo. El robot se puede describir como la síntesis de varios subsistemas, entre los que destacan:

- **Sistema sensorial:** Compuesto por sensores que recopilan información sobre el estado del robot y su entorno.
- **Sistema de accionamiento:** Incluye los actuadores (como motores) que permiten realizar las acciones programadas.
- **Unidad de control:** Formada por componentes computacionales y software que regulan el comportamiento general del robot.

Además, se deben considerar:

- **Elementos estructurales:** Proporcionan rigidez y estabilidad al robot.
- **Elementos de transmisión y conversión del movimiento:** Modifican ejes, direcciones de rotación y velocidades.
- **Elementos terminales:** Adaptados a la aplicación del robot (como pinzas, electrodos de soldadura, inyectores de pintura).
- **Dispositivos auxiliares de entrada/salida:** Permiten la comunicación del usuario con la unidad de control.
- **Subsistemas de alimentación:** De tipo eléctrico, neumático o hidráulico.

El sistema robótico se puede analizar de lo general a lo particular mediante el análisis sistemático. El primer paso es considerar el sistema como una "caja negra", donde se identifican las entradas y salidas sin conocer su interior. La entrada al robot consiste en órdenes humanas, mientras que la salida son las tareas ejecutadas de forma autónoma.

Entre los diferentes sistemas robóticos se encuentran los terrestres (UGV Robot Móvil no-holonómico, tipo car-like), los aéreos (UAV multirotor y de alas fijas), y los marinos (navíos, aerodeslizadores).

La robótica móvil terrestre ha sido un tema de investigación relevante, avanzando en mapeo del entorno, navegación, generación de trayectorias, detección y evasión de obstáculos y así como también de tesis doctorales en particular. No obstante, aún no existe una solución general para la robótica móvil; cada entorno, grado de autonomía y tarea específica requiere soluciones distintas.

Dependiendo de la estrategia de control, se pueden resolver distintas problemáticas. Por ejemplo, *Rossomando* ([29],[30],[31]) muestra la aplicación de redes neuronales artificiales en robots móviles, centradas en el control neuronal adaptable para compensar las diferencias entre la dinámica nominal (con que fue ajustado el controlador) y real del robot, reduciendo el error en el seguimiento de trayectorias producidas por las posibles variaciones en la dinámica del robot.

En otro trabajo, *Rossomando* [33] también propone una metodología para el control de sistemas robóticos que puedan seguir una trayectoria preestablecida utilizando una red neuronal artificial para diseñar un control adaptable que se ajusta a la dinámica real del robot y con el uso de un control por superficie deslizante elimina el error de aproximación introducida por la red neuronal. La ventaja de esta técnica de control es que está totalmente diseñada en tiempo discreto lo que posibilita la implementación directa en PC y controladores digitales, reduciendo los posibles problemas de inestabilidad introducidos por el diseño de controladores en el dominio continuo y su posterior implementación en medios digitales. Este método puede ser aplicado a sistemas que son lineales o no lineales, variantes o invariantes en el tiempo. La estructura de control propuesta es simple y aceptablemente robusta con respecto a las incertidumbres del modelo conocido. En *Scaglia et al.* [36], se presenta el diseño de controladores basados en álgebra lineal para robots móviles considerando incertidumbre aditiva, que disminuyen significativamente el error de seguimiento frente a perturbaciones externas e incertidumbres paramétricas, sin incrementar la complejidad de los algoritmos de control. En otro trabajo *Rosales et al.* [24] demuestra la practicidad y funcionalidad de usar álgebra lineal y métodos numéricos en el diseño de controladores para sistemas no lineales y robóticos móviles. Una de las ideas principales de esta propuesta es plantear una aproximación del sistema robótico utilizando métodos numéricos en el diseño de controladores para sistemas no lineales y para sistemas robóticos móviles, y a partir de allí, encontrar las “mejores” acciones de control que lleven al sistema del estado actual al estado deseado (*Scaglia et al.* [34][35][37]), (*Serrano, Scaglia et al.* [39][40][41][42][43]), (*Rosales, Scaglia et al.* [24]).

Los UAV, que son cada vez más populares en investigaciones recientes, presentan ventajas en áreas de trabajo amplias o de difícil acceso. Coordinados con vehículos terrestres, realizan tareas de agricultura de precisión, mantenimiento de infraestructuras y operaciones de vigilancia. Dentro de los UAV se encuentran los multirotor, que son sistemas inestables, no-lineales y multivariantes, de dinámica compleja y altamente acoplada (*Vepa.* [48]) pero son robots aéreos capaces de navegar, estabilizarse en posiciones definidas y aterrizar en ambientes de pequeñas dimensiones, por ejemplo, laboratorios, galpones, entre otros (*Shima et al.* [46]). Estas características permiten realizar numerosas tareas de una manera más efectiva e impactando positivamente donde se apliquen. Inclusive existen estrategias de control aplicadas en la industria en las cuales se obtuvieron resultados satisfactorios, siendo el caso de *Rosales et al.* [26], donde utilizó un control PID adaptable junto con una red neuronal para identificar el modelo y retropropagar el error de control, el cual es aplicado a un UAV cuatrirotor para el seguimiento de trayectorias.

Los *vehículos marinos autónomos* son esenciales para exploración de petróleo, arqueología marina e investigación oceanográfica ya sean en lagos, mares u océanos. Para los *USV* (*underactuated surface vessel*), donde la estabilización y control de seguimiento de la posición y orientación de estos sistemas han recibido considerable atención de la comunidad de control. El reto de estos problemas se debe al hecho de que el movimiento de la nave es subactuado ya que posee tres grados de libertad la posición en y , posición en x y ángulo de rotación, mientras que sólo hay dos acciones de control disponibles la fuerza de control de velocidad (*surge*) y el momento de rotación (*yaw*). Particularmente los problemas de seguimiento de trayectoria han recibido gran atención de la literatura en los últimos tiempos; ver *Jiang & Nijmeijer* [20] y *Godhavn et al.* [19]. El uso de seguimiento de trayectoria para un sistema de navegación se justifica en áreas de trabajo estructuradas, así como en espacios de trabajo parcialmente estructurados, donde obstáculos inesperados se pueden presentar durante la navegación. En el primer caso, la trayectoria de referencia se puede establecer a partir de un planificador de trayectoria global. En el segundo caso, los algoritmos utilizados para evitar obstáculos generalmente vuelven a planear la trayectoria a fin de evitar una colisión, generando así una trayectoria de referencia nueva.

El objetivo es encontrar las acciones de control que combinadas resultan en el seguimiento de la trayectoria de referencia (x_{ref}, y_{ref}) . En este trabajo, un controlador diseñado originalmente para sistemas robóticos (*Serrano et al.* [41]; *Zheng & Sun* [51]), se aplica a un buque marino subactuado. Donde *Serrano et al.* [41] propone un algoritmo de control cuya originalidad está basada en la aplicación de técnicas de control basadas en Álgebra Lineal. Este simple pero preciso aprovechamiento sugiere que, conociendo el valor del estado deseado, se puede encontrar un valor de las acciones de control que fuerzan al sistema a moverse del estado actual al deseado.

En *Do et al.* [16], los autores propusieron un único controlador, llamado controlador universal, que resolvió la estabilización y el seguimiento simultáneamente. En *Wongard et al.* [49] se propuso un esquema de observador-controlador para rastrear una trayectoria en tiempo real utilizando las mediciones de posición y rumbo del navío autónomo.

Sobre la base del método directo y el esquema de pasividad de Lyapunov, *Jiang* [21] propuso dos soluciones de seguimiento constructivo para el barco subactuado. Sin embargo, tanto *Jiang* como *Do et al.* [21] impuso que la velocidad de guiñada (*yaw*) fuese distinta de cero.

Ghommam et al. [18] consideró el problema de controlar la posición del plano y la orientación de una embarcación de superficie autónoma utilizando dos propulsores laterales independientes. Se introducen dos transformaciones para representar el sistema en una forma pura en cascada.

Luego se emplea un enfoque discontinuo para la estabilización del sistema de forma encadenada a través de una retroalimentación de estado parcial. En *Bao-Li* [15], se obtuvo un controlador basado en el método directo y la técnica de refuerzo de Lyapunov. Una estrategia de control similar, que también se basa en el retroceso y la síntesis de Lyapunov, se propuso en *Tee & Ge* [47]. Los autores consideran el problema de rastrear una trayectoria deseada para embarcaciones oceánicas completamente activadas, en presencia de incertidumbres y perturbaciones desconocidas. Ideas similares también fueron encontradas en *Yu et al.* [50], se presentó un controlador de modo deslizante dinámico adaptable basado en el método de backstepping y la teoría de control de modo deslizante dinámico. *Lapierre y Jouvencel* [22] presentaron un controlador robusto no lineal diseñado para conducir un vehículo autónomo bajo el agua en un camino predefinido a una velocidad constante hacia adelante. En la mayoría de las técnicas basadas en backstepping existentes, una suposición muy restrictiva es que la

velocidad de referencia de guiñada debe satisfacer condiciones de excitación persistentes y, por lo tanto, no converge a cero. En consecuencia, un barco tendría problemas en rastrear trayectorias de referencia en línea recta, lo que hace que no sea una situación deseable.

Para resolver los problemas planteados en sistemas robóticos, se utilizarán técnicas del Control No-lineal, Control Adaptable, Álgebra Lineal y técnicas basadas en redes neuronales desarrolladas en el grupo de trabajo y que deberán conducir a algoritmos estables y eficientes. También se aplicaron algoritmos de control teniendo en cuenta la incertidumbre estructurada como no estructurada en sistemas *robóticos* (Scaglia et al [34] [36]), considerando también saturación en las acciones de control (Serrano, Scaglia et al, [43],[42]). Y como también pueden contemplar la acción de perturbaciones y dinámicas no modeladas que pueden afectar la estrategia de control *Rossomando* ([29]- [33]). Y más recientemente el empleo de una red neuronal convolucional profunda (CNN) la cual ha demostrado un rendimiento extraordinario en la extracción y expresión de la correlación de los estados inherentes en el espacio de estado de alta dimensión *LeCun et. al (2015) [23]*, *Schmidhuber (2015)[45]*. Esta tesis pretende explotar el diseño y la aplicación de inteligencia artificial y para construir un modelo no lineal aplicado al control de diferentes vehículos autónomos, tanto terrestres, marinos y aéreos, que describa el comportamiento dinámico incluyendo las incertidumbres inherentes del mismo, y que permita el seguimiento de trayectorias con el menor error posible.

1.2. Definición y Clasificación de Vehículos Autónomos

Un sistema no tripulado (Unmanned System - US) o vehículo no tripulado (Unmanned Vehicle - UV) puede definirse como un "sistema electromecánico, sin operador humano a bordo, que es capaz de ejercer su poder para realizar las misiones diseñadas" [1].

Los UV pueden ser controlados a distancia (por un piloto remoto) o pueden navegar de forma autónoma basándose en planes preprogramados o en sistemas de automatización dinámica más complejos [2]. Incluyen vehículos que se mueven en el aire (vehículos o sistemas aéreos no tripulados-UAV, UAS, comúnmente conocidos como "drones"), en el suelo (vehículos terrestres no tripulados-UGV), en la superficie del mar (vehículos de superficie no tripulados-USV) o en la columna de agua (vehículos submarinos no tripulados-UUV), descritos brevemente en las siguientes subsecciones.

1.2.1. Vehículos aéreos no tripulados (UAV)

Los vehículos aéreos no tripulados, también llamados drones, son sistemas no tripulados que navegan en el aire, capaces de inspeccionar amplias zonas y de llegar también a entornos hostiles para el ser humano. Pueden ser pilotados a distancia o controlados de forma autónoma [3][4].

Existen diferentes tipos de vehículos aéreos no tripulados (UAV), en función de la finalidad específica para la que han sido diseñados. Los vehículos aéreos no tripulados pueden diferir en tamaño desde el orden de centímetros hasta decenas de metros, en peso desde decenas de gramos hasta miles de kilogramos, en altitud operativa desde decenas de metros hasta treinta kilómetros, y en alcance desde 100 m hasta 1000 km [5].

Los vehículos aéreos no tripulados (UAV) de ala rotatoria o RUAS (Rotorcraft Unmanned Aircraft System) Y existen dos tipos de estos vehículos:

- Tipo Helicóptero.
- Multihélice.

Los vehículos multihélice o multi rotor son un tipo de vehículo aéreo de enorme difusión y que despierta un interés creciente entre los investigadores. Tienen capacidad de despegue y aterrizaje vertical y a menudo se desarrollan en forma de cuadricópteros, gracias a su pequeño tamaño, fácil control y alta maniobrabilidad.

La tecnología relacionada con los vehículos aéreos no tripulados está evolucionando de forma continua y rápida, y el número de aplicaciones de los vehículos aéreos no tripulados está creciendo de forma exponencial, e incluye la supervisión en tiempo real, la provisión de cobertura inalámbrica, la teledetección, la búsqueda y el rescate, la entrega de paquetes, la seguridad y la vigilancia, la agricultura de precisión y la inspección de infraestructuras civiles, como se muestra en la figura 1-1 [3][4].

Ventajas frente a los vehículos de alas fijas

- Son vehículos tipo VTOL (Vertical Take-Off and Landing), despegue y aterrizaje vertical.
- Movimiento omnidireccional.
- Vuelo Estacionario.
- Buen desempeño en vuelos a baja velocidad.
- Mejor desempeño en ambientes interiores de poco espacio.
- Mayor facilidad de miniaturización.

El entorno en el que operan los vehículos aéreos no tripulados puede afectar en gran medida a los resultados de sus misiones. El viento, la lluvia y las tormentas extremas pueden hacer que el UAV se desvíe de su trayectoria predeterminada o, sobre todo en el caso de los pequeños UAV, no permitir que el vehículo funcione y realice mediciones. Los problemas relacionados con las condiciones meteorológicas se agravan aún más en caso de catástrofes naturales o provocadas por el hombre, como, por ejemplo, tsunamis, huracanes o atentados terroristas [6]. Otro problema relacionado con el entorno operativo del UAV surge de la posible presencia de obstáculos a lo largo de su trayectoria, y esto afecta tanto a entornos exteriores como interiores. Además, los obstáculos pueden ser estacionarios o estar en movimiento, lo que hace más complejo evitarlos.

La altitud alcanzada por los vehículos aéreos no tripulados es otro parámetro importante que puede verse influido por las condiciones del entorno. Si la elevación del área de interés cambia rápida y significativamente, por ejemplo, en el caso de un terreno escarpado, el UAV debe ser capaz de seguir estos cambios rápidamente, adaptándose y alcanzando la altitud requerida. Además, en el caso de aplicaciones a gran altura, el UAV debe ser capaz de adaptarse a los cambios de densidad y temperatura atmosférica, preservando su rendimiento aerodinámico.

La carga útil del UAV puede afectar a las capacidades de navegación y medición del vehículo, así como a la resistencia de la misión y al área cubierta, que son requisitos importantes para las aplicaciones en las que el UAV debe operar durante largos periodos de tiempo sobre grandes regiones de interés [6].

El peso limitado de la carga útil, la altitud y la distancia cubierta, así como las influencias de las condiciones meteorológicas y los obstáculos en el manejo, representan algunos puntos

débiles de los UAV (figura 1-1) que la investigación intenta resolver. La amplia popularidad de los UAV no se reproduce en otras clases de UV.

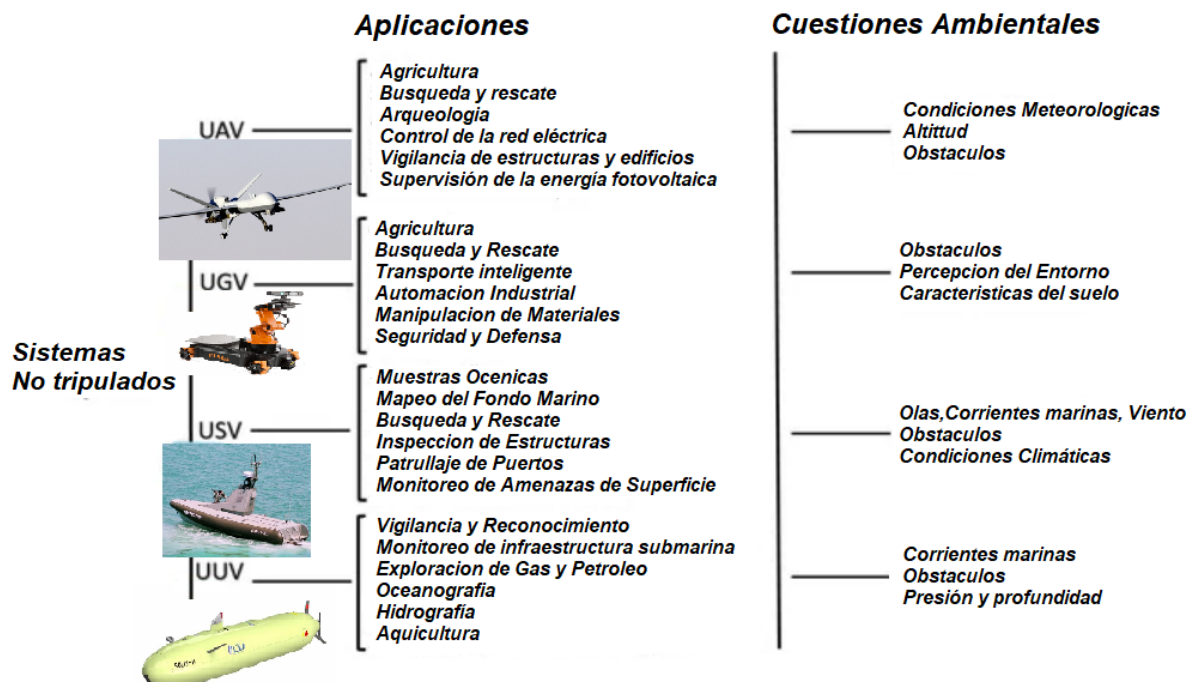


figura 1-1: Tipos de sistemas no tripulados y sus factores ambientales críticos.

1.2.2. Vehículos Terrestres no Tripulados (UGV)

Los UGV son sistemas no tripulados que operan en tierra. Se utilizan para muchas aplicaciones (figura 1-1), como la exploración del espacio, la detección del entorno y la búsqueda y el rescate, y pueden tener muchas configuraciones diferentes, normalmente definidas por la tarea que deben realizar, así como por el entorno en el que deben operar. Los UGVs se han desarrollado en diferentes tamaños (que varían desde 500 g a 25 toneladas [7]) y configuraciones, normalmente vinculadas a la misión para la que fueron diseñados [8].

Los UGV suelen estar equipados con un controlador y sensores a bordo para observar el entorno y tomar decisiones de forma autónoma o enviar la información a distancia a un operador humano [2][8]. Dado que los sensores de a bordo de los UGV no pueden ver lo que hay más allá de los obstáculos que los rodean, este tipo de vehículos no tripulados puede verse obstaculizado por su dependencia de la detección en la línea de visión (figura 1-1) [9].

Además, para este tipo de vehículos, el entorno operativo es una fuente de algunos desafíos. El polvo, el humo y la lluvia pueden influir fuertemente en los resultados de la misión del UGV, limitando la velocidad operativa y la capacidad de evitar posibles obstáculos, por ejemplo, otros vehículos, que en este caso pueden ser estáticos o en movimiento. Los UGV deben ser capaces de ajustar su trayectoria y velocidad en un tiempo adecuado para evitar colisiones. Cuanto mayor sea la velocidad del UGV, mayor será la distancia a la que deben detectarse los obstáculos, y menor será el tiempo disponible para cambiar de trayectoria o detener el vehículo, teniendo en cuenta también que la distancia de frenado del UGV hasta la parada total aumenta con la velocidad.

El tipo de terreno por el que se mueve el vehículo es otro factor ambiental capaz de influir en los resultados de su misión y en sus operaciones. El terreno atravesado puede ser de tipo carretera, urbano, campo o fuera de la carretera. Los entornos urbanos son en general más complejos y dinámicos, debido a la presencia de muchos cruces, vehículos y peatones, que se mueven a diferentes velocidades y en diferentes direcciones. Las condiciones fuera de la carretera pueden ser menos complejas cuando el terreno es firme y regular, como en el caso, por ejemplo, de un desierto, pero también pueden ser más complejas cuando las condiciones del terreno son irregulares e inestables, como en el caso de los bosques [10].

La grava, el pavimento, el suelo de firmeza variable, el barro, la nieve, el hielo, el agua y la vegetación de diferentes alturas y grosores son otros tipos de terreno difíciles de atravesar para los UGV, prestando también atención a posibles masas de agua y barro que el vehículo debe ser capaz de evitar a tiempo para no correr el riesgo de quedarse atascado.

La percepción del entorno y el nivel de autonomía del UGV son las principales características en las que se centra el desarrollo tecnológico actual y futuro de este tipo de vehículos no tripulados.

1.2.3. Vehículos de Superficie no Tripulados (USV)

Los USV son embarcaciones que operan en la superficie del agua y pueden ser operados a distancia o de forma autónoma. Los USV pueden adoptar muchas formas diferentes, dependiendo de la aplicación específica [4]. Su peso puede variar desde decenas de kg hasta miles de kg, con velocidades que pueden variar desde 1 m/s hasta unos 20 m/s [11].

Los USV pueden operar en condiciones peligrosas y arriesgadas para la seguridad humana. Además, este tipo de vehículos son compactos y tienen un bajo coste de mantenimiento.

Aunque los USV se utilizaron inicialmente en aplicaciones típicamente navales, como, por ejemplo, la vigilancia y el reconocimiento, hoy en día también se utilizan ampliamente en aplicaciones civiles, como, por ejemplo, la vigilancia y la evaluación del medio ambiente, como puede verse en la figura 1-1.

La navegación autónoma, la búsqueda y el rescate, la prospección en alta mar en las industrias del petróleo y el gas, la cartografía del fondo marino y la inspección de estructuras por encima y por debajo del agua son otros ejemplos de aplicaciones de los USV [4]. Los USVs necesitan operar en presencia de olas, corrientes y vientos (figura 1-1).

Este tipo de vehículo opera en contacto con dos entornos, el aire y el agua, que tienen características físicas completamente diferentes. Es necesario que los USV tengan la suficiente percepción del entorno para detectar y evitar los obstáculos que puedan estar por encima o por debajo del agua, para estimar su movimiento y distancia, y para percibir, en el caso de las zonas costeras, el límite entre el agua y la tierra.

Las condiciones meteorológicas y acuáticas adversas, como la lluvia y el viento extremo o las aguas agitadas y revueltas, pueden afectar en gran medida a los resultados de las misiones y al funcionamiento de los USV.

La resistencia para misiones de larga duración y el funcionamiento en condiciones meteorológicas extremas, así como la evitación de obstáculos por encima y por debajo del agua son los retos tecnológicos que constituyen los principales temas de investigación.

1.2.4. Vehículos Submarinos no Tripulados (UUV)

Los UUVs operan bajo la superficie del agua con una mínima o nula intervención del operador humano. Los UUVs pueden ser de diferentes tipos, variando en forma y tamaño, índices de profundidad, carga útil, capacidades de navegación y control. Los UUVs pueden diferir en longitud desde poco más de un metro hasta decenas de metros, pueden operar a diferentes profundidades que varían de 200 a 6000 m, y a diferentes velocidades de alrededor de 0,5 a 4 m/s, con un peso de hasta miles de kg [12][13]

Estos vehículos pueden ser vehículos teledirigidos (ROV), controlados por un operador a distancia, o vehículos submarinos autónomos (AUV), que funcionan independientemente de la intervención humana directa [4]. Los AUVs son los más complejos, ya que tienen que contar con funciones autónomas en un entorno difícil como el acuático.

Las aplicaciones de los UUV incluyen la vigilancia persistente, la guerra antisubmarina, la construcción submarina y el apoyo al mantenimiento de infraestructuras, la oceanografía, la hidrografía y las contramedidas contra las minas, como se muestra en la figura 1-1 [4].

Los UUVs deben operar en un entorno difícil, bajo una alta corriente oceánica y una fuerte presión hidráulica (figura 1-1). La cantidad de luz disponible bajo el agua es a menudo escasa, debido a las partículas de agua que dispersan la luz al entrar en el océano, o a la turbidez como, por ejemplo, en el caso de las aguas costeras poco profundas. La navegación y la maniobrabilidad de los UUV también pueden verse muy afectadas por las corrientes oceánicas y la densidad del agua. En algunos casos extremos, los cambios repentinos de densidad pueden incluso impedir el movimiento de los UUV a través del agua. La estabilidad del vehículo también puede verse comprometida por el efecto del movimiento del agua causado por el viento o las variaciones de densidad en aguas más profundas [14]. Los UUV también deben prestar atención a la detección y evitación de obstáculos estáticos o en movimiento, como en el caso de los otros tipos de UUV.

Además, dado que mantener una conexión constante con los operadores remotos en tierra puede ser muy difícil en aguas profundas, la capacidad de navegación precisa representa otra cuestión crítica [13][14].

1.3. Hipótesis

De acuerdo a la problemática vigente en el ámbito de los vehículos autónomos, el seguimiento de trayectorias es un tema constante de estudio. En base a las investigaciones precedentes y el planteo de un análisis detallado de las técnicas con las cuales se pretende afrontar esta problemática, se derivó la siguiente hipótesis: La aplicación de técnicas de control neuro adaptable, mediante el uso de técnicas neuronales y control no-lineal, que permite estimar las variaciones dinámicas de los vehículos autónomos tratados en esta tesis, resolviendo así el problema de seguimiento de trayectorias con referencias predefinidas. La eficacia de los controladores propuestos en este proyecto, es determinada mediante la comparación de los errores obtenidos con respecto a los controladores de trabajo de investigación presentes en la literatura científica.

1.4. Objetivo General

Desarrollar algoritmos de control avanzados, estables y de bajo costo computacional para la navegación de vehículos autónomos (aéreos, terrestres y marinos) en medios no estructurados, mediante la utilización de técnicas basadas en control no lineal e inteligencia artificial.

1.5. Objetivos Específicos:

- Describir las características de los vehículos autónomos, para establecer peculiaridades y problemas en su control.
- Desarrollar estrategias originales de control que permitan a los sistemas autónomos desarrollar tareas de navegación complejas o que mejoren el rendimiento de controladores ya conocidos.
- Diseñar las estrategias de control necesarias para resolver el problema de navegación de sistemas autónomos, con bajo costo computacional, utilizando Control No Lineal e Inteligencia Artificial para su aplicación on-board de los distintos vehículos.
- Diseñar algoritmos de control para un sistema autónomo (Robot Móvil, UAV – Unmanned Aerial Vehicles, Vehículo marino autónomo), el cual pueda navegar en distintos tipos de entornos.
- Garantizar analíticamente la estabilidad de los sistemas de control diseñados.
- Probar experimentalmente las estrategias de control resultantes.
- Obtener formación de posgrado a nivel Doctorado con experiencia en investigación al más alto nivel, particularmente en Ciencias de Ingeniería con énfasis en el control de sistemas no lineales y en particular en sistemas robóticos.

1.6. Justificación

El constante crecimiento económico a nivel mundial y en particular de la industria y sociedad han generado una gran cantidad de nuevas necesidades, dentro de las cuales el transporte es uno de los factores determinantes en este escenario global, además del desarrollo de las necesidades, también se han desarrollado sistemas avanzados en el ámbito tecnológico que permiten mantener gran interés en la robótica móvil terrestre ([20][24][29][30]), como también el control de vehículos aéreos [46][26] y marinos [15] [16][42]. El amplio abanico de áreas en las cuales se está dividiendo el control de vehículos autónomos y su evolución ha propiciado que se generen nuevas áreas de interés y técnicas de gran impacto para el control de vehículos y dotarlos de autonomía, con la finalidad de que las perturbaciones externas y las variaciones en su dinámica o sus parámetros no afecten su control ni produzcan variaciones en la trayectoria a seguir ([32][33]), para lo cual es necesario incluir la capacidad de asimilar parámetros como reconocimiento y ajuste de parámetros y compensación dinámica. Dado que en el ámbito de la robótica móvil existen diversos tipos de mecanismos o configuraciones que permiten el desplazamiento del vehículo, es necesario conocer detalles propios del sistema móvil a analizar, tales como: configuración de tracción, dirección y grado de actuación. Las características citadas anteriormente definen la clasificación del sistema de acuerdo al grado en el cual se puede manipular, puesto que pueden ir desde ser sistemas sub actuados hasta ser completamente no holonómicos, es decir, que tienen menos grados de libertad controlables, algunas de las soluciones para dicha problemática se han desarrollado a través del tiempo obteniendo grandes resultados (Rossomando [33], Rosales [26], Serrano[42], y Scaglia [39]). El diseño de un

controlador es un proceso que debe apegarse a las características mecánicas y físicas del sistema que se desea manipular (Do et. al. [17]; Ghoman et. al.[18], Lapierre et. al.[22]), por tal motivo, es necesario conocer la mayor cantidad de características y variables que influyen en el comportamiento de dicho sistema, así como los aspectos o variables externas que pueden propiciar variaciones en las salidas, o respuestas a los estímulos directos a las variables de entrada. En este ámbito, la inteligencia artificial ha representado una alternativa viable gracias a su capacidad para abordar problemas y otorgar distintas soluciones para problemas complejos (LeCun et al. [23],Rosales [27], Scaglia [36], Serrano [39] Schmidhuber [45]). La presente tesis muestra el desarrollo de un controlador neuro-adaptable para mejorar el seguimiento de trayectorias y aumentar el rechazo a las perturbaciones para diferentes tipos de vehículos autónomos, teniendo en cuenta toda la información disponible. Esta tesis también permite la simulación del comportamiento de los vehículos estudiados mediante distintas herramientas computacionales considerando entornos propios de un ambiente real.

1.7. Marco de Realización.

La realización de esta tesis ha estado determinada por las actividades de investigación que se realizan en el Instituto de Automática y del Instituto de Ingeniería Química, ambos pertenecientes a la Universidad Nacional de San Juan, ambos institutos colaboran en la línea de control de vehículos autónomos, y en particular, en el diseño de controladores de movimiento para robots móviles tipo monociclo de la familia Pioneer (como el PIONEER 2DX usado en uno de los experimentos).

Los estudios experimentales de las tesis se han realizado sobre distintos vehículos autónomos UAVs y WMR (un robot móvil de laboratorio). El autor de esta tesis se ha ocupado, de modo directo, de la especificación y la implementación de los algoritmos de control, algunos de los cuales fueron desarrollados en Matlab (Pioneer) y posteriormente en Python (Hummingbird) a bordo del robot WMR y de los UAVs respectivamente, con la utilización del sensor optitrack para cerrar los lazos de control. Así, todos los experimentos realizados se han llevado a cabo con el uso del mencionado vehículo. La implantación de todos los algoritmos, obtenidos como fruto de la investigación, ha sido realizada mediante el uso de Matlab y Python, bajo el sistema operativo Linux y Windows 10, y utilizando PC Intel I5.

1.8. Estructura de la Tesis.

La tesis se encuentra dividida en ocho capítulos. Exceptuando el primer capítulo y el dedicado a las conclusiones, los restantes se inician con una introducción, que expone la problemática que se debe resolver junto con una breve descripción del contenido, en el cuerpo se presenta la solución propuesta junto con los resultados experimentales y finalizan con unas conclusiones, que destacan los aspectos más relevantes de cada capítulo. La organización de la tesis se describe en los siguientes párrafos del presente apartado.

El Capítulo 2, titulado “Preliminares teóricos” presenta las distintas teorías y herramientas analíticas para el estudio de la problemática de control que luego serán aplicados a los distintos tipos de vehículos y robots aquí estudiados. Como también se realiza una breve introducción a las redes neuronales artificiales y su aplicación a la identificación de sistemas, los cuales se usarán en la implementación de los controladores de los sistemas considerados. Incluye también los fundamentos teóricos del análisis de estabilidad de Lyapunov aplicado al control y la identificación, siendo una herramienta fundamental en el desarrollo de controladores con características adaptables. Finalmente se incluyen consideraciones prácticas para las reglas de ajuste obtenidas en el análisis de estabilidad.

El Capítulo 3, basado en el trabajo “Control mixto para el seguimiento de trayectoria en buques marinos”, presenta la técnica de Álgebra lineal aplicada a la cinemática de un vehículo marino y la estructura adaptable desarrollada sobre la dinámica conocida del navío. En este capítulo también se muestra la capacidad de ajuste de parámetros que adapta a la dinámica real del vehículo. Se demuestra también la viabilidad de la técnica propuesta cuando se somete el vehículo marino a distintos tipos de perturbaciones externas, que incluyen la acción de las olas y el viento. Los resultados de la simulación son presentados al final del capítulo junto a las conclusiones sobre este vehículo en particular.

En el Capítulo 4 se propone un método de control usando técnicas de Álgebra Lineal (LABC) para robots móviles. En el cual el robot móvil debe seguir las trayectorias deseadas, en esta propuesta se presenta el diseño de un controlador de álgebra lineal en combinación con un estimador neuronal. Donde además el robot móvil cuenta con incertidumbres aditivas. Los valores de incertidumbre en cada momento de muestreo se obtienen mediante estimación basada en Redes Neuronales, donde se incluye el diseño de un estimador neuronal del error de modelado junto con la demostración de la convergencia a cero del error de seguimiento.

En el Capítulo 5 se presenta una técnica de control adaptable para vehículos aéreos, la propuesta integra el algoritmo supertwisting (STA).

El algoritmo supertwisting (STA) resuelve el problema más importante del efecto chattering que se encuentra generalmente en el control deslizante. El controlador adaptable actualiza los parámetros del controlador en línea para reducir los errores de control. Este capítulo también incluye un análisis de estabilidad utilizando la teoría de Lyapunov, que demuestra la estabilidad del sistema de lazo cerrado. El esquema propuesto fue validado experimentalmente. Los resultados confirman la efectividad del enfoque propuesto y verifican la estabilidad del sistema de control y la ley de adaptación usando la técnica de control propuesta.

En el Capítulo 6 se presenta una propuesta para el control de formación, que facilita el transporte de una carga útil suspendida por cable con dos cuadricópteros. La estructura de control se basa en un esquema de capas que combina un controlador cinemático basado en el espacio nulo y un compensador neuronal sobre un control PID. El controlador de espacio nulo está diseñado para generar referencias de velocidad para los Cuadricópteros en la formación, mientras que el controlador neural de modo deslizante recibe dichas velocidades de referencia y realiza una compensación dinámica para posibles incertidumbres paramétricas, así como para las perturbaciones dinámicas causadas por la carga fijada a los Cuadricópteros. La estabilidad del sistema de control fue demostrada usando la teoría de Lyapunov. Además, se incluyen modelos dinámicos muy detallados para los Cuadricópteros, los cables flexibles y la carga útil en un escenario muy realista. Para finalizar el trabajo, se presentan simulaciones numéricas cuyos resultados demuestran un buen rendimiento del controlador propuesto.

Y por último, en el Capítulo 7 presenta las conclusiones, trabajos futuros y las publicaciones resultantes de esta tesis doctoral.

Capítulo 2. Preliminares Teóricos

Este capítulo presenta la base teórica necesaria para comprender el problema del modelado y el control de los vehículos autónomos. En primer lugar, se discuten conceptos sobre el modelado en espacio de estados. Posteriormente, se presentan definiciones y tipos de sistemas y conceptos de estabilidad, los cuales son utilizados en la elaboración de esta tesis. Por último, se discute la teoría del control multivariable, así como el método de sintonización de los controladores que se utilizarán en capítulos posteriores de este trabajo de investigación.

2.1. Introducción:

El estudio de la teoría de control de sistemas no lineales ha ido creciendo en los últimos años, tanto por su importancia técnica como por los impactos de sus aplicaciones. Áreas como la aeroespacial, la electrónica, la química y la petroquímica, la bioingeniería y la robótica, evolucionan cada día creando nuevos casos de aplicaciones prácticas de esta técnica.

Se dice que los sistemas no son lineales cuando no satisfacen el principio de superposición o el principio de proporcionalidad entrada-salida. Así, los métodos clásicos utilizados en el estudio de los sistemas lineales (lugar de la raíz, diagramas de Bode y Nyquist) no son aplicables a los sistemas no lineales. Por ello, es necesario recurrir a otros métodos para estudiar estos sistemas, en particular su estabilidad, y, entre otros, cabe destacar los métodos de Lyapunov [52].

El control no lineal es una ley de control que consta de términos no lineales en forma de realimentación. Como en el caso lineal, el control no lineal utiliza la realimentación, ya sea de la salida o del estado, para generar una señal de control que actuará sobre el proceso. A veces la cadena de realimentación tiene un diseño no lineal, ya sea para compensar las no linealidades del sistema a controlar, o para mejorar ciertos aspectos de control [53].

Cuando los sistemas no lineales deben controlarse aplicando métodos de control lineal, éstos generalmente sólo permiten un buen rendimiento dentro de un pequeño rango de funcionamiento del sistema. Fuera de este rango, el rendimiento no será satisfactorio o incluso inestable. En estos casos se hace necesario considerar el sistema linealizado en torno a ciertos puntos de funcionamiento (puntos de equilibrio) utilizando parámetros de control específicos para cada punto (programación de la ganancia) o ajustar los parámetros automáticamente (control adaptable), o utilizar una retroalimentación negativa que haga que el sistema de lazo cerrado se comporte como lineal (linealización por realimentación).

No siempre es posible linealizar el sistema en torno a un punto de equilibrio, por ejemplo, cuando el sistema contiene fricciones de Coulomb, huecos, zonas muertas, saturaciones, etc., no linealidades muy comunes en los procesos y sistemas reales. Para este tipo de no linealidades, denominadas no linealidades discontinuas, es necesario utilizar técnicas de control específicas. Normalmente, el diseño de sistemas no lineales, requiere un contacto más estrecho con la naturaleza de los sistemas que se van a controlar, para permitir una mejor comprensión de los fenómenos que se producen.

Entre las posibles técnicas para tratar el problema de control, el presente trabajo consiste en el estudio de control de sistemas no lineales, detallando el modelo no lineal de los vehículos autónomos aquí tratados y sus leyes de control más adecuadas y que sean un aporte a la presente tesis. Entre las cuales se pueden mencionar, las técnicas de: control por dinámica inversa, control adaptable y redes neuronales.

2.2. Fundamentos teóricos de Sistemas No lineales:

Un sistema dinámico no lineal de orden n puede representarse mediante un número finito de ecuaciones diferenciales no lineales en la llamada forma de espacio de estado.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)\end{aligned}$$

donde $\dot{x}_i$ representa la derivada de x_i con respecto al tiempo. Las variables $x_1, x_2, \dots, x_n$ representan los estados del sistema, que son las variables que dan una descripción completa del sistema en un momento determinado, y $f_1, f_2, \dots, f_n$ son funciones no lineales que describen la dinámica global del sistema. Con esta notación, el espacio de estados también puede escribirse en forma vectorial.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (2-1)$$

donde $\mathbf{f}$ es una función vectorial no lineal $n \times 1$ y $\mathbf{x}$ es el vector de estado $n \times 1$. Un valor particular del vector de estado se llama punto, porque corresponde a un punto en el espacio de estado o una configuración particular del sistema dinámico. El número de estados n se denomina orden del sistema. Una solución $\mathbf{x}(t)$ de la Ec. (2-1) que suele corresponder a una curva en el espacio de estados a medida que el tiempo t varía de cero hasta el infinito, se conoce generalmente como trayectoria del estado o del sistema [44]. Lo más importante en la ingeniería de sistemas de control es el comportamiento del sistema $\mathbf{x}(t)$ en torno a algún punto de funcionamiento o movimiento nominal deseado, lo que introduce la noción de estabilidad, un concepto que se verá en detalle en la siguiente sección.

Si la trayectoria de un sistema corresponde a un único punto a lo largo de su evolución temporal completa, entonces dicho punto es un equilibrio. En otras palabras, un valor particular $\mathbf{x}^*$ del vector de estado es un punto de equilibrio del sistema (2-1) si, para la condición inicial $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^*$, la trayectoria del sistema $\mathbf{x}(t)$ permanece igual a $\mathbf{x}^*$ para todo t mayor que cero.

Esto significa también que el vector constante $\mathbf{x}^*$, que es un punto de equilibrio, satisface $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = 0$. El concepto de equilibrio es muy importante para el estudio de la estabilidad, ya que muchos problemas de estabilidad se formulan naturalmente con respecto a puntos de equilibrio [53].

El sistema no lineal (2-1) se dice autónomo, ya que $\mathbf{f}$ no depende explícitamente del tiempo t . Por otro lado, el sistema se llama no autónomo si el vector de funciones no lineales $\mathbf{f}$ depende explícitamente del tiempo t , tal que

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \quad (2-2)$$

Una propiedad análoga para los sistemas lineales depende de si la matriz de transición de estados $\mathbf{A}$ varía con el tiempo o no, clasificándose como variable en el tiempo o invariable en el tiempo, respectivamente.

Además, es importante señalar que las ecuaciones de estado (2-1) y (2-2) se describen sin la presencia explícita de una variable de entrada $\mathbf{u}$, es decir, la llamada ecuación de estado no forzada. Hay dos razones para trabajar con una ecuación de estado no forzada:

- (i) Se supone que la entrada al sistema es cero.
- (ii) La ecuación de estado representa la dinámica de lazo cerrado de un sistema retroalimentado compuesto por el controlador y la planta, siendo la entrada de

control $\mathbf{u}$ una función del estado $\mathbf{x}$, una función del tiempo t , o ambas, y por lo tanto desapareciendo en la dinámica de lazo cerrado [52], [53].

Una representación más general de un sistema no lineal de lazo abierto, es decir, la planta del sistema considerado, es la ecuación diferencial vectorial de primer orden n -dimensional

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (2-3)$$

con el vector de funciones no lineales $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$ que depende de la variable temporal $t \in \mathbb{R}^+$, el vector de estado $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, y el vector de entrada $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p$ que se definirá en función del estado $\mathbf{x}$ y del tiempo t .

2.3. Propiedades Fundamentales:

Una función vectorial generalizada $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ se dice que es Lipschitz si satisface la condición de Lipschitz, que viene dada por la desigualdad

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \mathbf{f}(t, \mathbf{y})\| \leq \mathcal{L} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \quad (2-4)$$

para todo $(t, \mathbf{x})$ y $(t, \mathbf{y})$ en alguna vecindad de $(t_0, \mathbf{x}_0)$, con $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$. Para $f(t, \mathbf{x})$, siendo una función autónoma y escalar, la condición de Lipschitz puede escribirse como

$$|f(t, \mathbf{x}) - f(t, \mathbf{y})| \leq \mathcal{L} |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \quad (2-5)$$

Entonces, se dice que f es una función de Lipschitz, lo que implica que en un gráfico de $f(\mathbf{x})$ frente a $\mathbf{x}$, una recta que una dos puntos cualesquiera de $f(\mathbf{x})$ no puede tener una pendiente cuyo valor absoluto sea mayor que la llamada constante de Lipschitz $\mathcal{L}$ [53].

La existencia y unicidad de la solución $\mathbf{x}(t)$ para un sistema de ecuaciones diferenciales de la forma (2-1) y (2-2), para un estado inicial dado $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$, con $t > t_0$, puede garantizarse si el lado derecho de (2-1) y (2-2) satisface la condición de Lipschitz en (2-4) [52].

Sea $\mathbf{f}$ una función continuamente diferenciable en cada punto del intervalo abierto (x, y) . El Teorema del Valor Medio establece que existe un punto z en (x, y) tal que [52].

$$f(x) - f(y) = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=z} (y - x) \quad (2-6)$$

Por último, una matriz cuadrada $\mathbf{A}$ se llama matriz de Hurwitz cuando todos sus valores propios λ_i tienen una parte real estrictamente negativa.

2.4. Conceptos de estabilidad:

Como ya se ha mencionado, la noción intuitiva de estabilidad de los sistemas dinámicos es una especie de buen comportamiento de las trayectorias del sistema en torno a un punto de funcionamiento deseado (típicamente un equilibrio) y si las trayectorias del sistema se mantendrán cerca del equilibrio si son ligeramente perturbadas. Pero en los problemas prácticos, la estabilidad del movimiento es una preocupación más común, es decir, el comportamiento de las trayectorias del sistema alrededor de una trayectoria de movimiento deseada. Sin embargo, el problema de estabilidad del movimiento puede transformarse en un problema de estabilidad equivalente alrededor de un punto de equilibrio. Además, por comodidad, se supone que el punto de equilibrio analizado está en el origen, es decir, $\mathbf{x} = 0$, ya que cualquier punto de equilibrio puede desplazarse al origen mediante un cambio de variables. Por lo tanto, todas las definiciones de estabilidad serán dadas como un problema de estabilidad alrededor del origen del espacio de estados [52], [53].

Definición 2-1 El punto de equilibrio $x = 0$ del sistema (2-1) es estable si, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq 0 \quad (2-7)$$

De lo contrario, es inestable.

Esta definición de estabilidad (también llamada estabilidad en el sentido de Lyapunov) requiere la existencia de $\delta > 0$ para cada $\varepsilon > 0$ y no para algún $\varepsilon > 0$. Es decir, para cualquier valor de ε , debe existir un valor δ , posiblemente dependiente de ε , tal que una trayectoria que comience en una vecindad δ del origen nunca abandonará la vecindad ε [52].

Definición 2-2 El punto de equilibrio $x = 0$ del sistema (2-1) es asintóticamente estable si es estable y se puede elegir δ de forma que

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0, \quad (2-8)$$

La estabilidad asintótica significa que el punto de equilibrio es estable y que, además, las trayectorias del sistema iniciadas cerca del origen convergen realmente a él a medida que el tiempo t se acerca al infinito. El conjunto de todos los puntos en los que las trayectorias iniciadas en estos puntos convergen finalmente al origen se denomina dominio de atracción. Un punto de equilibrio que es estable en el sentido de Lyapunov, pero no asintóticamente estable se llama marginalmente estable [53]

Definición 2-3 El punto de equilibrio $x = 0$ del sistema (2-1) es exponencialmente estable si existen $\alpha > 0$ y $\lambda > 0$ tales que

$$\|x(t)\| \leq \alpha \|x(0)\| e^{-\lambda t}, \quad \forall t \geq 0 \quad (2-9)$$

Esto significa que las trayectorias del sistema iniciadas en el dominio de atracción de un equilibrio exponencialmente estable convergen a él más rápido que una función exponencial. De hecho, el número positivo λ se llama tasa de convergencia. Nótese que la estabilidad exponencial implica estabilidad asintótica, pero lo contrario es falso [53].

Definición 2-4 Si el equilibrio $x = 0$ del sistema (2-1) satisface la definición de estabilidad de la Definición 2-1, la estabilidad asintótica de la Definición 2-2, o la estabilidad exponencial de la Definición 2-3 para cualquier condición inicial $x(t)$, entonces se dice que el punto de equilibrio es globalmente (asintóticamente o exponencialmente) estable.

De lo contrario, el comportamiento del sistema se caracteriza sólo localmente. Es decir, sólo sabemos cómo evolucionan las trayectorias del sistema después de empezar cerca del punto de equilibrio, pero no tenemos información sobre cómo se comportará el sistema cuando las condiciones iniciales se encuentran a cierta distancia del equilibrio.

El método directo de Lyapunov puede utilizarse para estudiar la estabilidad de los sistemas de forma local o global. El análisis local se ocupa de la estabilidad en una vecindad del punto de equilibrio, mientras que el análisis global describe las propiedades de estabilidad en todo el espacio de estados. Este análisis suele implicar una función definida positiva local o globalmente, es decir, una función estrictamente positiva, que sólo es nula en el origen.

Teorema 2-1 (Estabilidad) Si, en una bola B_r que contiene el origen, existe una función escalar $V(x)$ con primeras derivadas parciales continuas a lo largo de las trayectorias de (2-1) tal que

- $V(x)$ es localmente definida positiva en B_r ,
- $\dot{V}(x)$ es localmente semidefinida negativa en B_r ,

entonces el origen de (2-1) es estable. Si la bola B_r puede expandirse para ser todo el espacio de estados, entonces el origen es globalmente estable [53].

Teorema 2-2 (Estabilidad asintótica) Si, en una bola B_r que contiene el origen, existe una función escalar $V(x)$ con primeras derivadas parciales continuas a lo largo de las trayectorias de (2-1) tal que

- $V(x)$ es localmente definida positiva en B_r ,
- $\dot{V}(x)$ es localmente definida negativa en B_r ,

entonces el origen de (2.1) es asintóticamente estable. Si la bola B_r puede expandirse para ser el espacio de estados completo y

- $V(x) \rightarrow \infty$ como $\|x(t)\| \rightarrow \infty$

entonces el equilibrio en el origen es globalmente asintóticamente estable [53].

Para la estabilidad asintótica global, debe cumplirse una condición adicional en la función V debe ser radialmente no limitada, lo que significa que $V(x)$ tiende a infinito a medida que x se acerca al infinito en cualquier dirección. Para demostrar la estabilidad exponencial, debe garantizarse una tasa de disipación mínima. El siguiente teorema para la estabilidad exponencial se adapta para el caso autónomo a partir del Teorema 4.10 de [52].

Teorema 2-3 (Estabilidad exponencial) Si, en una bola B_r que contiene el origen, existe una función escalar $V(x)$ con primeras derivadas parciales continuas a lo largo de las trayectorias de (2-1) tal que

- $k_1\|x\|^2 \leq V(x) \leq k_2\|x\|^2$ localmente en B_r ,
- $\frac{\partial V}{\partial x} f(x) \leq k_3\|x\|^2$ localmente en B_r ,

con constantes positivas k_1, k_2 y k_3 , entonces el origen de (2-1) es exponencialmente estable. Si la bola B_r puede expandirse para ser todo el espacio de estados, entonces el equilibrio en el origen es globalmente estable de forma exponencial.

Si tal función V , que satisface las condiciones de los Teorema 2-1, Teorema 2-2 o Teorema 2-3, existe, entonces se llama función de Lyapunov para el sistema (2-1), demostrando que su origen es estable, asintóticamente estable o exponencialmente estable, respectivamente. Estudios más profundos y extendidos sobre el método directo de Lyapunov para sistemas generales pueden encontrarse en, [52], [53], [55].

2.5. Lema de Barbalat

Para los sistemas variantes en el tiempo, suele ser muy difícil encontrar funciones de Lyapunov con una derivada definida negativa. Por lo tanto, afirmar la estabilidad asintótica para tales sistemas no es una tarea fácil. El lema de Barbalat es una herramienta muy útil que ayuda a asegurar la estabilidad asintótica para sistemas no autónomos con una derivada semidefinida negativa de la función de Lyapunov.

Lemma 1.1 (Barbalat) Si la función diferenciable $f(t)$ tiene un límite finito a medida que $t \rightarrow \infty$, y si $\dot{f}$ es uniformemente continua, entonces $\dot{f}(t) \rightarrow 0$ a medida que $t \rightarrow \infty$ [53].

Para la aplicación del lema de Barbalat al análisis de sistemas dinámicos, se puede utilizar el siguiente lema "tipo Lyapunov":

Lemma 1.2 Si una función escalar $V(t, x)$ satisface las siguientes condiciones:

- $V(t, x)$ está acotada por abajo.
- $\dot{V}(t, x)$ es semidefinida negativa.

- $\dot{V}(t, x)$ es uniformemente continua en el tiempo entonces $\dot{V}(t, x) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$ [53].

Una condición suficiente para que una función diferenciable sea uniformemente continua es que su derivada sea acotada [53].

2.6. Acotamiento y acotación final

Recordemos el sistema no autónomo introducido en (2-2), donde el origen no es un punto de equilibrio. Sin puntos de equilibrio, no es posible hablar de estabilidad, ya que cualquier noción de estabilidad es una propiedad del equilibrio. Sin embargo, es posible demostrar la acotación de las trayectorias del sistema en torno al origen, incluso aunque no se trate de un equilibrio.

Definición 2-5 Las soluciones de (2-2) están

- uniformemente acotadas si existe una constante positiva c , independiente de $t_0 > 0$, y para cada $a \in (0, c)$, existe $\beta = \beta(a) > 0$, independiente de t_0 , tal que

$$\|x(t_0)\| \leq a \Rightarrow \|x(t)\| \leq \beta, \quad \forall t \geq t_0 \quad (2-10)$$

- globalmente acotado de manera uniforme si (2-10) se cumple para a arbitrariamente grande.
- uniformemente acotado en última instancia (UUB) con límite último b si existen constantes positivas b y c , independientes de $t_0 \geq 0$, y para cada $a \in (0, c)$, existe $T = T(a, b) \geq 0$, independiente de t_0 , tal que

$$\|x(t_0)\| \leq a \Rightarrow \|x(t)\| \leq b, \quad \forall t \geq t_0 + T \quad (2-11)$$

- globalmente acotado uniformemente en última instancia si (2-11) se cumple para a arbitrariamente grande.

En el caso de los sistemas autónomos, la palabra "uniformemente" puede eliminarse. Considerando una función continuamente diferenciable y definida positivamente $V(t, x)$, se puede utilizar el siguiente teorema de Lyapunov para demostrar la acotación uniforme y la acotación final [52].

Teorema 2-4 Sea $D \subseteq \mathbb{R}^n$ un dominio que contiene el origen y $V: [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable tal que

$$\alpha_1 \|x\| \leq V(t, x) \leq \alpha_2 \|x\| \quad (2-12)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) \leq -\mathcal{F}(x), \quad \forall \|x\| \geq \mu > 0 \quad (2-13)$$

$\forall t \geq 0$ y $\forall x \in D$, donde α_1 y α_2 son funciones de clase $\mathcal{K}$ y $\mathcal{F}(x)$ es una función continua definida positiva. Tomemos $r > 0$ tal que $B_r \subset D$ y supongamos que

$$\mu < \alpha_2^{-1}(\alpha_1(r)) \quad (2-14)$$

Entonces, existe una función $\mathcal{KL}$ de clase β , y para cada estado inicial $x(t_0)$, que satisface $\|x(t_0)\| < \alpha_2^{-1}(\alpha_1(r))$, existe $T \geq 0$ (dependiente de $x(t_0)$ y μ) tal que la solución de (2-2) satisface

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x(t_0)\|, t - t_0), \quad \forall t_0 \leq t \leq t_0 + T, \quad (2-15)$$

$$\|x(t)\| \leq \alpha_2^{-1}(\alpha_1(r)), \quad \forall t \geq t_0 + T, \quad (2-16)$$

Además, si $D = \mathbb{R}^n$ y α_1 pertenece a la clase $\mathcal{K}_\infty$, entonces (2-15) y (2-16) se sostienen para cualquier estado inicial $x(t_0)$, sin restricción de lo grande que sea μ .

Las definiciones de clase $\mathcal{K}$, $\mathcal{K}_\infty$ y funciones $\mathcal{KL}$ pueden consultarse en [52]. Las principales diferencias de los Teorema 2-1-Teorema 2-3 con respecto al Teorema 2-4 son que en este último, el sistema (2-2) no tiene puntos de equilibrio y $\dot{V}$ es negativo fuera de un conjunto como el dado en (2-13).

2.7. Linealización por realimentación:

Introduzcamos un sistema no lineal de una entrada y una salida (SISO) de la forma

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (2-17)$$

y una función de salida escalar

$$y = h(x) \quad (2-18)$$

La linealización por retroalimentación se basa en la idea de la existencia de una ley de control por realimentación de estado u que transforma algebraicamente la dinámica del sistema no lineal en un sistema lineal (total o parcialmente) equivalente. De forma simplificada, la linealización por realimentación significa cancelar las no linealidades de un sistema de forma que la dinámica de lazo cerrado resulte ser lineal. La mayoría los algoritmos de control de movimiento presentados en esta tesis se basan en la linealización por realimentación de sistemas no lineales de una entrada y una salida.

Consideremos el sistema de una entrada y una salida (2-17)-(2-18), donde f , g y h son suficientemente suaves (esto significa que todas sus derivadas parciales son definidas y continuas) en un dominio $D \subseteq \mathbb{R}^n$. La primera derivada temporal de la función de salida y en (2-18) a lo largo de las trayectorias de la ecuación de estado (2-17) viene dada por

$$\dot{y} = \frac{\partial h}{\partial x} [f(x) + g(x)u] \triangleq L_f h(x) + L_g h(x)u$$

Donde

$$L_f h(x) = \frac{\partial h}{\partial x} f(x)$$

se llama la derivada de Lie de h con respecto a f . Esto significa la derivada de h a lo largo de las trayectorias del sistema $\dot{x} = f(x)$. La notación L_f^i se utiliza para repetir i veces el cálculo de la derivada a lo largo del mismo campo vectorial. Esta notación es muy conveniente para definir la expresión general del controlador de linealización de realimentación u tal que

$$u = \frac{1}{L_g L_f^{r-1} h(x)} [-L_f^r h(x) + v] \quad (2-19)$$

reduce el mapa de entrada-salida a

$$y^{(\rho)} = v \quad (2-20)$$

siendo el número entero r el grado relativo del sistema, es decir, la función de salida $h(x)$ debe derivarse r veces hasta obtener una expresión que relacione la entrada u con la salida y . En otras palabras, se dice que el sistema no lineal (2-17)-(2-18) tiene un grado relativo r , $1 \leq r \leq n$, en una región $D_0 \subset D$ si

$$L_g L_f^{i-1} h(x) = 0, \quad i = 1, 2, 3 \dots r-1; \quad L_g L_f^{r-1} h(x) \neq 0$$

para todo $x \in D_0$ [52].

En particular, cuando la ecuación de estado está completamente linealizada a través de la transformación de entrada u , es decir, el grado relativo r es igual al orden del sistema n , se conoce como linealización completa de estado o entrada-estado. Por otro lado, cuando sólo se linealiza el mapa de entrada-salida mientras que la ecuación de estado sólo se linealiza parcialmente (es decir, el grado relativo $1 \leq r < n$), se conoce como *linealización de entrada-salida*.

Por último, la dinámica de salida en lazo abierto en (2-20) es una simple cadena lineal de r que describen la relación entre la salida y la nueva entrada v que debe definirse. Esta nueva entrada de control puede elegirse como

$$v = -k_0 y - k_1 \dot{y} - \dots - k_{r-1} y^{(r-1)}$$

lo que lleva a la dinámica de salida en lazo cerrado

$$k_0 y + k_1 \dot{y} + \dots + k_{r-1} y^{(r-1)} + y^{(r)} = 0$$

con las constantes positivas k_i elegidas de modo que el polinomio $k_0 y + k_1 \dot{y} + \dots + k_{r-1} y^{(r-1)} + y^{(r)}$ tenga todas sus raíces estrictamente en el plano complejo de la mitad izquierda. Esto asegura que $y(t) \rightarrow 0$ con una tasa de convergencia exponencial. Sin embargo, la selección de v no es única. La forma más simple de la dinámica de salida en (2-20) también puede utilizarse en el desarrollo de controladores no lineales robustos, adaptativos o basados en redes neuronales, como se verá en los Capítulos 3, 4 y 5.

Los conceptos utilizados para los sistemas SISO pueden ampliarse para formular sistemas multiple entrada-multiple salida (MIMO). En el caso MIMO, se consideran los siguientes sistemas cuadrados (sistemas con el mismo número de entradas y salidas):

$$\dot{x} = f(x) + G(x)u \quad (2-21)$$

$$y = h(x) \quad (2-22)$$

donde x es el vector de estado, $u \in \mathbb{R}^m$ es el vector de entradas de control, $f(x) \in \mathbb{R}^n$ es un campo vectorial suave, $G(x) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ es la matriz $[g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x)]$ con $g_i(x) \in \mathbb{R}^n$ es un campo vectorial suave, $y \in \mathbb{R}^m$ es el vector de funciones de salida y $h(x) \in \mathbb{R}^m$ es un vector de funciones escalares $h(x)$.

De forma similar al caso SISO, para obtener la linealización entrada-salida del sistema MIMO, es necesario diferenciar la salida y hasta que aparezcan las entradas u . Asumiendo que el grado relativo r_i es el menor número entero tal que al menos una de las entradas u_i aparece, con $\{i = 1, 2, \dots, m\}$, entonces la dinámica de salida en lazo abierto para el caso MIMO puede escribirse como:

$$\begin{bmatrix} y_1^{(r_1)} \\ \vdots \\ y_m^{(r_m)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_f^{r_1} h_1(x) \\ \vdots \\ L_f^{r_m} h_m(x) \end{bmatrix} + E(x) \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \quad (2-23)$$

donde la matriz $E(x) \in \mathbb{R}^{m \times m}$, que se define como

$$\mathbf{E}(x) = \begin{bmatrix} L_{g1}L_f^{r_1-1}h_1 & \dots & L_{gm}L_f^{r_1-1}h_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{g1}L_f^{r_m-1}h_m & \dots & L_{gm}L_f^{r_m-1}h_m \end{bmatrix} \quad (2-24)$$

se denomina matriz de desacoplamiento del sistema MIMO. Si la matriz de desacoplamiento es no singular en una región alrededor del origen, entonces la transformación de entrada

$$\mathbf{u} = -\mathbf{E}^{-1} \begin{bmatrix} L_f^{r_1}h_1(x) \\ \vdots \\ L_f^{r_m}h_m(x) \end{bmatrix} + \mathbf{E}^{-1} \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix} \quad (2-25)$$

produce una relación diferencial lineal entre la salida $\mathbf{y}$ y la nueva entrada $\mathbf{v}$,

$$\begin{bmatrix} y_1^{(r_1)} \\ \vdots \\ y_m^{(r_m)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix} \quad (2-26)$$

Dado que la relación entrada-salida anterior está desacoplada, la ley de control de desacoplamiento dada en (2-25) puede utilizarse para diseñar controladores de seguimiento o estabilización utilizando el diseño SISO en cada relación $y_i - v_i$ [53].

Finalmente, el concepto de grado relativo para el sistema MIMO puede formalizarse como sigue:

Definición 2.6 Se dice que el sistema (2-21)-(2-22) tiene grado relativo $(r_1, \dots, r_m)$ en x_0 si existe una vecindad B de x_0 tal que $\forall x \in B$,

- $L_{gi}L_f^k h_j(x) = 0, \quad 0 \leq k \leq r_i - 1, \quad 1 \leq i, j \leq m,$
- $\mathbf{E}(x)$, es no singular

El grado relativo total del sistema se define por $r = r_1 + \dots + r_m$.

2.8. Control por Modo Deslizante (SMC)

En los sistemas de control, el control de modo deslizante (SMC) es un método de control que altera la dinámica de un sistema no lineal mediante la aplicación de una señal de control discontinua (o más rigurosamente, una señal de control de valor fijo) que obliga al sistema a "deslizarse" a lo largo de una sección transversal del comportamiento normal del sistema. La ley de control de estado-retroalimentación no es una función continua del tiempo. En cambio, puede cambiar de una estructura continua a otra según la posición actual en el espacio de estado. Por lo tanto, el control de modo deslizante es un método de control de estructura variable. Las múltiples estructuras de control están diseñadas para que las trayectorias siempre se muevan hacia una región adyacente con una estructura de control diferente, y así la trayectoria final no existirá enteramente dentro de una estructura de control. En cambio, se deslizará a lo largo de los límites de las estructuras de control. El movimiento del sistema a medida que se desliza a lo largo de estos límites se denomina *modo deslizante* [56],[57] y el lugar geométrico que consiste en los límites se denomina (hiper)superficie deslizante. En el contexto de la teoría de control moderna, cualquier sistema de estructura variable, como un sistema bajo SMC, puede verse como un caso especial de un sistema dinámico híbrido. ya que el sistema fluye a través de un espacio de estado continuo.

2.8.1. Descripción matemática:

Considere un sistema escalar, invariante con el tiempo de la forma:

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (2-27)$$

$$y = h(x) \quad (2-28)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados y $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un campo vectorial, $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar y $u \in \mathbb{R}$ la función de control.

Se define entonces una función de las variables de estado del sistema, llamada superficie de conmutación, y una función de control escalar y discontinua, dependiente de la superficie de conmutación:

$$s = \{x \in \mathbb{X} \subset \mathbb{R}: S(x) = 0\} \quad (2-29)$$

$$u = \begin{cases} u^+(x, t) & \text{si } S(x) > 0 \\ u^-(x, t) & \text{si } S(x) < 0 \end{cases} \quad (2-30)$$

La acción u se define de tal manera que el campo vectorial apunte o se dirija hacia la superficie de deslizamiento (figura 2-1)

$$\dot{x} = \begin{cases} f(x, u^+) & \text{si } S(x) > 0 \\ f(x, u^-) & \text{si } S(x) < 0 \end{cases} \quad (2-31)$$

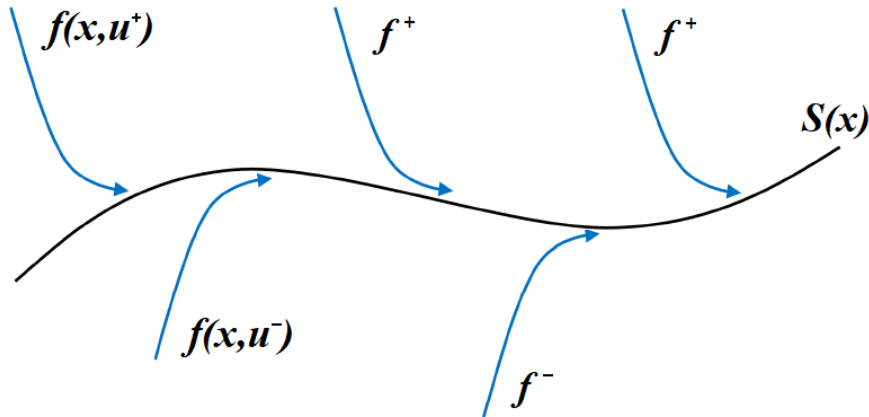


figura 2-1: Campo vectorial $f(\cdot)$ apuntando hacia la superficie de conmutación

Para asegurar esta condición, en el límite de la función de conmutación, si esta es positiva debe decrecer y si esta es negativa debe crecer; permitiendo una vez alcanzada la superficie, permanecer en ella.

$$\dot{x} = \begin{cases} \dot{S}(x) < 0 & \text{si } S(x) > 0 \\ \dot{S}(x) > 0 & \text{si } S(x) < 0 \end{cases} \quad (2-32)$$

Esta condición se define como la condición de existencia del modo deslizante, debido a que comprueba que si el campo vectorial f se dirige hacia $S(x)$, en el límite de la función de

conmutación, este campo f , permanezca en la variedad. Esta condición garantiza un régimen deslizante de f sobre la superficie $S(\mathbf{x})$. También se puede escribir como:

$$\dot{S}(\mathbf{x})S(\mathbf{x}) < 0 \quad (2-33)$$

Se conoce como condición de alcanzabilidad.

2.8.2. Condiciones de existencia, invarianza y transversalidad

Existen unas condiciones de existencia, invarianza y transversalidad que serán interpretadas geométricamente, por lo que se utilizará el concepto de derivada direccional. La derivada direccional es una función escalar que indica la razón de cambio de un campo escalar en dirección de un campo vectorial. Con esto expresaremos la derivada de la función de conmutación como la derivada direccional en f .

$$\dot{S}(\mathbf{x}) = \frac{\partial S(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x}, u) \quad (2-34)$$

Con esto se puede expresar la condición de existencia del modo deslizante como:

$$\dot{S}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{\partial S(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x}, u^+) < 0 & \text{si } S(\mathbf{x}) > 0 \\ \frac{\partial S(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x}, u^-) > 0 & \text{si } S(\mathbf{x}) < 0 \end{cases} \quad (2-35)$$

Si se considera un sistema de la forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})u \quad (2-36)$$

$$y = h(\mathbf{x}) \quad (2-37)$$

Aplicando la condición de existencia:

$$\dot{S}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{\partial S(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} (f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})u^+) < 0 & \text{si } S(\mathbf{x}) > 0 \\ \frac{\partial S(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} (f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})u^-) > 0 & \text{si } S(\mathbf{x}) < 0 \end{cases} \quad (2-38)$$

Se puede observar que un régimen deslizante sobre la superficie de conmutación, solo es posible si:

$$\frac{\partial S(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} g(\mathbf{x}) \neq 0 \quad (2-39)$$

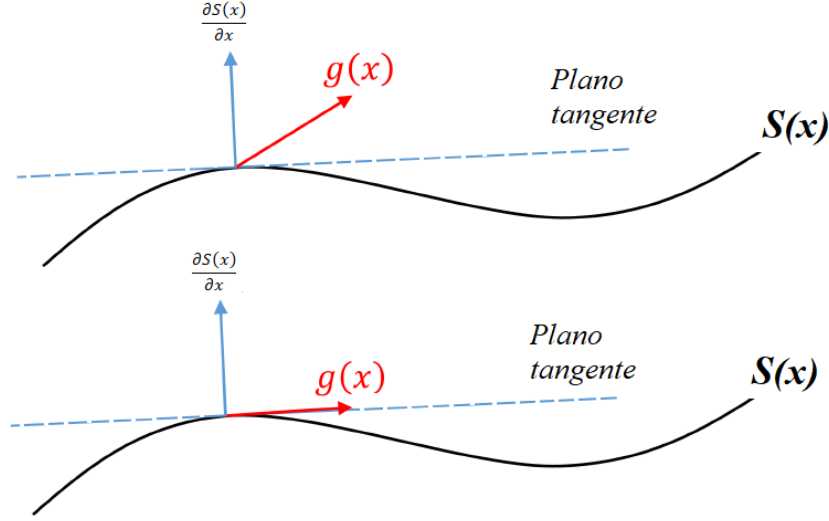


figura 2-2: Condición de transversalidad

A esta condición se conoce como condición de transversalidad, la cual indica que el gradiente de $\partial S(\mathbf{x})/\partial \mathbf{x}$ no puede ser ortogonal a $\mathbf{g}$, ya que si esto ocurre no se puede forzar a f a permanecer en la superficie de conmutación (ver figura 2-2). Esto permite entender que los valores que toma la función de control u^+ y u^- son diferentes.

$$u = \begin{cases} u^+(\mathbf{x}, t) & \text{si } S(\mathbf{x}) > 0 \\ u^-(\mathbf{x}, t) & \text{si } S(\mathbf{x}) < 0 \end{cases} \quad u^+ \neq u^- \quad (2-40)$$

Suponiendo $u^+ > u^-$, restando las dos expresiones de la condición de existencia para el sistema constituido por (2-36) y (2-37), podemos complementar la condición de transversalidad de la forma:

$$\frac{\partial S(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x})(u^+ - u^-) < 0 \quad \frac{\partial S(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) < 0 \quad (2-41)$$

Lo que garantiza la elección correcta de la función de conmutación y la condición de transversalidad del régimen deslizante sobre $S(\mathbf{x})$.

2.8.3. Dinámica del plano deslizante

Debido a que la función de control es discontinua, no se puede describir convencionalmente el modo deslizante, ya que no satisface las condiciones de existencia y unicidad. Esto conlleva a regularizar el problema. Regularizar es el proceso que permite trabajar el sistema con un modelo equivalente que cumpla con las condiciones de existencia y unicidad, y que entregue resultados esperados para el sistema original. Los métodos de Filippov y del control equivalente permiten regularizar el sistema.

2.8.4. Método de Filippov

El método de Filippov define una franja límite (Δ) alrededor de la superficie de deslizamiento lo suficientemente pequeña, donde en un intervalo de tiempo corto, los campos vectoriales f^+ y

f^- debidos a la función de control discontinua, son constantes en algún punto del plano deslizante $S(x)$, como se observa en la figura 2-3.

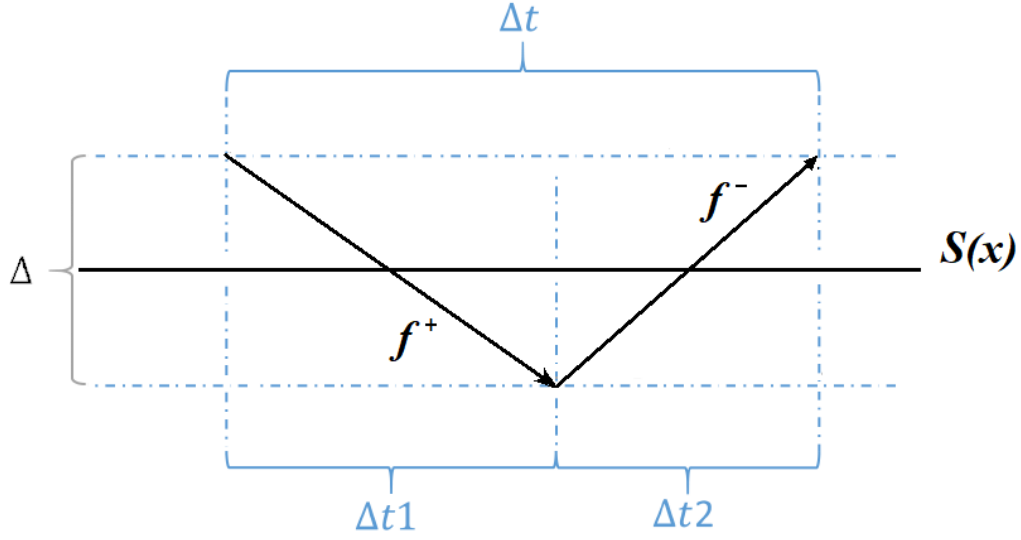


figura 2-3: Método de Filippov

Dividiendo el intervalo de tiempo considerando que en una parte actúa f^+ y en otra parte f^- , el promedio de velocidad de los estados (vector velocidad) será:

$$\dot{x} = F = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \mu f^+ + (1 - \mu) f^- \quad \text{donde } \mu = \frac{\Delta t_1}{\Delta t} \quad (2-42)$$

Siendo este el campo de velocidad de los estados en modo deslizante. El valor μ regula que para cualquier punto sobre la superficie de discontinuidad, el campo de velocidad de los estados sea tangente a la superficie en ese punto, por lo que la derivada de la función de conmutación es igual a cero (ver figura 2-4). De ahí se puede obtener el valor de μ así:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu = \frac{\frac{\partial S(x)}{\partial x} f^-}{\frac{\partial S(x)}{\partial x} (f^+ - f^-)} \\ \dot{x} = \frac{\frac{\partial S(x)}{\partial x} f^-}{\frac{\partial S(x)}{\partial x} (f^+ - f^-)} f^+ - \frac{\frac{\partial S(x)}{\partial x} f^+}{\frac{\partial S(x)}{\partial x} (f^- - f^+)} f^- \end{array} \right. \quad (2-43)$$

Este método no considera el deslizamiento solo en la variedad, sino en un pequeño espacio cerca de ella (Δ), por lo que describe un régimen deslizante real. Al considerar ese espacio, muestra que con estar muy cerca a la superficie de conmutación se puede considerar el modo deslizante, lo cual sucede en los sistemas físicos a causa de retardos, pequeñas constantes de tiempo, perturbaciones y otros fenómenos como la histéresis.

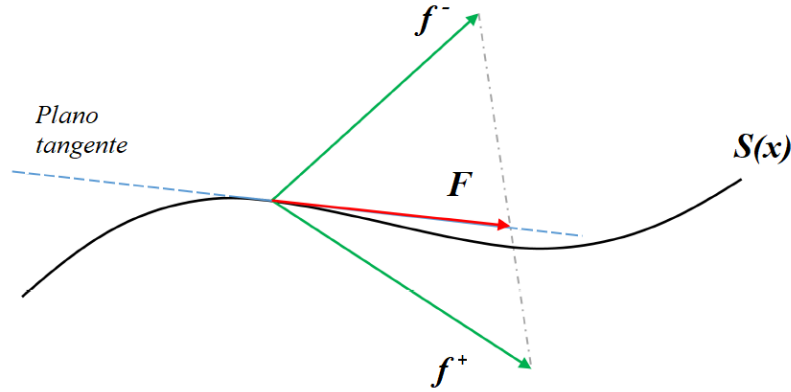


figura 2-4: Vector velocidad

2.8.5. Control equivalente

El método de control equivalente propone cambiar la ley de control discontinua por una suave que cumpla las siguientes condiciones de invarianza:

$$S(x) = 0 \quad \dot{S}(x) = \frac{\partial S(x)}{\partial x} f(x, u_{eq}) = 0 \quad (2-44)$$

Estas condiciones buscan lo mismo del método de Filippov, llevar el campo de velocidad de los estados a la función de conmutación, garantizando que este se quede en la superficie de discontinuidad. Entonces las condiciones de invarianza describen el régimen deslizante ideal. Considerando el sistema (2-36) y (2-37), se tiene que:

$$S(x) = 0 \quad \dot{S}(x) = \frac{\partial S(x)}{\partial x} f(x) + \frac{\partial S(x)}{\partial x} g(x) u_{eq} = L_f S(x) + L_g S(x) u_{eq} = 0 \quad (2-45)$$

La función de control suave se despeja de la segunda ecuación:

$$u_{eq} = -\frac{\frac{\partial S(x)}{\partial x} f(x)}{\frac{\partial S(x)}{\partial x} g(x)} = -\frac{L_f S(x)}{L_g S(x)} \quad (2-46)$$

El control equivalente u_{eq} , que se define a partir de la condición de transversalidad, sólo es válido sobre la superficie de conmutación. El control equivalente se puede ver como el valor promedio de la conmutación entre u^+ y u^- a frecuencias altas.

Reemplazando el control equivalente en el sistema lineal se obtiene la dinámica de deslizamiento ideal.

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u_{eq} = f(x) + g(x) \frac{\frac{\partial S(x)}{\partial x} f(x)}{\frac{\partial S(x)}{\partial x} g(x)} \quad (2-47)$$

$$\dot{x} = F = \left[I + g(x) \left(\frac{\partial S(x)}{\partial x} g(x) \right)^{-1} \frac{\partial S(x)}{\partial x} \right] f(x) = \Phi(x) f(x)$$

Donde $\Phi(x)$ es un campo que proyecta el sistema $f(x)$ sobre la superficie de deslizamiento, por lo que asegura la existencia del régimen deslizante.

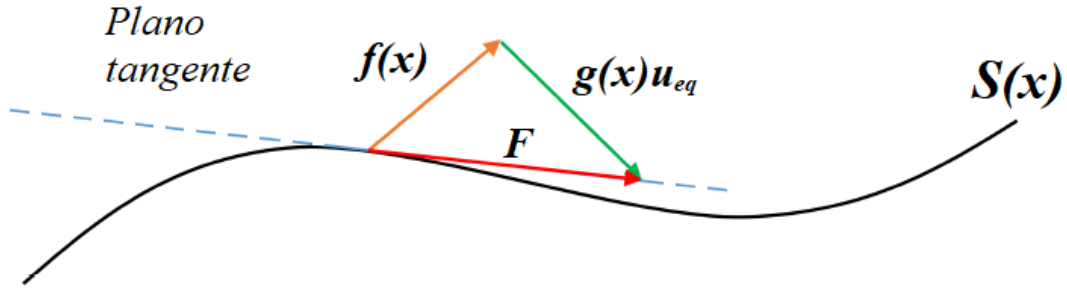


figura 2-5: Control Equivalente

La cual es válida sólo en la superficie de conmutación y describe el modo deslizante ideal. En la figura 2-5 se puede ver el cumplimiento del régimen de deslizamiento en algún punto sobre $S(x)$ [104]. Como ejemplo se mirarán cada una de las condiciones que permiten el modo deslizante en un sistema lineal de la forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bu \\ y &= C^T x \end{aligned} \quad (2-48)$$

Con la función de control discontinua y la siguiente función de conmutación:

$$u = \begin{cases} u^+(x, t) & \text{si } S(x) > 0 \\ u^-(x, t) & \text{si } S(x) < 0 \end{cases} \quad u^+ \neq u^- \quad (2-49)$$

definiendo

$$S(x) = y_{ref} - C^T x \quad (2-50)$$

Se realiza la identificación:

$$f(x) = Ax \quad g(x) = b \quad \frac{\partial S(x)}{\partial x} = -C^T \quad (2-51)$$

Analizando la condición de existencia:

$$\dot{S}(x) = \begin{cases} \frac{\partial S(x)}{\partial x} (f(x) + g(x)u^+) < 0 & \text{si } S(x) > 0 \\ \frac{\partial S(x)}{\partial x} (f(x) + g(x)u^-) > 0 & \text{si } S(x) < 0 \end{cases} \quad (2-52)$$

Aplicado al sistema (2-48) se expresa:

$$\dot{S}(x) = \begin{cases} -C^T (Ax + bu^+) < 0 & \text{si } S(x) > 0 \\ -C^T (Ax + bu^-) > 0 & \text{si } S(x) < 0 \end{cases} \quad (2-53)$$

Condición de transversalidad:

$$\frac{\partial S(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} g(\mathbf{x}) < 0 \Rightarrow -C^T b < 0 \quad (2-54)$$

Control equivalente

$$u_{eq} = -\frac{\frac{\partial S(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x})}{\frac{\partial S(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} g(\mathbf{x})} = -\frac{C^T A \mathbf{x}}{C^T b} \quad (2-55)$$

Dinámica del deslizamiento ideal:

$$\dot{\mathbf{x}} = \left[I + g(\mathbf{x}) \left(\frac{\partial S(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} g(\mathbf{x}) \right)^{-1} \frac{\partial S(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right] f(\mathbf{x}) \quad (2-56)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = [I - b(C^T b)^{-1}(-C^T)]A\mathbf{x} \quad \dot{\mathbf{x}} = A_\phi \mathbf{x}$$

En la figura 2-6 se muestra un diagrama de bloques del control por planos deslizante para el sistema (2-48).

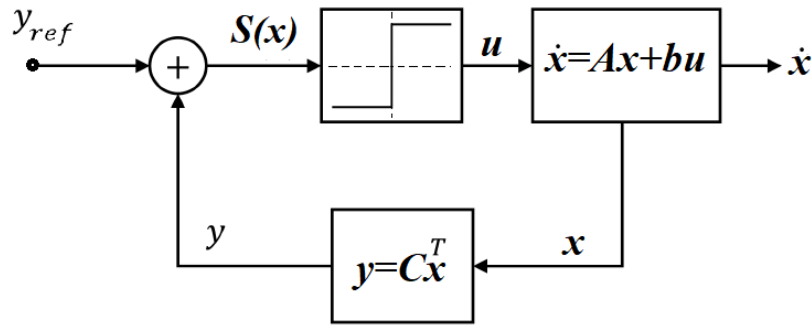


figura 2-6: Diagrama de bloques

Se puede definir también la técnica de control por planos deslizantes a través de la función de Lyapunov, verificando además el cumplimiento de estabilidad. Se define una función $\mathcal{L}(\mathbf{x})$, llamada función de Lyapunov, tal que si cumple las siguientes condiciones:

$$\mathcal{L}(0) = 0 \quad \mathcal{L}(\mathbf{x}) > 0 \quad \forall \mathbf{x} \neq \bar{\mathbf{x}} \quad \dot{\mathcal{L}}(\mathbf{x}) < 0 \quad \forall \mathbf{x} \neq \bar{\mathbf{x}} \quad (2-57)$$

El sistema $y = f(\mathbf{x})$ es asintóticamente estable en el punto $\bar{\mathbf{x}}$ (pto. de equilibrio). Se escoge la siguiente función de Lyapunov, tal que cumpla la primera y segunda condición

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}) = \frac{S^2(\mathbf{x})}{2} \quad (2-58)$$

Se evalúa entonces la tercera condición, derivando la función de Lyapunov. Nótese que corresponde a la condición de alcanzabilidad.

$$\dot{\mathcal{L}}(\mathbf{x}) = S(\mathbf{x})\dot{S}(\mathbf{x}) < 0 \quad (2-59)$$

Evaluando la condición con el sistema del ejemplo

$$S(\mathbf{x})(-C^T A \mathbf{x} - C^T b u) < 0 \quad (2-60)$$

Se requiere entonces una función u , tal que cumpla esta condición. Como $S(\mathbf{x})$ puede ser positivo o negativo, se necesita asegurar el signo contrario para $\dot{S}(\mathbf{x})$, por lo que la función signo es perfecta para esta tarea.

$$u = \Gamma_u \text{sign}(S(\mathbf{x})) \Rightarrow S(\mathbf{x})(-C^T A \mathbf{x} - C^T b \Gamma_u \text{sign}(S(\mathbf{x}))) < 0 \quad (2-61)$$

Si Γ_u es lo suficientemente grande, el signo de $\dot{S}(\mathbf{x})$ va a estar marcado por la señal de control. Si $S(\mathbf{x})$ es positiva, el valor de la función signo es 1, por lo que $\dot{S}(\mathbf{x})$ será negativa; si $S(\mathbf{x})$ es negativa, el valor de la función signo es -1, por lo que $\dot{S}(\mathbf{x})$ será positiva.

$$S(\mathbf{x})(-\Gamma_u \text{sign}(S(\mathbf{x}))) = -\Gamma_u |S(\mathbf{x})| < 0 \quad (2-62)$$

Esto conduce a que se cumple la tercera condición, por lo que el sistema es asintóticamente estable en el punto $\bar{\mathbf{x}}$ [103]. Como el plano deslizante es de la forma:

$$S(\mathbf{x}) = y_{ref} - C^T \mathbf{x} \quad (2-63)$$

El punto $\bar{\mathbf{x}}$ para el cual el sistema es asintóticamente estable estará definido por el valor de la señal de referencia y_{ref} . Se puede entonces tener una función de control compuesta por el control equivalente, el cual actúa en la cercanía de la función de conmutación y asegura el régimen deslizante, y el control discontinuo, el cual lleva las variables de estado a las cercanías de la superficie de deslizamiento.

Esta composición debe realizarse con cuidado, debido a la forma de actuar de cada señal del control. Se pueden sumar las dos simplemente, y depender de la función discontinua del valor absoluto del plano deslizante para disminuir las oscilaciones al acercarse al plano, así como también depender de la función continua de la magnitud del plano para asegurar su operación en la región cercana al plano.

2.8.6. Robustez ante perturbaciones

Una propiedad importante de los planos deslizantes es la insensibilidad a las perturbaciones externas y paramétricas. Como estas se presentan en diferentes partes del sistema físico y del sistema de control, se analizará de nuevo las condiciones de control por planos deslizantes con perturbaciones externas y paramétricas. Si se considera un sistema escalar de la forma:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u + \delta \quad (2-64)$$

$$y = h(x) \quad (2-65)$$

Donde δ corresponde a un vector de perturbaciones asociadas a la variación de los parámetros de la planta y δ_E las perturbaciones externas. El vector δ en el caso general puede escribirse como:

$$\delta = g(x)\mu + \delta_E(x) \quad (2-66)$$

Donde $g(\mathbf{x})\mu$ corresponde a las perturbaciones colineales de $g(\mathbf{x})u$ y $\delta_E(\mathbf{x})$ corresponde a las variaciones ortogonales a gradiente de la superficie de conmutación. Planteando las condiciones de invarianza:

$$\begin{aligned}\dot{S}(\mathbf{x}) &= \frac{\partial S(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} (f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})u'_{eq} + \delta) = \dots \\ &= \frac{\partial S(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x}) + \frac{\partial S(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} g(\mathbf{x})u'_{eq} + \frac{\partial S(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} (g(\mathbf{x})\mu + \delta_E(\mathbf{x}))\end{aligned}\quad (2-67)$$

Pero $\delta_E(\mathbf{x})$ es ortogonal al gradiente, por lo tanto $(\partial S(\mathbf{x})/\partial \mathbf{x})\delta_E(\mathbf{x}) = 0$

$$\dot{S}(\mathbf{x}) = \frac{\partial S(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x}) + \frac{\partial S(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} g(\mathbf{x})u'_{eq} + \frac{\partial S(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} g(\mathbf{x})\mu = 0 \quad (2-68)$$

Despejando u'_{eq} queda:

$$u'_{eq} = \frac{\frac{\partial S(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x})}{\frac{\partial S(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} g(\mathbf{x})} - \frac{\frac{\partial S(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} g(\mathbf{x})\mu}{\frac{\partial S(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} g(\mathbf{x})} = u_{eq} + \mu \quad (2-69)$$

El control equivalente en régimen deslizante del sistema con perturbaciones es igual al control equivalente del sistema sin perturbaciones menos la componente colineal de la perturbación. Analizando la dinámica de deslizamiento ideal:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})u'_{eq} + \delta \\ \dot{\mathbf{x}} &= f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})(u_{eq} + \mu) + (g(\mathbf{x})\mu + \delta_E(\mathbf{x})) \\ \dot{\mathbf{x}} &= f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})u_{eq} + \delta_E(\mathbf{x})\end{aligned}\quad (2-70)$$

Las perturbaciones ortogonales al gradiente de la variedad afectan la dinámica ideal del modo deslizante, más no a la componente colineal a $g(\mathbf{x})u$.

De esto se puede concluir que si la perturbación del sistema es colineal a $g(\mathbf{x})u$, es decir $\delta = g(\mathbf{x})\mu$, la dinámica ideal es independiente de la perturbación, por lo que la propiedad de invarianza del modo deslizante es fuerte. Mientras que si la perturbación del sistema no es colineal a $g(\mathbf{x})u$, es decir $\delta = \delta_E(\mathbf{x})$, la dinámica ideal no es independiente de la perturbación, por lo que la propiedad de invarianza del modo deslizante es débil.

2.8.7. Elección de la superficie deslizante

El desarrollo de la técnica de control por planos deslizantes requiere de la elección de una superficie deslizante, la cual permitirá que el sistema evolucione hacia un valor de referencia específico. Varios autores han planteado diferentes superficies que logran el objetivo de control. Utkin la define como una combinación lineal de las variables de estado [58]:

$$S(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \quad (2-71)$$

Slotine plantea la superficie en función del error de seguimiento y sus derivadas [60]:

Siendo una forma típica para la superficie de deslizamiento la siguiente (para un sistema SISO), que depende de un solo parámetro escalar, λ .

$$S = \left(\frac{d}{dt} + \lambda \right)^{r-1} e \quad (2-72)$$

Para distintos valores de $(r - 1)$

$$(r - 1) = 1 \quad S = \dot{e} + \lambda e \quad (2-73)$$

$$(r - 1) = 2 \quad S = \ddot{e} + 2\lambda\dot{e} + \lambda^2 e \quad (2-74)$$

O también utilizando la integral del error de seguimiento, también conocida como control integral.

$$S = \left(\frac{d}{dt} + \lambda \right)^r \int e(\tau) d\tau \quad (2-75)$$

Donde r es el orden del sistema modelado a controlar, y el error e puede ser definido como

$$e(t) = y_{ref}(t) - y(t) \quad (2-76)$$

Para cada uno de las superficies mostradas se relacionan las ventajas de cada una de las acciones de control utilizadas, como rápida respuesta (acción proporcional), estabilidad (acción derivativa) y ausencia de error en estado estable (acción integral), sin olvidar la función discontinua ($sign(.)$) presente en el control.

2.9. Redes Neuronales Artificiales (RNA)

Las redes neuronales artificiales (también conocidas como sistemas conexionistas) se trata de un modelo computacional que consiste en un conjunto de unidades o funciones matemáticas simples, llamadas neuronas artificiales, conectadas entre sí para transmitirse señales. La información de entrada atraviesa la red neuronal (donde se somete a diversas operaciones) produciendo unos valores de salida.

Cada neurona está conectada con otras a través de unos enlaces. En estos enlaces el valor de salida de la neurona anterior es multiplicado por un valor de peso. Estos pesos en los enlaces pueden incrementar o inhibir el estado de activación de las neuronas adyacentes. Del mismo modo, a la salida de la neurona, puede existir una función limitadora o umbral, que modifica el valor resultado o impone un límite que no se debe sobrepasar antes de propagarse a otra neurona. Esta función se conoce como función de activación.

Estos sistemas aprenden y se forman a sí mismos, en lugar de ser programados de forma explícita, y sobresalen en áreas donde la detección de soluciones o características es difícil de expresar con la programación convencional. Para realizar este aprendizaje automático, normalmente, se intenta minimizar una función de costo que evalúa la red en su total. Los valores de los pesos de las neuronas se van actualizando buscando reducir el valor de la función de costo. Este proceso se realiza mediante la propagación hacia atrás.

El objetivo de la red neuronal es resolver los problemas de la misma manera que el cerebro humano, aunque las redes neuronales son más abstractas. Las redes neuronales actuales suelen contener desde unos miles a unos pocos millones de unidades neuronales.

Las redes neuronales artificiales (RNA) tienen muchas ventajas debido a que están basadas en la estructura del sistema nervioso, principalmente el cerebro.

- Aprendizaje: Las RNA tienen la habilidad de aprender mediante la etapa de aprendizaje. Consiste en proporcionar a la RNA datos como entrada a su vez que se le indica cuál es la salida esperada.
- Auto organización: Una RNA crea su propia representación de la información en su interior

- Tolerancia a fallos: Debido a que una RNA almacena la información de forma redundante, ésta puede seguir respondiendo de manera aceptable aun si se daña parcialmente.
- Flexibilidad: Una RNA puede manejar cambios no importantes en la información de entrada.
- Tiempo real: La estructura de una RNA es paralela, por lo cual, si esto es implementado con computadoras, se pueden obtener respuestas en tiempo real

2.9.1. Red Neuronal MLP

El perceptrón multicapa o Multi Layer Perceptron (MLP) es una red neuronal artificial (RNA) formada por múltiples capas, de tal manera que tiene capacidad para resolver problemas que no son linealmente separables, lo cual es la principal limitación del perceptrón (también llamado perceptrón simple). Una red neuronal de este tipo está compuesta por un conjunto de varias neuronas distribuidas en una o varias capas, cuyas entradas y salidas están todas interconectadas. La primera capa, donde se aplican las señales de entrada $x_i(t)$, se conoce como capa de entrada; la última capa, donde se adquieren las señales de salida $y_i(t)$, se conoce como capa de salida; y todas las capas intermedias se conocen como capas ocultas.

En particular, nos interesa especialmente el perceptrón de dos capas que consiste en una sola capa oculta con m_1 neuronas, todas alimentadas por las mismas señales de entrada $x(t) \in \mathbb{R}^{n+1}$, una capa de salida con m_2 neuronas que producen salidas $y(t) \in \mathbb{R}^{m_2}$, el vector de las funciones de activación de la capa oculta $\varphi(.) = [1, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{m_1}]^T \in \mathbb{R}^{m_1+1}$, el vector de las funciones de activación de la capa de salida $\bar{\varphi}(.) = [\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2, \dots, \bar{\varphi}_{m_2}]^T \in \mathbb{R}^{m_2}$, una matriz de pesos de entrada $W \in \mathbb{R}^{(m_2+1) \times m_1}$ dada por

$$W = \begin{bmatrix} W_{01} & \dots & W_{0m_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{n1} & \dots & W_{nm_1} \end{bmatrix} \quad (2-77)$$

y una matriz de pesos de salida $w \in \mathbb{R}^{(m_1+1) \times m_2}$ dada por

$$w = \begin{bmatrix} w_{01} & \dots & w_{0m_2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{m_1 1} & \dots & w_{m_1 m_2} \end{bmatrix} \quad (2-78)$$

La red neuronal de dos capas se describe gráficamente en la figura 2-7 y su modelo matemático es el siguiente

$$y(t) = \bar{\varphi}(w^T \varphi(W^T x)) \quad (2-79)$$

Considerando las funciones de activación de la capa de salida $\bar{\varphi}(.)$ como un vector de funciones lineales, el modelo matemático general de la red neuronal dado en (2-79) puede ser simplificado como

$$y(t) = w^T \varphi(W^T x) \quad (2-80)$$

Esta expresión será útil en los próximos capítulos para la aproximación de funciones en combinación con otro tipo de redes neuronales.

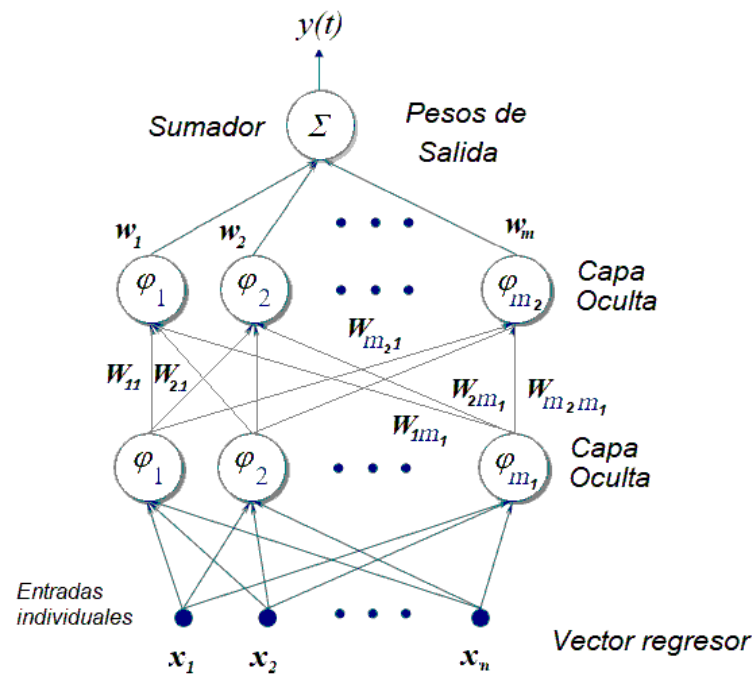


figura 2-7: estructura de una red perceptrón multicapa (dos capas ocultas)

2.9.2. Funciones de activación:

Las funciones que gobiernan el comportamiento de la neurona artificial se llaman funciones de activación ($\varphi(\cdot)$). La transmisión de esa entrada se conoce como propagación hacia adelante (forward propagation). Las funciones de activación transforman la combinación de entradas, pesos y sesgos. Los productos de estas transformaciones se ingresan para la siguiente capa de nodo. Muchas (aunque no todas) las transformaciones no lineales usadas en redes neuronales transforman los datos a rango conveniente, por ejemplo $[0,1]$ ó $[-1,1]$. Cuando una neurona artificial pasa de un valor distinto de cero a otro, decimos que esa neurona se ha activado. Las funciones de activación se usan para propagar la salida de los nodos de una capa hacia la siguiente capa. Se tratan de funciones escalares a escalar, que produce la activación de la neurona. Este tipo de funciones permiten incorporar el modelado de datos de entrada no lineales a la red.

Lineal		$\varphi(x)=x$
Escalon binario		$\varphi(x)= \begin{cases} 0 & \text{para } x < 0 \\ 1 & \text{para } x \geq 0 \end{cases}$
Sigmoide		$\varphi(x)= \sigma(x)= \frac{1}{1+e^{-x}}$
Tanh		$\varphi(x)= \tanh(x)= \frac{(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})}$

figura 2-8: funciones de activación para redes neuronales del tipo MLP

La familia de *funciones sigmoideas* es la más utilizada en redes del tipo MLP junto con la salida lineal, en esta tesis serán aplicadas en identificación de sistemas.

2.9.3. Red Neuronal RBF

Como se mencionó anteriormente, una red neuronal artificial es una representación matemática de una red neuronal biológica. Este modelo matemático describe el proceso biológico de procesamiento de la información a través del sistema nervioso y su unidad básica de procesamiento, la neurona. La salida $y(t) \in \mathbb{R}$ de cada neurona es igual al valor resultante de la función de activación no lineal $\varphi_i(\mathbf{x})$, y cada una multiplicada por cada coeficiente de ponderación $w_1, w_2, \dots, w_m$, respectivamente, donde cada $w_i \in \mathbb{R}$ es el elemento del vector de pesos. Por lo tanto, el modelo matemático de una neurona puede expresarse como

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{W}^T \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m w_i \varphi_i(\mathbf{x}) \quad (2-81)$$

donde $\mathbf{x} = [1, x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in \mathbb{R}^{n+1}$ es el vector regresor de entrada aumentado y $\mathbf{W} = [w_1, w_2, \dots, w_m]^T \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ es el vector de pesos de salida. Y $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ es el vector que contiene cada función de activación gaussiana $\varphi_i(\mathbf{x})$, es la función de activación elemental o función de base radial (RBF), que constituyen las neuronas de esta topología de red. El valor m constituye el número de neuronas de la red. Donde cada neurona RBF se representa por una campana de gauss, y se indica por:

$$\varphi_i(\mathbf{x}) = \exp(-\|\mathbf{x} - \mathbf{c}_i\|/\sigma_i) \quad (2-82)$$

donde $\mathbf{c}_i$ y σ_i son parámetros de la función gaussiana, siendo $\mathbf{c}_i \in \mathbb{R}^{n+1}$ el vector de centros asociado a cada función o neurona elemental i y $\sigma_i \in \mathbb{R}^+$ es la apertura o ancho de la función gaussiana. Esta red neuronal artificial se denomina Red Neuronal de Base Radial [60] y su descripción gráfica se da en la figura 2-9

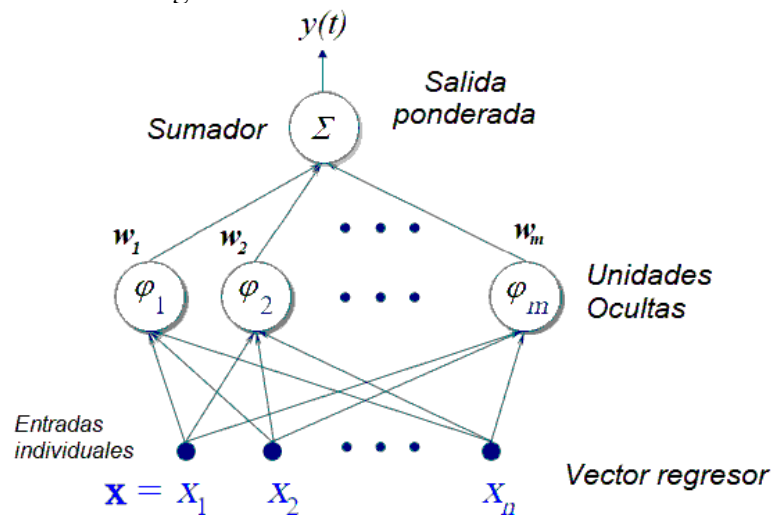


figura 2-9: Estructura de una red de base radial (RBF)

En resumen, una red neuronal está compuesta por un conjunto de varias neuronas distribuidas en una (o varias capas), cuyas entradas y salidas están interconectadas. La primera capa, donde se aplican las señales de entrada $\mathbf{x}$, se conoce como capa de entrada; la última capa, donde se

adquieren las señales de salida $y(t)$, se conoce como capa de salida; y todas las capas entre ellas se conocen como capas ocultas ($\phi(x)$).

2.9.4. Red Neuronal GRNN

La red neuronal de regresión generalizada (GRNN) es una variación de las redes neuronales de base radial. La GRNN fue sugerida a principio de la década de los 90, como una alternativa a las RBFNN. Estas redes pueden utilizarse para la regresión, la predicción y la clasificación. GRNN también puede ser una buena solución para los sistemas dinámicos en línea. Las GRNN representan una técnica mejorada en las redes neuronales basada en la regresión no paramétrica. La idea es que cada muestra de entrenamiento represente una media para una neurona de base radial [61]. La estructura de una red GRNN se puede observar en la figura 2-10.

Una GRNN, que de acuerdo con el teorema de aproximación universal [62], [63] [65], se utiliza para aproximar cualquier función continua de la siguiente manera

$$y(t) = \mathbf{W}^T \mathbf{H}(\mathbf{x}, \mathbf{c}, \sigma) = \sum_{i=1}^m W_i H_i(\mathbf{x}) \quad (2-83)$$

donde $\mathbf{x} = [1, x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in \mathbb{R}^{n+1}$ es el vector regresor de entrada para la GRNN, $\mathbf{H}(\mathbf{x}, \mathbf{c}, \sigma) \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ es un vector de funciones de activación de base radial definido como

$$H_i(\mathbf{x}, \mathbf{c}_i, \sigma_i) = \frac{\exp(-\|\mathbf{x} - \mathbf{c}_i\|/2\sigma_i)}{\sum_{j=1}^m \exp(-\|\mathbf{x} - \mathbf{c}_j\|/2\sigma_j)} \quad (2-84)$$

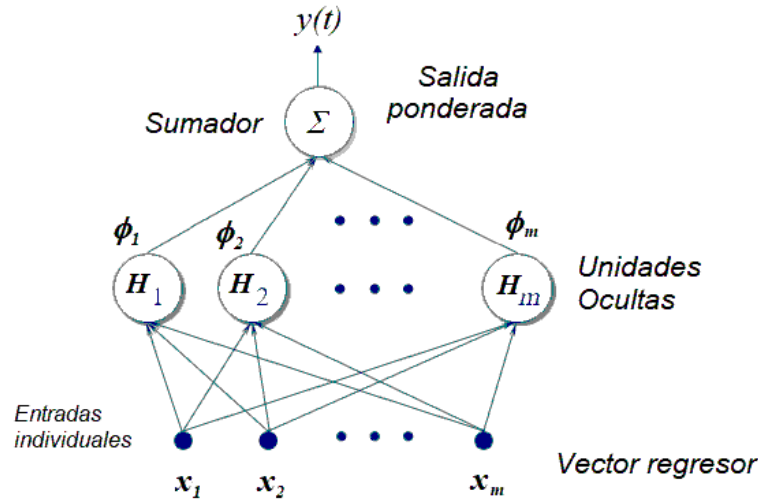


figura 2-10: Esquema básico de una red neuronal de regresión generalizada (GRNN)

Como en el caso anterior, $\mathbf{c}_i$ y σ_i son parámetros de la función gaussiana, siendo $\mathbf{c}_i \in \mathbb{R}^{n+1}$ el vector de centros asociado a cada función o neurona elemental i y cada $\sigma_i \in \mathbb{R}^+$ es la apertura o ancho de la función gaussiana, donde m es el número de neuronas, e $\Phi \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ es la matriz de pesos asociados a la función $\mathbf{H}(\mathbf{x}, \mathbf{c}, \sigma)$. La GRNN es una variación de la red neuronal de función de base radial donde la salida de cada neurona es dividida por las sumatoria de las salidas de todas las neuronas de la red, siendo esto, la respuesta de la función de activación de la GRNN está normalizada. Como se puede observar en la ecuación (2-84).

Está compuesta por cuatro capas: una capa de entrada, una capa oculta, una capa de suma y una capa de salida. Las funciones de gaussianas están contenidas en la capa oculta. La red GRNN tiene las siguientes ventajas:

- Aprendizaje de una sola pasada por lo que no se requiere retropropagación.
- Alta precisión en la estimación ya que utiliza funciones gaussianas.
- Puede manejar ruidos en las entradas.
- Requiere un número menor de conjuntos de datos.

2.9.5. Propiedad universal de aproximación de funciones

Tanto las redes MLP, RBF y GRNN son aproximadores universales. Las de las redes neuronales gaussianas (RBF, GRNN, etc.) dependen de las distancias euclidianas entre el vector de entrada $\mathbf{x}$ y los centros $\mathbf{c}_i$. Por su parte, las redes neuronales sigmoidales (MLP, etc) dependen del producto interno del vector de entrada $\mathbf{x}$ con los vectores de pesos sinápticos $\mathbf{w}_i$.

Las de las redes neuronales del tipo sigmoidales proporcionan una aproximación

$$\|error_{aprox.}\| \approx O\left(m^{-\frac{1}{2}}\right) \quad (2-85)$$

que no depende explícitamente de la dimensión del vector de entrada $\mathbf{x}$ pero si del número de neuronas m . Por otro lado, la tasa de aproximación de las redes neuronales del tipo gaussianas es del orden

$$\|error_{aprox.}\| \approx O\left(m^{-\frac{1}{2n}}\right) \quad (2-86)$$

y, en consecuencia, disminuye exponencialmente a medida que aumenta la dimensión del vector de entrada $\mathbf{x}$. Este fenómeno se denomina la Maldición de la Dimensionalidad, (debido a R. Bellman).

Una red de base gaussiana tiene información sobre el punto donde esta ubicada la campana gaussiana (localización definida por $\mathbf{c}_i$ y σ_i), mientras que un sigmoide no lo posee. Esta localización contribuye a la capacidad de aprendizaje y adaptación las redes neuronales gaussianas. Las redes neuronales sigmoidales se adaptan, pero no aprenden.

En lo que respecta específicamente a las redes neuronales aplicadas al control, su capacidad para representar mapeos no lineales y, por tanto, para modelar sistemas no lineales, es la característica que más fácilmente se puede explotar en la síntesis de controladores no lineales.

2.10. Identificación de sistemas utilizando redes neuronales artificiales.

Las redes neuronales artificiales han sido usadas para la identificación de sistemas aprovechando las propiedades que tienen de ser aproximadores universales de funciones [66]. Cuando las redes neuronales se han usado para el modelado de sistemas dinámicos, generalmente el entrenamiento de las redes neuronales se realiza minimizando el error que existen entre la salida de la red y la salida real. Algunos autores han aplicado el concepto de regularización para mejorar la calidad del modelo que se está obteniendo [66] [67]. El entrenamiento ha sido usado para mejorar la capacidad de la generalización de las redes neuronales y de otras máquinas de aprendizaje como los sistemas neuro difusos [67]. Esta sección comienza con los conceptos generales del aprendizaje e identificación de sistemas dinámicos usando redes neuronales artificiales de base gaussiana. A continuación, se muestra el procedimiento para identificar sistemas SISO y MIMO. El objetivo es identificar un sistema y utilizar un entrenamiento basado en reglas de ajuste obtenidas por la teoría de estabilidad de Lyapunov, las cuales brindan la capacidad de generalización de los modelos neuronales para su aplicación en control.

2.10.1. Identificación de sistemas SISO

Considerando el sistema modelado por:

$$\dot{x} = f(x(t), u(t)) \quad x(0) = x_0 \quad (2-87)$$

Es desconocido y posiblemente una función no lineal de x en u .
Se procederá a identificar el sistema, sumando y restando $ax(t)$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -ax + ax + f(x(t), u(t)) = \dots \\ &= \dot{x}(t) = -ax + g(x(t), u(t)) \end{aligned} \quad (2-88)$$

Siendo $g(x(t), u(t)) = ax + f(x(t), u(t))$. Usando un estimador definido por:

$$\hat{\dot{x}}(t) = -a\hat{x} + \hat{g}(x(t), u(t), \mathbf{c}, \sigma) \quad \hat{x}(0) = x_0 \quad (2-89)$$

Donde $\hat{x}$ es el vector de estados del identificador $\mathbf{c}$ y σ son los parámetros de la función:

$$\hat{g}(x(t), u(t), m, \sigma) = \sum_{k=1}^N w_k \phi(x, u, \mathbf{c}_k, \sigma_k) \quad (2-90)$$

Siendo la función

$$\phi(x, u, \mathbf{c}_k, \sigma_k) = \exp\left(-\frac{1}{2}[(x(t) - c_{xk})^2 + (u(t) - c_{uk})^2]\right) \quad (2-91)$$

Suponiendo que conocemos los pesos óptimos, resulta que el menor error de aproximación es:

$$\varepsilon = g(x(t), u(t)) - \sum_{k=1}^N w_k^* \phi(x, u, \mathbf{c}_k, \sigma_k) \quad (2-92)$$

Ahora representando el modelo dinámico indicado en (2-88) como:

$$\dot{x}(t) = -ax + \sum_{k=1}^N w_k^* \phi(x, u, \mathbf{c}_k, \sigma_k) + \varepsilon \quad (2-93)$$

El estimador neuronal puede ser representado como:

$$\hat{\dot{x}}(t) = -a\hat{x} + \sum_{k=1}^N w_k \phi(x, u, \mathbf{c}_k, \sigma_k) \quad (2-94)$$

Definiendo el error de aproximación como:

$$e = x - \hat{x} \quad (2-95)$$

De la misma forma para los pesos $\tilde{w}_k = w_k^* - w_k$ para $k = 1, 2, 3, \dots, N$, derivando el error:

$$\begin{aligned}
\dot{e} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} &= -ax + \sum_{k=1}^N w_k^* \varphi(x, u, \mathbf{c}_k, \sigma_k) + \varepsilon + a\hat{x} - \sum_{k=1}^N w_k \varphi(x, u, \mathbf{c}_k, \sigma_k) = \\
&= -ae + \sum_{k=1}^N \tilde{w}_k \varphi(x, u, \mathbf{c}_k, \sigma_k) + \varepsilon
\end{aligned} \tag{2-96}$$

Asumimos que $|\varepsilon| \leq \bar{\varepsilon}$ es desconocido pero acotado.

Ahora aplicando Lyapunov, definiendo la función candidata de la forma:

$$\mathcal{L}(e, \tilde{\mathbf{w}}_k) = \frac{1}{2} \left(e^2 + \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^N (\tilde{w}_k)^2 \right) \tag{2-97}$$

Donde $\alpha > 0$ y $\tilde{\mathbf{w}} = [\tilde{w}_1, \tilde{w}_2, \dots, \tilde{w}_N]$, derivando (2-97) con respecto al tiempo:

$$\dot{\mathcal{L}}(e, \tilde{w}_k) = e\dot{e} + \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^N \tilde{w}_k \cdot \dot{\tilde{w}}_k \tag{2-98}$$

Ahora reemplazando la ecuación del error (2-96) en (2-98)

$$\begin{aligned}
\dot{\mathcal{L}}(e, \tilde{w}_k) &= e \left(-ae + \sum_{k=1}^N \tilde{w}_k \varphi(x, u, \mathbf{c}_k, \sigma_k) + \varepsilon \right) + \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^N \tilde{w}_k \cdot \dot{\tilde{w}}_k = \dots \\
&= -ae^2 + \sum_{k=1}^N e \tilde{w}_k \varphi(x, u, \mathbf{c}_k, \sigma_k) + e\varepsilon + \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^N \tilde{w}_k \cdot \dot{\tilde{w}}_k
\end{aligned} \tag{2-99}$$

Agrupando términos:

$$\dot{\mathcal{L}}(e, \tilde{w}_k) = -ae^2 + \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^N \tilde{w}_k (e \varphi(x, u, \mathbf{c}_k, \sigma_k) + \dot{\tilde{w}}_k) + e\varepsilon \tag{2-100}$$

Ahora definiendo la regla de ajuste como:

$$\dot{\tilde{w}}_k = -\alpha e \varphi(x, u, \mathbf{c}_k, \sigma_k) \tag{2-101}$$

Si reemplazo (2-101) en (2-100) queda:

$$\dot{\mathcal{L}}(e, \tilde{w}_k) = -ae^2 + e\varepsilon \tag{2-102}$$

Evaluable la ecuación anterior y reemplazando la cota del error $\bar{\varepsilon}$.

$$\begin{aligned}
\dot{\mathcal{L}}(e, \tilde{w}_k) &= -a|e|^2 + |e|\bar{\varepsilon} = \dots \\
&= -a|e| \left(|e| - \frac{\bar{\varepsilon}}{a} \right)
\end{aligned} \tag{2-103}$$

Si $|e| > \frac{\bar{\varepsilon}}{a}$ entonces $\dot{\mathcal{L}}(e, \tilde{w}_k) \leq 0$ por lo tanto es uniformemente estable. Pero si por alguna perturbación $|e| < \frac{\bar{\varepsilon}}{a}$ el ajuste de pesos puede dispararse al infinito. Para solucionar este problema, se propuso ajustar $\dot{\tilde{w}}_k = 0$ si $|e| < \frac{\bar{\varepsilon}}{a}$. Pero $\bar{\varepsilon}$ es desconocido. Se impone un valor arbitrario pequeño y el ajuste queda definido por:

$$\dot{w}_k = \begin{cases} \alpha e \varphi(x, u, \mathbf{c}_k, \sigma_k) & \text{si } |e| > \varepsilon_0 \text{ y } \|\mathbf{w}\| \leq M \\ 0 & \text{en otro lugar} \end{cases} \quad (2-104)$$

2.10.2. Identificación de Sistemas MIMO.

Repasando la definición de traza de una matriz cuadrada. Si $\mathbf{\Gamma} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, la norma de Frobenius satisface:

$$\|\mathbf{\Gamma}\|_F^2 = \sum_{i=1}^n \gamma_{ii}^2 = \text{trace}(\mathbf{\Gamma}\mathbf{\Gamma}^T) \quad (2-105)$$

Si los elementos γ_{ii} , de $\mathbf{\Gamma}$ son funciones del tiempo, entonces:

$$\frac{d}{dt}(\text{trace}(\mathbf{\Gamma}\mathbf{\Gamma}^T)) = 2 \sum_{i=1}^n \gamma_{ii} \dot{\gamma}_{ii} = 2 \text{trace}(\mathbf{\Gamma}\dot{\mathbf{\Gamma}}^T) \quad (2-106)$$

Con esta aclaración se puede proceder al análisis de identificación de un sistema MIMO. Ahora considerando el sistema multivariable que puede ser considerado de la forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (2-107)$$

Donde $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ siendo la función a ser identificada: Definimos una matriz Hurwitz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ donde los autovalores de la matriz se encuentran en el semiplano izquierdo. Por el teorema de Lyapunov, para toda matriz simétrica definida positiva $\mathbf{Q}$ existe la solución $\mathbf{P}$ para la ecuación matricial de Lyapunov.

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} = -2\mathbf{Q} \quad (2-108)$$

Donde $\mathbf{Q}$ es otra matriz definida positiva.

Se procederá a identificar el sistema, sumando y restando $\mathbf{A}\mathbf{x}(t)$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= -\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) = \dots \\ &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \end{aligned} \quad (2-109)$$

Siendo $\mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) = -\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$. Ahora definiendo la i -ésima función RBF como:

$$\varphi_i(x, u, \mathbf{c}, \sigma) = \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \left\| \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} - \mathbf{c}_i \right\|^2\right) \quad (2-110)$$

Donde el vector $\boldsymbol{\varphi}$ está representado por:

$$\boldsymbol{\varphi}(x, u) = [\varphi_1(x, u), \varphi_2(x, u), \dots, \varphi_N(x, u)] \quad (2-111)$$

Siendo la función

$$\hat{\mathbf{g}}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{c}, \sigma) = \mathbf{w}^T \boldsymbol{\varphi}(x, u) \quad (2-112)$$

Donde

$$\mathbf{c}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{c}_x \\ \mathbf{c}_u \end{pmatrix} \quad (2-113)$$

Usando un estimador neuronal definido por:

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{g}}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{c}, \sigma) \quad (2-114)$$

Donde el vector de pesos óptimos que minimiza la norma del error de identificación es:

$$\mathbf{w}^* = \underset{\mathbf{w}}{\operatorname{argmin}} \left\| \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) - \mathbf{w}^T \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{c}, \sigma) \right\| \quad (2-115)$$

Sabemos que:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) - \mathbf{w}^{*T} \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{c}, \sigma) \quad (2-116)$$

Podemos representar el modelo como:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{w}^{*T} \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{c}, \sigma) + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2-117)$$

Definiendo el error de estimación y de pesos como $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$ y $\tilde{\mathbf{w}} = \mathbf{w} - \hat{\mathbf{w}}$ construimos la ecuación diferencial describiendo la dinámica del sistema.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t) - \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{w}^{*T} \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{c}, \sigma) + \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{w}^T \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{c}, \sigma) = \dots \\ &= \mathbf{A}\mathbf{e} + \tilde{\mathbf{w}}^T \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{c}, \sigma) + \boldsymbol{\varepsilon} \end{aligned} \quad (2-118)$$

Ahora aplicando Lyapunov, definiendo la función candidata de la forma:

$$\mathcal{L}(\mathbf{e}, \tilde{\mathbf{w}}) = \frac{1}{2} \left(\mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{e} + \frac{1}{\alpha} \operatorname{tr}(\tilde{\mathbf{w}}^T \tilde{\mathbf{w}}) \right) \quad (2-119)$$

derivando (2-119) con respecto al tiempo:

$$\dot{\mathcal{L}}(\mathbf{e}, \tilde{\mathbf{w}}) = \mathbf{e}^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{e}} + \frac{1}{\alpha} \operatorname{tr}(\tilde{\mathbf{w}}^T \dot{\tilde{\mathbf{w}}}) \quad (2-120)$$

Reemplazando la ecuación del error (2-118) en la ec. anterior

$$\dot{\mathcal{L}}(\mathbf{e}, \tilde{\mathbf{w}}) = \mathbf{e}^T \mathbf{P} (\mathbf{A}\mathbf{e} + \tilde{\mathbf{w}}^T \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{c}, \sigma) + \boldsymbol{\varepsilon}) + \frac{1}{\alpha} \operatorname{tr}(\tilde{\mathbf{w}}^T \dot{\tilde{\mathbf{w}}}) \quad (2-121)$$

Operando

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{L}}(\mathbf{e}, \tilde{\mathbf{w}}) &= \mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{e} + \mathbf{e}^T \mathbf{P} \tilde{\mathbf{w}}^T \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{c}, \sigma) + \mathbf{e}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{\alpha} \operatorname{tr}(\tilde{\mathbf{w}}^T \dot{\tilde{\mathbf{w}}}) = \dots \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{e}^T (\mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{P}) \mathbf{e} + \mathbf{e}^T \mathbf{P} \tilde{\mathbf{w}}^T \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{c}, \sigma) + \mathbf{e}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{\alpha} \operatorname{tr}(\tilde{\mathbf{w}}^T \dot{\tilde{\mathbf{w}}}) = \\ &= -\mathbf{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{e} + \operatorname{tr}(\mathbf{e}^T \mathbf{P} \tilde{\mathbf{w}}^T \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{c}, \sigma)) + \mathbf{e}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{\alpha} \operatorname{tr}(\tilde{\mathbf{w}}^T \dot{\tilde{\mathbf{w}}}) \end{aligned} \quad (2-122)$$

Usando la propiedad cíclica del operador traza

$$tr(\mathbf{e}^T \mathbf{P} \tilde{\mathbf{w}}^T \boldsymbol{\varphi}(x, u, \mathbf{c}, \sigma)) = tr(\tilde{\mathbf{w}}^T \boldsymbol{\varphi}(x, u, \mathbf{c}, \sigma) \mathbf{e}^T \mathbf{P}) \quad (2-123)$$

Reemplazando en (2-122) queda

$$\dot{L}(\mathbf{e}, \tilde{\mathbf{w}}) = -\mathbf{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{e} + \frac{1}{\alpha} tr[\tilde{\mathbf{w}}^T (\alpha \boldsymbol{\varphi}(x, u, \mathbf{c}, \sigma) \mathbf{e}^T \mathbf{P} + \dot{\tilde{\mathbf{w}}})] + \mathbf{e}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2-124)$$

Definiendo la regla de ajuste de la forma.

$$\dot{\tilde{\mathbf{w}}} = -\alpha \boldsymbol{\varphi}(x, u, \mathbf{c}, \sigma) \mathbf{e}^T \mathbf{P} \quad (2-125)$$

Reemplazando (2-125) en (2-124) queda

$$\dot{L}(\mathbf{e}, \tilde{\mathbf{w}}) = -\mathbf{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{e} + \mathbf{e}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2-126)$$

Aplicando propiedad norma:

$$\begin{aligned} \dot{L}(\mathbf{e}, \tilde{\mathbf{w}}) &\leq -\lambda_{\min}(\mathbf{Q}) \|\mathbf{e}\|^2 + \|\mathbf{e}\| \lambda_{\max}(\mathbf{P}) \bar{\varepsilon} = \dots \\ &= -\lambda_{\min}(\mathbf{Q}) \|\mathbf{e}\| \left(\|\mathbf{e}\| - \frac{\lambda_{\max}(\mathbf{P})}{\lambda_{\min}(\mathbf{Q})} \bar{\varepsilon} \right) \end{aligned} \quad (2-127)$$

Siendo la condición de estabilidad

$$\|\mathbf{e}\| \geq \frac{\lambda_{\max}(\mathbf{P})}{\lambda_{\min}(\mathbf{Q})} \bar{\varepsilon} \quad (2-128)$$

Para el caso anterior, entonces $\dot{V}(\mathbf{e}, \tilde{\mathbf{w}}_k) \leq 0$ por lo tanto es uniformemente estable. Al igual para el caso SISO, si por alguna perturbación $\|\mathbf{e}\| < \frac{\lambda_{\max}(\mathbf{P})}{\lambda_{\min}(\mathbf{Q})} \bar{\varepsilon}$ el ajuste de pesos puede dispararse al infinito. Para solucionar este problema, se propuso ajustar $\dot{\tilde{\mathbf{w}}}_k = 0$ si $\|\mathbf{e}\| < \frac{\lambda_{\max}(\mathbf{P})}{\lambda_{\min}(\mathbf{Q})} \bar{\varepsilon}$. Pero $\bar{\varepsilon}$ es desconocido. Se impone un valor arbitrario pequeño y el ajuste queda definido por:

$$\dot{\mathbf{w}}_k = \begin{cases} \alpha \boldsymbol{\varphi}(x, u, \mathbf{c}, \sigma) \mathbf{e}^T \mathbf{P} & \text{si } \|\mathbf{e}\| \geq \varepsilon_0 \text{ y } \|\mathbf{w}\| \leq M \\ 0 & \text{en otro lugar} \end{cases} \quad (2-129)$$

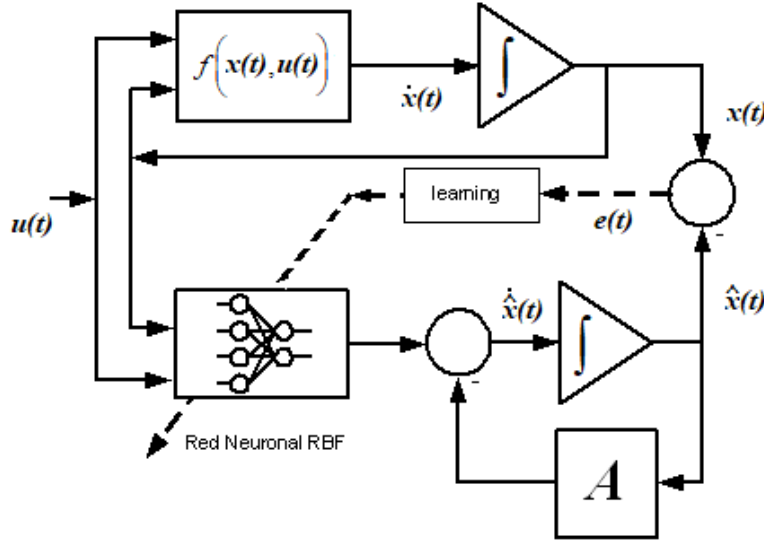


figura 2-11:esquema de identificación.

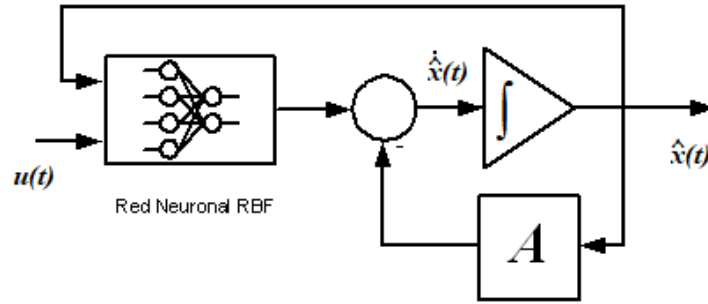


figura 2-12:Esquema de operación.

2.11. Control Basado en el Espacio Nulo

Normalmente cuando una misión involucra uno o varios robots que deben cumplir un número de tareas al mismo tiempo. Un enfoque común es resolver cada una de forma individual, y finalmente combinar las salidas de cada tarea y generar los comandos para los robots. El control basado en espacio nulo se deriva de la solución de cinemática inversa de los manipuladores industriales. Un sistema redundante, tiene infinitas soluciones para un mismo objetivo, y de esta manera es posible introducir objetivos de control secundarios en el espacio nulo.

Se definen $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^m$ como el conjunto de variables que deben controlarse, y $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ como las variables que representan las posiciones de los vehículos aéreos. Para una formación de 3 vehículos aéreos $n = 9$. La relación entre ambos está dado por

$$\mathbf{q} = f(\mathbf{x}) \quad (2-130)$$

con su correspondiente relación diferencial,

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}(\mathbf{x}) \dot{\mathbf{x}} \quad (2-131)$$

donde $\mathbf{J}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ es la matriz Jacobiana asociada a la tarea, que relaciona las velocidades de los robots con las velocidades de las tareas. Una forma efectiva de generar una referencia de movimiento para cada robot ($\mathbf{x}_d(t)$) de un valor deseado de variables de la tarea ($\mathbf{q}_d(t)$), es invirtiendo la relación cinemática (2-131). Un requerimiento típico es encontrar la solución de mínima norma, que se obtiene mediante la solución de mínimos cuadrados

$$\dot{\mathbf{x}}_d = \mathbf{J}^+ \dot{\mathbf{q}}_d = \mathbf{J}^T (\mathbf{J} \mathbf{J}^T)^{-1} \dot{\mathbf{q}}_d \quad (2-132)$$

donde $J^\dagger$ es la matriz pseudo-inversa del Jacobiano. Las referencias de posición pueden obtenerse integrando $\dot{\mathbf{x}}_d$ en (2-132) y utilizando el algoritmo de cinemática inversa de lazo cerrado.

$$\dot{\mathbf{x}}_d = J^\dagger(\dot{\mathbf{q}}_d + \Lambda \tilde{\mathbf{q}}) \quad (2-133)$$

Λ es una matriz diagonal de ganancias positivas que sirve para ajustar la respuesta, y $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q}_d - \mathbf{q}$ es el error de la tarea. El problema de competencia entre cada una de las tareas se soluciona proyectando las diferentes velocidades en el espacio nulo creado por la matriz Jacobiana de la tarea de mayor jerarquía. Primero es necesario calcular la velocidad deseada para cada sub-tarea,

$$\dot{\mathbf{x}}_{id} = J_i^\dagger(\dot{\mathbf{q}}_{id} + \lambda_i \tilde{\mathbf{q}}_i) \quad (2-134)$$

i denota la i -ésima tarea y λ_i son los elementos de la matriz Λ para la tarea i . El índice puede también indicar la prioridad de cada tarea, por lo que la tarea 1 es de mayor nivel de jerarquía que cualquier otra. Resolviendo cada tarea individualmente, es posible combinar las soluciones individuales. Para el caso de 3 tareas, la solución de (2-134) se modifica del siguiente modo:

$$\dot{\mathbf{x}}_d = \dot{\mathbf{x}}_{1d} + (I - J_1 J_1^\dagger)[\dot{\mathbf{x}}_{2d} + (I - J_2 J_2^\dagger)\dot{\mathbf{x}}_{3d}] \quad (2-135)$$

I es la matriz identidad de la dimensión apropiada. En las ecuaciones (2-134) y (2-135), cada sub-tarea es resuelta individualmente como si no tuviese relación con alguna otra. Luego, su contribución a la solución general se agrega. Las velocidades de las tareas de menor nivel son proyectadas en el espacio nulo de la tarea superior inmediata, de esta forma se remueven las componentes que pueden tener conflictos

Para ejemplificar esto, se analiza el caso del control de una formación de 2 vehículos aéreos donde se desea realizar el control del baricentro de dicha formación. Es posible analizar que si ambos vehículos rotan con respecto al baricentro siempre a la misma distancia se cumplirá el objetivo de control, entonces resulta evidente que es posible agregar otra tarea dentro del esquema de control que restrinja la posición de dichos robots. Todas aquellas soluciones que no modifican la posición del baricentro, están en el espacio nulo del Jacobiano asociado a la tarea

Una característica importante del enfoque de control Basado en Espacio Nulo es que siempre se cumple la tarea de mayor prioridad o jerarquía. Las de menor prioridad, se alcanzan en un subespacio donde estas no generan conflicto con aquellas de mayor jerarquía. Esta es una clara ventaja frente a los esquemas competitivos, donde solo se realiza una tarea a la vez, y los enfoques cooperativos, donde el uso de una combinación lineal de cada una de las salidas de las tareas cuyo resultado no garantiza el cumplimiento por completo de ninguna de las tareas. Cabe notar que, con este enfoque, la tarea de mayor prioridad subsume a las de menor jerarquía. En caso de J_1 sea de rango completo, el espacio nulo será vacío y por lo tanto no será posible cumplir las tareas de menor prioridad.

Otra ventaja de este enfoque con respecto a las técnicas competitivas, es su formalidad matemática que permite realizar análisis de estabilidad para demostrar analíticamente el desempeño de la ley de control.

Capítulo 3. Control de un vehículo marino usando LABC y compensación adaptable.

3.1. Resumen del Capítulo

En esta sección se presenta el diseño de una técnica de control basada en la combinación del Álgebra Lineal (LABC) con el Control Adaptable aplicada al control de un vehículo marino. Donde la técnica de Álgebra lineal controla la cinemática del vehículo y el control adaptable ajusta las variaciones de la dinámica. En otras palabras, la capacidad adaptable de esta técnica de control se ajusta a cualquier variación de los parámetros del modelo dinámico real, que puede incluir parámetros no conocidos. Para demostrar la viabilidad de la técnica propuesta el vehículo marino es sometido a distintos tipos de perturbaciones, que incluyen la acción de las olas y el viento. Los resultados de la simulación muestran resultados satisfactorios, especialmente cuando las perturbaciones actúan sobre su dinámica. Finalmente, se demostró la convergencia de la técnica propuesta utilizando la teoría de Lyapunov.

3.2. Descripción del Modelo del Buque:

Considerando los modelos del barco descriptos en [44],[40].

Modelo Cinemático

$$\begin{aligned}\dot{x} &= u\cos(\psi) - v\sin(\psi) \\ \dot{y} &= u\sin(\psi) + v\cos(\psi) \\ \dot{\psi} &= r\end{aligned}\tag{3-1}$$

Modelo Dinámico

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{C}(\mathbf{v})\mathbf{v} + \mathbf{D}\mathbf{v} = \mathbf{B}\mathbf{u}\tag{3-2}$$

En (3-1) $\mathbf{y} = [x, y, \psi]^T$ indica el vector de posición en marco de referencia fijo en un punto determinado, En (3-2) $\mathbf{v} = [u, v, r]^T \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ representa el vector de velocidad en marco de referencia fijo, $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}(\mathbf{v})$ y $\mathbf{D}$ son la matriz de inercia del barco, la matriz de Coriolis y centrífuga y por último la matriz de fricción hidrodinámica, respectivamente;

$\mathbf{u} = [T_u, T_r]^T$ es el vector de acción de control sobre el barco, donde T_u y T_r son el control de avance y giro. La masa y la matriz de inercia se consideran simétricas y definidas positivas, esto es debido por el hecho de que la mayoría de los buques de superficie marina son simétricos con respecto al eje proa-popa. En particular, la estructura de las matrices $\mathbf{M}$ y $\mathbf{D}$ que son consideradas como ([41]):

$$\mathbf{M} \triangleq \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & 0 \\ 0 & m_{22} & m_{23} \\ 0 & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} = \mathbf{M}^T; \mathbf{D} \triangleq \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & d_{23} \\ 0 & d_{32} & d_{33} \end{bmatrix}\tag{3-3}$$

Con la estructura de la matriz $\mathbf{M}$ mostrada en (3-3), la matriz de Coriolis y centrípeta $\mathbf{C}(\mathbf{v})$ es parametrizada como se muestra en (3-4) ([40],[42]). La matriz de entrada (o del actuador) $\mathbf{B}$ condiciona las entradas de control en fuerzas y momentos que actúan sobre el buque,

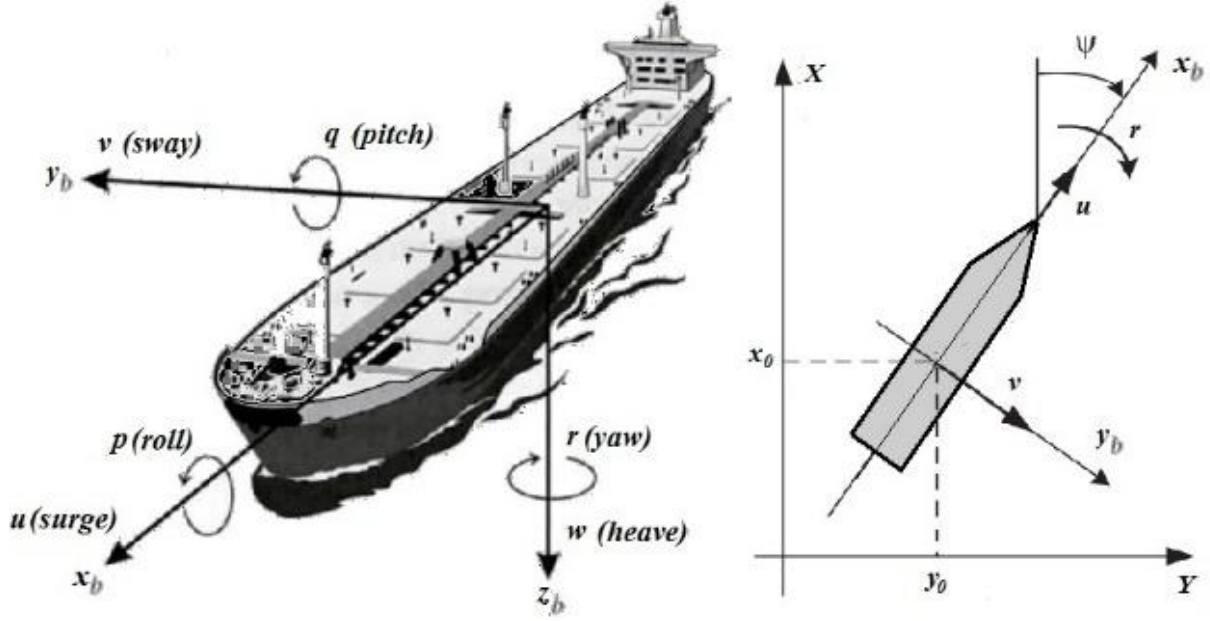


figura 3-1:Marco de coordenadas fijos del cuerpo B y marco de coordenadas global U

$$\mathbf{C}(\mathbf{v}) \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 0 & -m_{22}v - m_{23}r \\ 0 & 0 & m_{11}u \\ -m_{22}v + m_{23}r & -m_{11}u & 0 \end{bmatrix}; \mathbf{B} \triangleq \begin{bmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & b_{32} \end{bmatrix} \quad (3-4)$$

Finalmente, luego de simple operaciones el modelo dinámico del barco puede ser reorganizado como,

$$\begin{aligned} \dot{u} &= f_1 + \frac{b_{11}}{m_{11}} T_u \\ \dot{r} &= \kappa(f_2 + b_{32} T_r) \end{aligned} \quad (3-5)$$

Donde:

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{m_{22}}{m_{11}} vr + \frac{m_{23}}{m_{11}} r^2 - \frac{d_{11}}{m_{11}} u \\ f_2 &= (m_{11} - m_{22})vu + \left(\frac{m_{11}m_{23}}{m_{22}} - m_{23}\right)ru + \left(\frac{d_{22}m_{23}}{m_{22}} - d_{32}\right)v + \left(\frac{d_{23}m_{23}}{m_{22}} - d_{33}\right)r \end{aligned} \quad (3-6)$$

$$\kappa = \frac{m_{22}}{m_{22}m_{33} - m_{23}^2} \quad (3-7)$$

3.3. Desarrollo del controlador basado en Algebra lineal

Para el desarrollo del controlador cinemático basado en control inverso, primero se definen los errores de trayectoria $\tilde{x}, \tilde{y}$ en (3-8). Donde x_{ref}, y_{ref} son las coordenadas de la referencia de posición. El propósito de esta sección es el desarrollo de una ley de control basada en la técnica de algebra lineal (LABC) para el seguimiento de trayectorias [41]. A continuación, se define el vector de error de salida $\tilde{\mathbf{y}} = [\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{\psi}]^T$ y $\dot{\psi} = r$

$$\tilde{\mathbf{y}} = [\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{\psi}]^T = [x_{ref} - x, y_{ref} - y, \psi_{ref} - \psi]^T \quad (3-8)$$

Y expresando las dos primeras líneas de (3-1) como:

$$\dot{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ r \end{bmatrix} \quad (3-9)$$

de (3-9) el control cinemático propuesto puede ser representado como:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} + v\sin(\psi) \\ \dot{y} - v\cos(\psi) \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & 0 \\ \sin(\psi) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ r \end{bmatrix} \quad (3-10)$$

O

$$\begin{bmatrix} \dot{x} + v\sin(\psi) \\ \dot{y} - v\cos(\psi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\psi) \\ \sin(\psi) \end{bmatrix} u \quad (3-11)$$

de (3-11), la ley control puede ser obtenida de:

$$\begin{bmatrix} \cos(\psi) \\ \sin(\psi) \end{bmatrix} u = \begin{bmatrix} \dot{x}_{ref} + k_x \tilde{x} + v\sin(\psi) \\ \dot{y}_{ref} + k_y \tilde{y} - v\cos(\psi) \end{bmatrix} \quad (3-12)$$

Donde k_x, k_y son ganancias del lazo de control cinemático, es fácil demostrar que:

$$tg(\psi_{ref}) = \frac{\dot{y}_{ref} + k_y \tilde{y} - v\cos(\psi)}{\dot{x}_{ref} + k_x \tilde{x} + v\sin(\psi)} \quad (3-13)$$

entonces

$$\begin{aligned} u_{ref} &= \left(\dot{y}_{ref} + k_y \tilde{y} - v\cos(\psi) \right) \sin(\psi_{ref}) + \dots \\ &+ \left(\dot{x}_{ref} + k_x \tilde{x} + v\sin(\psi) \right) \cos(\psi_{ref}) \end{aligned} \quad (3-14)$$

y

$$r_{ref} = (\dot{\psi}_{ref} + k_\psi \tilde{\psi}) \quad (3-15)$$

aproximando $\cos(\psi)$ por series de Taylor

$$\begin{aligned} \cos(\psi) &= \cos(\psi_{ref}) - \sin(\psi_{ref} + \lambda(\psi - \psi_{ref}))(\psi - \psi_{ref}) = \dots \\ &= \cos(\psi_{ref}) + \sin(\psi_\lambda)\tilde{\psi} \end{aligned} \quad (3-16)$$

Donde $\psi_\lambda = \psi_{ref} + \lambda(\psi - \psi_{ref})$, $\tilde{\psi} = \psi_{ref} - \psi$ y $0 < \lambda < 1$, tomando $\dot{x}$ de la ec.(3-9) y reemplazando en (3-16),

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u\cos(\psi) - v\sin(\psi) = u(\cos(\psi_{ref}) + \sin(\psi_\lambda)\tilde{\psi}) - v\sin(\psi) = \dots \\ &= u\cos(\psi_{ref}) + u\sin(\psi_\lambda)\tilde{\psi} - v\sin(\psi) \end{aligned} \quad (3-17)$$

de (3-14) y renombrando $\Delta y = \dot{y}_{ref} + k_y \tilde{y} - v\cos(\psi)$ y También a $\Delta x = \dot{x}_{ref} + k_x \tilde{x} + v\sin(\psi)$ y multiplicando ambas ecuaciones por $\cos(\psi_{ref})$ conduce a:

$$u_{ref}\cos(\psi_{ref}) = (\Delta y)\sin(\psi_{ref})\cos(\psi_{ref}) + (\Delta x)\cos^2(\psi_{ref}) \quad (3-18)$$

Teniendo cuenta (3-13) y reordenando.

$$\Delta y \sin(\psi_{ref}) = \Delta x \cos(\psi_{ref}) \quad (3-19)$$

haciendo $\Delta y = (\Delta x \cos(\psi_{ref}) / \sin(\psi_{ref}))$ y reemplazando en (3-18)

$$u_{ref} \cos(\psi_{ref}) = (\Delta x) \sin^2(\psi_{ref}) + (\Delta x) \cos^2(\psi_{ref}) = \Delta x \quad (3-20)$$

Con (3-20) y reordenando (3-17), se obtiene:

$$\dot{x} = \Delta x + u \sin(\psi_\lambda) \tilde{\psi} - v \sin(\psi) \quad (3-21)$$

Reemplazando Δx en (3-21)

$$\dot{\tilde{x}} + k_x \tilde{x} + u \sin(\psi_\lambda) \tilde{\psi} = 0 \quad (3-22)$$

Y de la misma forma para y

$$\dot{\tilde{y}} + k_y \tilde{y} - u \cos(\psi_\rho) e_\psi = 0 \quad \text{siendo} \quad 0 < \rho < 1 \quad (3-23)$$

Y para ψ

$$\dot{\tilde{\psi}} = -\frac{k_\psi}{l_\psi} \tilde{\psi} \quad (3-24)$$

Considerando la teoría de Lyapunov para probar la estabilidad de $\tilde{\psi}$, la función candidata de Lyapunov es (CLF):

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\tilde{\psi}^2 + \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2) \quad (3-25)$$

Derivando (3-25) y reemplazando la ec. (3-22), (3-23) y (3-24).

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{L}} &= \tilde{\psi} \dot{\tilde{\psi}} + \tilde{x} \dot{\tilde{x}} + \tilde{y} \dot{\tilde{y}} = \dots \\ &= -k_\psi (\tilde{\psi})^2 - \tilde{x} (k_x \tilde{x} + u \sin(\psi_\lambda) \tilde{\psi}) - \dots \\ &\quad - \tilde{y} (k_y \tilde{y} + u \cos(\psi_\rho) \tilde{\psi}) = \dots \\ &= -k_\psi \tilde{\psi}^2 - k_x \tilde{x}^2 - \tilde{x} u \sin(\psi_\lambda) \tilde{\psi} - \dots \\ &\quad - k_y \tilde{y}^2 - \tilde{y} u \cos(\psi_\rho) \tilde{\psi} \end{aligned} \quad (3-26)$$

Considerando los términos como $|u \sin(\psi_\lambda)| \tilde{\psi} \tilde{x} \leq k_\lambda \tilde{x} \tilde{\psi}$ e $|\tilde{y} u \cos(\psi_\rho)| \tilde{\psi} \tilde{y} \leq k_\rho \tilde{y} \tilde{\psi}$, siendo k_λ y k_ρ valores constantes, debido a que $u \leq u_{max}$, $\sin(\psi_\lambda)$ y $\cos(\psi_\rho)$ son señales acotadas. Reescribiendo (3-26), se puede ver como:

$$\dot{\mathcal{L}} = -k_\psi \tilde{\psi}^2 - k_x \tilde{x}^2 - k_\lambda \tilde{x} \tilde{\psi} - k_y \tilde{y}^2 - k_\rho \tilde{y} \tilde{\psi} \quad (3-27)$$

Aplicando norma en (3-27)

$$\begin{aligned}
\dot{L} &\leq -k_\psi |\tilde{\psi}|^2 - k_x |\tilde{x}|^2 + k_\lambda |\tilde{x}| |\tilde{\psi}| - \dots \\
&\quad -k_y |\tilde{y}|^2 + k_e |\tilde{y}| |\tilde{\psi}| = \dots \\
&= -k_\psi |\tilde{\psi}|^2 + |\tilde{x}| (-k_x |\tilde{x}| + k_\lambda |\tilde{\psi}|) + \dots \\
&\quad + |\tilde{y}| (-k_y |\tilde{y}| + k_e |\tilde{\psi}|) \leq 0
\end{aligned} \tag{3-28}$$

Para garantizar la convergencia

$$\begin{cases} |\tilde{x}| \geq \frac{k_\lambda}{k_x} |\tilde{\psi}| \\ |\tilde{y}| \geq \frac{k_e}{k_y} |\tilde{\psi}| \end{cases} \tag{3-29}$$

De (3-28) $|\tilde{\psi}| \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$, entonces $|\tilde{x}|$ y $|\tilde{y}| \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. Este resultado considera que no existe dinámica y existe seguimiento perfecto de velocidad. Esta consideración será nuevamente estudiada en la sección siguiente **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** cuando la estabilidad completa sea considerada.

3.4. Diseño del Controlador Adaptable

En esta sección, se diseña un controlador dinámico adaptable. El principal problema es la existencia de variaciones dinámicas en nuestro problema de control. Para sistemas con dinámica no lineal, el control adaptable es una solución interesante. En un buque marino, muchos parámetros dinámicos pueden variar por diferentes razones. Por ejemplo, aumentar la carga en buques mercantes o pesqueros o reducir la carga en un reabastecimiento de combustible para buques cisterna.

Este controlador propuesto está vinculado en cascada con el control cinemático propuesto, el método de control adaptable recibe de la ley de control cinemático (sección anterior) las señales de salida (velocidades lineales y angulares) que se introducen en el control adaptable como señales de referencia. Esta ley de control adaptable debe producir otro par de velocidad (lineal u_{ref} y angular r_{ref}) que se transferirá a la dinámica del buque como acciones de control, como se muestra en la figura 3-2. El diseño de la ley de control adaptable se basa en la dinámica de los buques marinos. Y es necesario expresar esta dinámica sobre la forma parametrizada. Ahora, a partir de (3-6) computación T_u y T_r en función de $v, u, r, \dot{u}$ y $\dot{r}$ conduce a:

$$\begin{bmatrix} T_u \\ T_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\varphi_4 v r - \varphi_3 r^2 + \varphi_2 u + \varphi_1 \dot{u} \\ -\varphi_5 v u - \varphi_6 r u - \varphi_7 v - \varphi_8 r + \varphi_9 \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{u} & u & -r^2 & -vr & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -vu & -ru & -v & -r & \dot{r} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_9 \end{bmatrix} \tag{3-30}$$

Y determinar los parámetros de la ec. (3-30) como:

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \frac{m_{22}}{b_{11}} & \varphi_2 &= \frac{m_{23}}{b_{11}} \\
\varphi_3 &= \frac{d_{11}}{b_{11}} & \varphi_4 &= \frac{m_{11}}{b_{11}} \\
\varphi_5 &= \frac{(m_{11} - m_{22})m_{22}}{b_{32}(m_{22}m_{33} - m_{23}^2)} & \varphi_6 &= \frac{(m_{11}m_{23} - m_{23}m_{22})}{b_{32}(m_{22}m_{33} - m_{23}^2)} \\
\varphi_7 &= \frac{(d_{22}m_{23} - d_{23}m_{22})}{b_{32}(m_{22}m_{33} - m_{23}^2)} & \varphi_8 &= \frac{(d_{22}m_{23} - d_{33}m_{22})}{b_{32}(m_{22}m_{33} - m_{23}^2)} \\
& & \varphi_9 &= \frac{(m_{22}m_{33} - m_{23}^2)}{b_{32}m_{22}}
\end{aligned}$$

La eq. (3-30) puede modificarse como

$$\begin{bmatrix} T_u \\ T_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_1 & 0 \\ 0 & \varphi_9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{r} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & u & -r^2 & -vr & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -vu & -ru & -v & -r & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_9 \end{bmatrix} \quad (3-31)$$

Expresar (3-31) en forma compacta

$$\mathbf{T} = \mathbf{K}\mathbf{v} + \mathbf{\Omega}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{r})\mathbf{\Phi} \quad (3-32)$$

Donde $\mathbf{v} = [\dot{u} \ \dot{r}]^T$, $\mathbf{\Phi} = [\varphi_1 \ \varphi_2 \ \varphi_3 \ \varphi_4 \ \varphi_5 \ \varphi_6 \ \varphi_7 \ \varphi_8 \ \varphi_9]^T$, $\mathbf{K} = \text{diag}(\varphi_1, \varphi_9)$ y la expresión para $\mathbf{\Omega}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{r})$ como:

$$\mathbf{\Omega}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{r}) = \begin{bmatrix} 0 & u & -r^2 & -vr & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -vu & -ru & -v & -r & 0 \end{bmatrix} \quad (3-33)$$

Ahora definiendo el siguiente vector

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_u \\ \sigma_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{u}_{ref} + k_u e_u \\ \dot{r}_{ref} + k_r e_r \end{bmatrix} \quad (3-34)$$

Donde $e_u = u_{ref} - u$ y $e_r = r_{ref} - r$ son los errores de velocidad, utilizando estas variables, se puede definir la ley de control como:

$$\mathbf{T}_{ref} = \mathbf{K}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{\Omega}\mathbf{\Phi} \quad (3-35)$$

Reescribiendo eq. (3-35) como:

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_{ref} &= \mathbf{Y}(\sigma_u, \sigma_r, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{r})\mathbf{\Phi} = \dots \\
&= \begin{bmatrix} \sigma_u & u & -r^2 & -vr & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -vu & -ru & -v & -r & \sigma_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_9 \end{bmatrix} \quad (3-36)
\end{aligned}$$

Ahora teniendo en cuenta las incertidumbres de los parámetros, la eq. (3-36) se puede describir como:

$$\begin{aligned} T_{ref} &= Y\hat{\Phi} = Y(\Phi + \tilde{\Phi}) = Y\Phi + Y\tilde{\Phi} = \dots \\ &= (K\sigma + \Omega\Phi) + Y\tilde{\Phi} \end{aligned} \quad (3-37)$$

Donde $\tilde{\Phi} = (\hat{\Phi} - \Phi)$ es el vector de error de parámetros, de las eqs. (3-35) y (3-32) sabemos que

$$Kv + \Omega\Phi = (K\sigma + \Omega\Phi) + Y\tilde{\Phi} \quad (3-38)$$

Reorganizando (3-38), puede formularse como

$$K(\sigma - v) = -Y\tilde{\Phi} \quad (3-39)$$

Teniendo en cuenta que

$$\sigma - v = \begin{bmatrix} \dot{u}_{ref} + k_u e_u \\ \dot{r}_{ref} + k_r e_r \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \dot{e} + K_c e \quad (3-40)$$

Donde $K_c = \text{diag}(k_u, k_r)$, y reemplazando (3-40) en (3-39) y la computación del error de control, produce

$$\dot{e} = -K_c e - K^{-1}Y\tilde{\Phi} \quad (3-41)$$

3.5. Análisis de estabilidad y determinación de las reglas de ajuste

Para adquirir la capacidad adaptable del controlador es necesario encontrar las reglas de ajuste, en primer lugar, es necesario establecer los requisitos de convergencia del método de control propuesto. Para obtener estos requisitos es necesario aplicar el criterio Lyapunov para conocer las condiciones de convergencia del control adaptable para la pieza dinámica. Ahora definiendo una función positiva de Lyapunov (CLF) como:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(e^T e + \frac{\tilde{\Phi}^T \tilde{\Phi}}{\gamma} \right) \quad (3-42)$$

Derivando (3-42) con respecto al tiempo, obtenemos:

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \dot{e}^T e + \frac{\tilde{\Phi}^T \dot{\tilde{\Phi}}}{\gamma} \quad (3-43)$$

Sustitución de la ecuación diferencial del error de control (3-41) en (3-43)

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = -e^T (K_c)^T e - \tilde{\Phi}^T Y^T (K^{-1})^T e + \frac{\tilde{\Phi}^T \dot{\tilde{\Phi}}}{\gamma} \quad (3-44)$$

Donde K_c y K son matrices diagonales, por lo tanto $K_c = (K_c)^T$ y $K^{-1} = (K^{-1})^T$ respectivamente, entonces la eq. (3-44) puede expresarse como:

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = -e^T K_c e - \tilde{\Phi}^T Y^T K^{-1} e + \frac{\tilde{\Phi}^T \dot{\tilde{\Phi}}}{\gamma} \quad (3-45)$$

Tomando $\tilde{\Phi}^T$ como factor común en (3-45)

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = -\mathbf{e}^T \mathbf{K}_c \mathbf{e} - \tilde{\Phi}^T \left(\mathbf{Y}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{e} - \frac{\dot{\tilde{\Phi}}}{\gamma} \right) \quad (3-46)$$

Si igualamos a cero la expresión entre paréntesis, queda

$$\tilde{\Phi} = \gamma \mathbf{Y}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{e} \quad (3-47)$$

Definiendo la eq. (3-47) como ley adaptativa, entonces la eq. (3-46) se expresa como:

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = -\mathbf{e}^T \mathbf{K}_c \mathbf{e} \leq 0 \quad (3-48)$$

Este resultado verifica la estabilidad de la ley de control propuesta, esto sugiere que $\mathbf{e}$ y $\tilde{\Phi}$ están limitados.

Integrando (3-48) obtenemos:

$$\mathcal{L}(t) - \mathcal{L}(0) = - \int_0^t \mathbf{e}^T \mathbf{K}_c \mathbf{e} dt \quad (3-49)$$

O no considerando $\mathcal{L}(t)$ se verifica la siguiente condición:

$$\mathcal{L}(0) \geq \int_0^t \mathbf{e}^T \mathbf{K}_c \mathbf{e} dt \quad (3-50)$$

Como la matriz $\mathbf{K}_c$ es simétrica y positiva definido

$$\lambda_{\min}(\mathbf{K}_c) \|\mathbf{e}\|^2 \leq \mathbf{e}^T \mathbf{K}_c \mathbf{e} \leq \lambda_{\max}(\mathbf{K}_c) \|\mathbf{e}\|^2 \quad (3-51)$$

De (3-50) y (3-51) se obtiene

$$\int_0^t \|\mathbf{e}\|^2 dt \leq \frac{\mathcal{L}(0)}{\lambda_{\min}(\mathbf{K}_c)} \quad \forall t \quad (3-52)$$

Esta condición sugiere que $\mathbf{e}$ es una señal integrable. Además $\dot{\mathbf{e}}$ está limitado, como aparece en $\dot{\mathbf{e}} = -\mathbf{e}^T \mathbf{K}_c \mathbf{e} - \mathbf{K}^{-1} \mathbf{Y} \tilde{\Phi}$, como se puede ver $\mathbf{e}$, $\tilde{\Phi}$ y $\mathbf{Y}$ también están limitados $\mathbf{e}$, $\tilde{\Phi}$ y $\mathbf{Y}$. Ahora, si no se considera un seguimiento de velocidad perfecto (ver Sección Controlador de Cinemática), eq. (3-10) se puede escribir como,

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}} + v \sin(\psi) \\ \dot{\tilde{y}} - v \cos(\psi) \\ \dot{\tilde{\psi}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & 0 \\ \sin(\psi) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_u \\ e_r \end{bmatrix} \quad (3-53)$$

Entonces

$$\begin{bmatrix} -\dot{\tilde{x}} - l_x \tanh\left(\frac{k_x}{l_x} \tilde{x}\right) \\ -\dot{\tilde{y}} - l_y \tanh\left(\frac{k_y}{l_y} \tilde{y}\right) \\ -\dot{\tilde{\psi}} - l_\psi \tanh\left(\frac{k_\psi}{l_\psi} \tilde{\psi}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & 0 \\ \sin(\psi) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_u \\ e_r \end{bmatrix} \quad (3-54)$$

Siendo $\tilde{\mathbf{h}} = [\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{\psi}]^T$ y considerando el candidato a la función Lyapunov como:

$$V = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{h}}^T \tilde{\mathbf{h}} \quad (3-55)$$

Derivación (3-55) y sustitución (3-54)

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \tilde{\mathbf{h}}^T \dot{\tilde{\mathbf{h}}} = \dots \\ & -\tilde{x} \left(l_x \tanh\left(\frac{k_x}{l_x} \tilde{x}\right) + e_u \cos(\psi) \right) - \dots \\ & -\tilde{y} \left(l_y \tanh\left(\frac{k_y}{l_y} \tilde{y}\right) + e_u \sin(\psi) \right) - \dots \\ & -\tilde{\psi} \left(l_\psi \tanh\left(\frac{k_\psi}{l_\psi} \tilde{\psi}\right) + e_r \right) \end{aligned} \quad (3-56)$$

Para valores pequeños de $\tilde{\mathbf{h}}$

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \tilde{\mathbf{h}}^T \dot{\tilde{\mathbf{h}}} = -k_x \tilde{x}^2 - (\tilde{x} e_u \cos(\psi)) - k_y \tilde{y}^2 - \dots \\ & -(\tilde{y} e_u \sin(\psi)) - k_\psi \tilde{\psi}^2 - \tilde{\psi} e_r \leq 0 \end{aligned} \quad (3-57)$$

Analizando cada variable y teniendo en cuenta que $|\cos(\psi)| \leq 1$ y $|\sin(\psi)| \leq 1$

$$-k_x (\tilde{x})^2 - \tilde{x} e_u \leq 0 \quad (3-58)$$

Reorganización (3-58)

$$-\tilde{x}(k_x \tilde{x} + e_u) \leq 0 \quad (3-59)$$

La condición para garantizar la convergencia es

$$\tilde{x} \geq \frac{e_u}{k_x} \quad (3-60)$$

Haciendo el mismo análisis para las otras variables.

$$\begin{cases} \tilde{y} \geq \frac{e_u}{k_y} \\ \tilde{\psi} \geq \frac{e_r}{k_\psi} \end{cases} \quad (3-61)$$

Esto implica que $\dot{V} \rightarrow 0$, lo que asegura que $\|\tilde{\mathbf{h}}\|$ está limitado. Además, el resultado obtenido permite afirmar que el error de posición está limitado en última instancia dependiendo del error de aproximación del controlador adaptable dinámico. La figura 3-2 presenta la estructura de control de la nave.

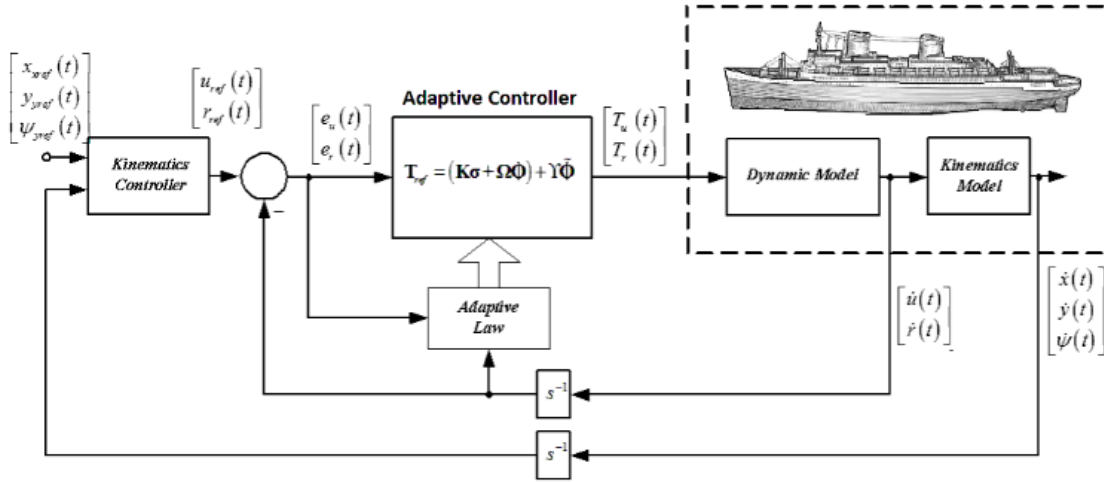


figura 3-2: Muestra la estructura de control propuesta del buque marino

3.6. Análisis de Robustez

A partir de eq. (3-47), es fácil ver que, usando el método propuesto, la matriz $\mathbf{K}$ no necesita conocerse exactamente para obtener la estabilidad del método de control. Por lo tanto, la ley de actualización obtenida (3-47) necesita un conocimiento previo de la matriz $\mathbf{K}$, por lo que la robustez de la ley actualizada debe analizarse en el caso de que $\mathbf{K}$ sea parcialmente conocida o desconocida. Esta incertidumbre de matriz $\mathbf{K}$ se produce por variaciones dinámicas de la embarcación, debido a variaciones de masa en la trayectoria o condiciones climáticas, etc. Si $\mathbf{K}^{-1}$ es desconocido y puede ser representado por un valor nominal más un valor variable que denota su variación, $\mathbf{K}^{-1} = \mathbf{K}_0^{-1}(\mathbf{I} + \Delta)$. Teniendo en cuenta que $\|\Delta\|$ está limitada, entonces la nueva condición de estabilidad de (3-46) se analiza de nuevo y se denota por:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{L}}{dt} &= -(\mathbf{e}^T \mathbf{K}_c \mathbf{e}) - \tilde{\Phi}^T \mathbf{Y}^T \mathbf{K}_0^{-1} (\mathbf{I} + \Delta) \mathbf{e} + \frac{\tilde{\Phi}^T \dot{\tilde{\Phi}}}{\gamma} = \dots \\ &= -(\mathbf{e}^T \mathbf{K}_c \mathbf{e}) - \tilde{\Phi}^T \left(\mathbf{Y}^T \mathbf{K}_0^{-1} (\mathbf{I} + \Delta) \mathbf{e} - \frac{\dot{\tilde{\Phi}}}{\gamma} \right) \end{aligned} \quad (3-62)$$

Reescribir la ley actualizada utilizando $\mathbf{K}_0^{-1}$

$$\dot{\tilde{\Phi}} = -\gamma \mathbf{Y}^T \mathbf{K}_0^{-1} (\mathbf{I} + \Delta) \mathbf{e} \quad (3-63)$$

Entonces (3-47) se puede reescribir como:

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = -(\mathbf{e}^T \mathbf{K}_c \mathbf{e}) \quad (3-64)$$

Este resultado indica que cualquier variación de parámetros en la ley actualizada no afecta a la estabilidad del control propuesto.

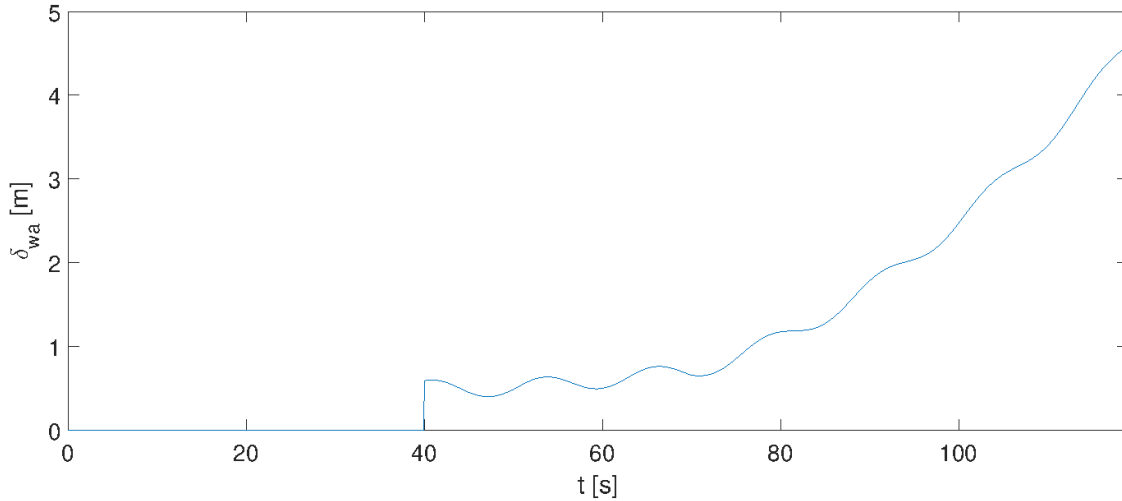


figura 3-3: Perturbación de las olas frente al tiempo introducido en las simulaciones

3.7. Resultados de la simulación y discusión

En esta sección, se presentan simulaciones numéricas teniendo en cuenta las ondas y las perturbaciones del viento para sondear el rendimiento del sistema de control adaptable. Con esto se proponen tres simulaciones realizadas utilizando un simulador desarrollado en la plataforma MATLAB, que considera un modelo preciso del buque. El modelo dinámico implementado para la simulación en (3-2) se utiliza con los mismos valores de parámetros que los de [40],[73].

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 25.8 & 0 & 0 \\ 0 & 33.8 & -11.748 \\ 0 & -11.748 & 6.813 \end{bmatrix}; \quad (3-65)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -2.5425 \\ 0 & -2.5425 & 1.422 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para comparar nuestro enfoque se implementaron dos controladores de la bibliografía ([40],[73]). Los controladores implementados son los controladores propuestos. En este documento se llama C1; propuesto por [40] C2 y el propuesto por C3. Los controladores se aplican al sistema de tiempo continuo original, observado en la figura 3-1. Para cuantificar el rendimiento de cada controlador, se calcula la integral del error absoluto (IAE) para todos los controladores:

$$IAE = \int_0^{t_{sim}} \sqrt{\mathbf{e}_x^2(t) + \mathbf{e}_y^2(t)} dt \quad (3-66)$$

Los parámetros del controlador utilizados en las simulaciones se eligen mediante varias pruebas para que el barco pueda alcanzar y seguir una trayectoria predefinida sin oscilaciones no deseadas: $k_x = 0.9$, $k_y = 0.9$ y $k = 0.8$.

3.8. Simulación teniendo en cuenta las perturbaciones de las olas

En primer lugar, las perturbaciones polinómicas en las variables x e y se introducen en el modelo de la nave continua de acuerdo con (3-67) que representan el efecto de ondas. La variación de tiempo de δ_{wa} es dada por la figura 3-3. Las incertidumbres con una forma similar ya han sido utilizadas por otros autores en la literatura ([74], [18]). En este trabajo, se añadió una dificultad adicional asumiendo altos valores de incertidumbre y que comienzan a actuar abruptamente en el momento $t = 40s$.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= u\cos(\psi) - v\sin(\psi) + \delta_{wa} \\ \dot{y} &= u\sin(\psi) + v\cos(\psi) + \delta_{wa} \\ \dot{\psi} &= r\end{aligned}\tag{3-67}$$

La trayectoria de referencia se establece en tres círculos. Los cuales poseen diferentes radios y están unidos por una sección de circunferencia, donde se muestra en la figura 3-4 (a). La trayectoria interna posee un radio de $r = 3m$, la del medio $r = 4m$ y la última $r = 5m$. La posición inicial de la nave está en: $(x(0); y(0)) = (0m; 0m)$ y la trayectoria comienza en la posición: $(x(0); y(0)) = (1m; 0m)$.

Los resultados de la simulación se muestran en la figura 3-4 (a). Donde se visualiza que todos los controladores alcanzan y siguen la trayectoria deseada sin oscilaciones no deseadas. Sin embargo, el mejor rendimiento es obtenido por C1 (controlador propuesto en este documento) como se muestra en

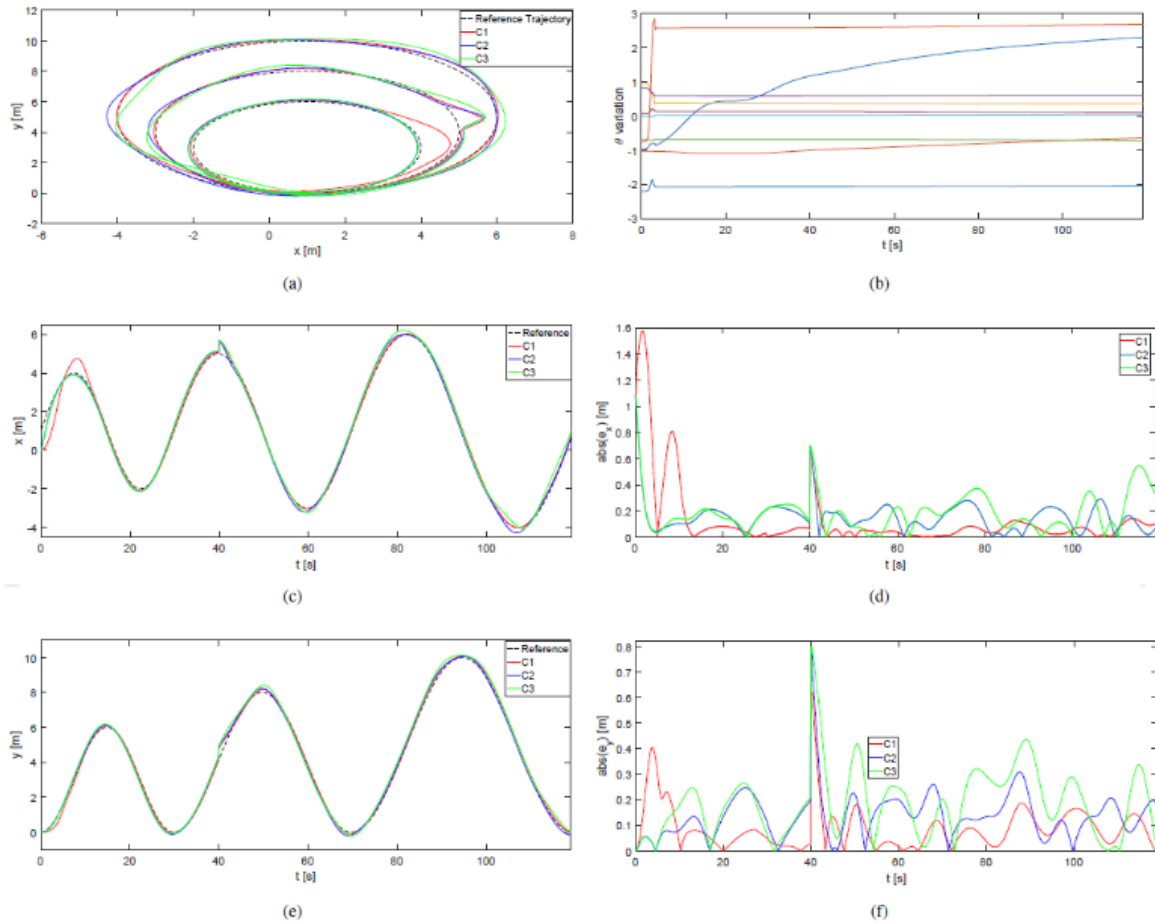


figura 3-4: Resultados de la simulación teniendo en cuenta la perturbación de la onda: **a)-** Trayectoria del recipiente marino teniendo en cuenta el efecto de las ondas **b)-** Evolución temporal de los parámetros adaptables **c)-** Señal de referencia y evolución de la posición del buque en x . **d)-** Evolución del error en la variable x . **e)-** Señal de referencia y evolución de la posición del buque en y . **f)-** Evolución del error en la variable y .

figura 3-4 (c) y 3 (e). Las figura 3-4 (d) y 3(f) muestran las gráficas del error de seguimiento en la coordenada x y la coordenada y . Como se puede ver, para todos los reguladores los errores se delimitan, pero con el enfoque adaptable (C1) son menores que con los otros reguladores. La evolución temporal de los parámetros estimados se muestra en la figura 3-4 (b), como se puede ver, todos los parámetros dinámicos convergen sin desviarse.

Las figura 3-4 (d) y (f) muestran los errores de distancia para las simulaciones usando los reguladores C1, C2 y C3. En ambas figura 3-4 (d) y (f), muestra el error de control inicial alto (C1), que se debe a que los parámetros de control adaptable no se ajustan y que el punto inicial está tan lejos de la trayectoria de referencia. En esta prueba, el error de control de seguimiento de trayectoria de C1 alcanza un valor menor, si se compara con el caso C2 y C3, en el que los parámetros son inamovibles. Además, se puede ver en las figura 3-4 (d) y (f), que la técnica combinada presenta una mejor atenuación de perturbación que C2 y C3.

3.9. Simulación en presencia de olas y efecto del viento

En esta sección, se evalúa el rendimiento del sistema añadiendo una nueva perturbación. Aquí, las olas (δ_{wa}) y las perturbaciones del viento (δ_{wi}) se introducen en el modelo del sistema para

evaluar los resultados teóricos obtenidos en la sección anterior. La función de perturbación de ondas

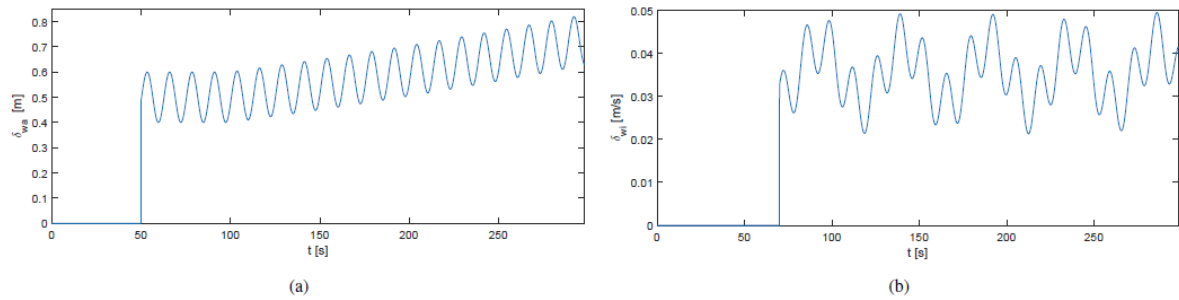


figura 3-5: Perturbación introducido en el modelo del sistema: **a)**- perturbación de la onda; **b)**- perturbación del viento

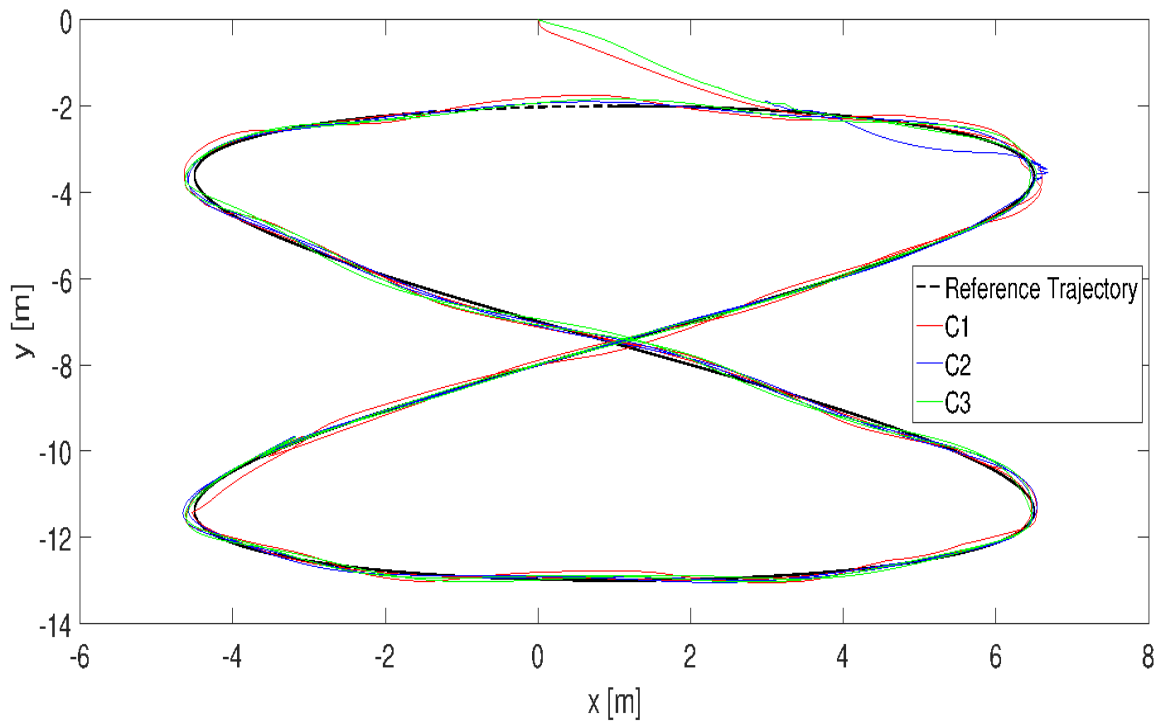


figura 3-6: Resultados de la simulación teniendo en cuenta las olas y el efecto del viento

añadidos son dados por la figura 3-5 (a). El efecto del viento se puede representar introduciendo una perturbación en las velocidades lineales y transversales.

Por lo tanto, la perturbación δ_{wi} se ha mostrado en la figura 3-5 (b) se añade a las variables u y v (véase la ecuación (3-6)).

La prueba se realiza con una trayectoria de forma de ocho (figura de Lissajous) como trayectoria de referencia. La posición inicial de la nave es en: $(x(0); y(0)) (0m; 0m)$ y la trayectoria comienza en la posición: $(x(0); y(0)) (1m; 2m)$.

Los resultados de las simulaciones se muestran en la figura 3-6. La figura 3-6 muestra la posición de la nave para todos los controladores y la trayectoria de referencia. Las figura 3-7 (a) y (c) muestran que todo el controlador alcanza y sigue la trayectoria deseada. En la figura 3-7 (b) y la figura 3-7 (d) muestra los errores de seguimiento en x -coordenada e y -coordenada,

como puede observarse, el error de seguimiento obtenido por C1 (controlador adaptable) es significativamente menor que el obtenido con C2 y C3.

3.10. Simulación teniendo en cuenta los errores de modelado

Por último, se lleva a cabo una simulación teniendo en cuenta los errores de modelado y la perturbación en las acciones de control. En esta prueba, se combina un modelo de variación paramétrica que representa una pérdida de masa con las perturbaciones de las olas (δwa) y del viento (δwi) para probar el rendimiento del sistema de control propuesto. Las perturbaciones de las olas y los vientos se incorporan de la misma manera que en la tarea presentada en la sección anterior, véase las figs. (figura 3-5 (a) y (b)). En la práctica, las pérdidas de masa pueden ser dadas por el consumo de combustible o la descarga de contenedores. Por lo tanto, los parámetros de la matriz $\mathbf{M}$ utilizados para el cálculo de la ley de control se están reduciendo un 15% como:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 21.92 & 0 & 0 \\ 0 & 28.73 & -9.9858 \\ 0 & -9.9858 & 5.791 \end{bmatrix} \quad (3-68)$$

Una trayectoria cuadrada se adopta como señal de referencia. Esta forma en particular puede ser muy útil para simular escenarios donde el barco debe realizar una tarea de evitación de obstáculos y su orientación debe cambiar abruptamente. La trayectoria de referencia se realiza

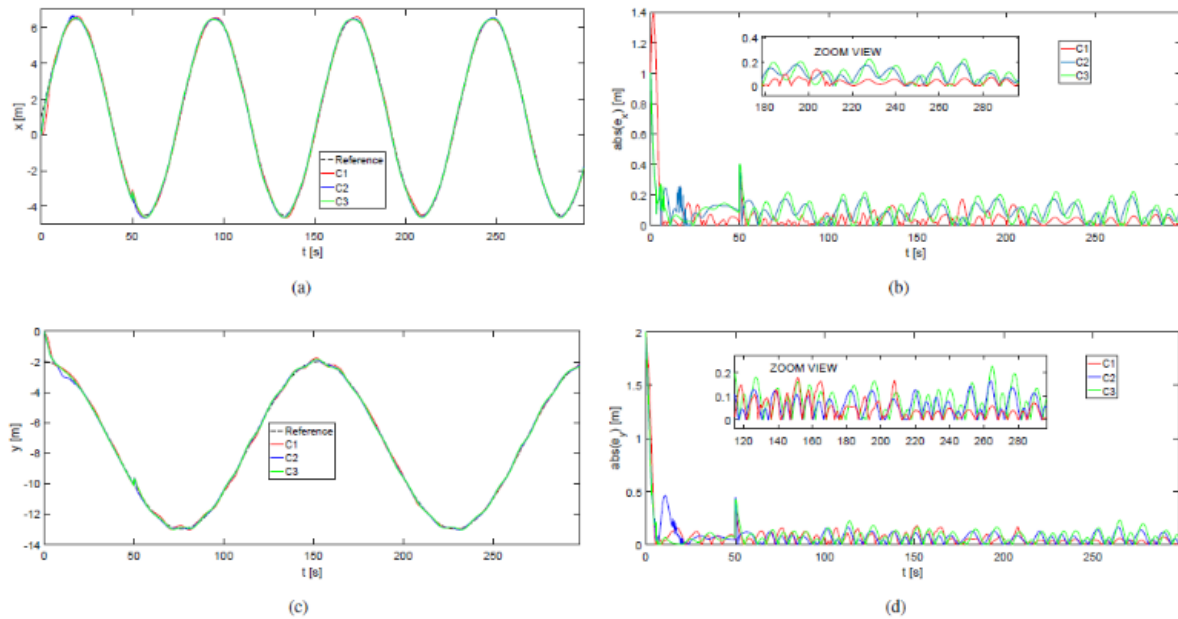


figura 3-7: Resultados de la simulación teniendo en cuenta la perturbación de las olas y el viento. **a-** x -posición de la nave frente al tiempo para todos los controladores implementados; **b-** y -posición de la nave frente al tiempo de todos los controladores implementados; **c-** error absoluto en x variable frente a tiempo para todos los controladores implementados; **d-** variable y de error absoluto frente a tiempo para todos los controladores implementados.

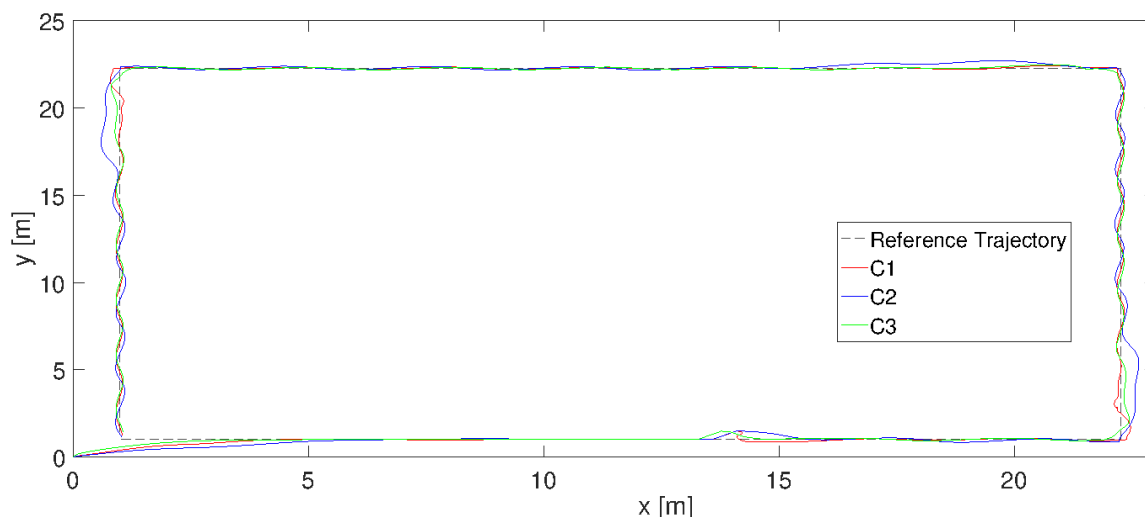


figura 3-8: Posición del buque en trayectoria con cambios bruscos de dirección en presencia de olas y perturbaciones del viento.

con una velocidad lineal $u_{ref} = 0.25 \text{ ms}$, la posición inicial de la nave está en $(x(0); y(0)) = (0 \text{ m}; 0 \text{ m})$ y la trayectoria comienza en la posición $(x(0); y(0)) = (1 \text{ m}; 1 \text{ m})$.

Los resultados de la simulación se muestran en la figura 3-8. Como se puede ver, el buque alcanza y sigue la trayectoria de referencia sin oscilaciones no deseadas. Los errores de seguimiento se muestran en la figura 3-9 (a) y (b), mediante la inspección de estas cifras, se puede concluir que el esquema adaptable presentado en este documento (C1) presenta el mejor rendimiento cuando se introducen errores paramétricos y perturbaciones en la acción de control.

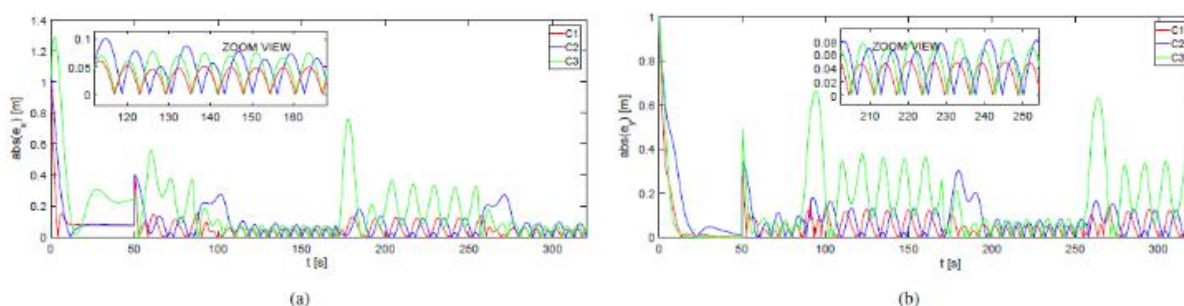


figura 3-9: Resultados de la simulación teniendo en cuenta los errores de modelado, las olas y las perturbaciones del viento. **a**- señal de referencia y evolución de la posición del buque en variable x **b**- señal de referencia y evolución de la posición del buque en variable y . **c**- una evolución del valor absoluto de e_x . **d**- la evolución del valor absoluto de e_y .

3.11. Discusión de los resultados

En el desarrollo de este trabajo se presentó una técnica de control adaptable no lineal para diferentes tipos de navíos. Especialmente en buques mercantes donde la variación de la carga y su gran volumen la hacen vulnerable a contingencias climáticas (viento, olas, tormentas, etc.). En los experimentos realizados, se puede observar que el control adaptable (C1) es más eficiente en el momento de rechazar perturbaciones externas que pueden alterar su dinámica. Esto se refleja en la figura 3-8 donde los parámetros permanecen inalterados frente a diferentes

perturbaciones. Esta técnica podría aplicarse en diferentes tipos de barcos debido a su simplicidad y robustez.

3.12. Observaciones finales

Un controlador adaptable para un buque marino en el seguimiento de trayectoria fue implementado y probado en este trabajo. Este método de control compuesto fue diseñado teniendo en cuenta dos partes, la primera se construye teniendo en cuenta la cinemática del buque utilizando una estrategia LABC. Y la segunda, se implementó una ley de control adaptable para la dinámica de los buques. El controlador LABC anterior produce las señales de referencia para la ley de control adaptable. Este controlador adaptable no sólo ofrece la acción de control, al mismo tiempo, sino que también genera la ley de ajuste de parámetros que trabaja en la parte dinámica de la embarcación marina para reducir el error de seguimiento de control. Este método compuesto podría mejorar el rendimiento general del sistema. La convergencia del método propuesto se demostró utilizando la teoría de la estabilidad de Lyapunov y se aplicó tanto al álgebra lineal como a los controladores adaptables. Otra contribución de este trabajo es demostrar la eficacia del LABC en combinación con el control adaptable aplicado en los buques marinos autónomos.

Además, los resultados de esta simulación demuestran que los parámetros del buque convergen incluso si el método de control propuesto se utiliza de forma continua. Estos resultados demostraron que este método de control podría usarse en el control de seguimiento de trayectoria para embarcaciones marinas con un error mínimo cuando el método de control compuesto sintoniza los parámetros de la embarcación con diferentes perturbaciones externas. Esta ley de sintonización adaptable se puede aplicar cuando los parámetros de la embarcación no se conocen con exactitud o, en el peor de los casos, podrían cambiar debido a variaciones dinámicas. Este método de control compuesto podría aplicarse en buques mercantes marinos utilizados para el transporte de carga pesada, debido a que el ajuste de parámetros en línea conservaría un error de control de seguimiento mínimo incluso en el caso de variaciones dinámicas.

Capítulo 4. Diseño de una estrategia de control para robots móviles utilizando técnicas de álgebra lineal (LABC) y estimación neuronal en el seguimiento de trayectorias

4.1. Resumen del Capítulo

En este capítulo se propone un método de control usando técnicas de Álgebra Lineal (LABC) para robots móviles. Debido a la propiedad no holonómica y a la movilidad restringida, el seguimiento de la trayectoria de este sistema ha sido uno de los temas de investigación en los últimos años. Los inconvenientes planteados por el seguimiento de trayectorias usando robots móviles es un tema vigente en la teoría de control, en esta propuesta se presenta el diseño de un controlador de álgebra lineal en combinación con un estimador neuronal. Donde además el robot móvil cuenta con incertidumbres aditivas. Los valores de incertidumbre en cada momento de muestreo se obtienen mediante estimación basada en Redes Neuronales, donde se incluye el diseño de un estimador neuronal del error de modelado junto con la demostración de la convergencia a cero del error de seguimiento. La técnica de control propuesta se valida mediante simulación y resultados experimentales. El controlador de Álgebra Lineal y el estimador neuronal demuestran que se puede utilizar para reducir el efecto de las incertidumbres aditivas en el error de control de seguimiento.

4.2. Cinemática del Robot Móvil

En esta sección se presenta el modelo cinemático de un robot móvil no holonómico (Scaglia et al. (2020) [80]; Yang et al. (2016) [79]; Jung (2012) [76]) indicado en (4-1).

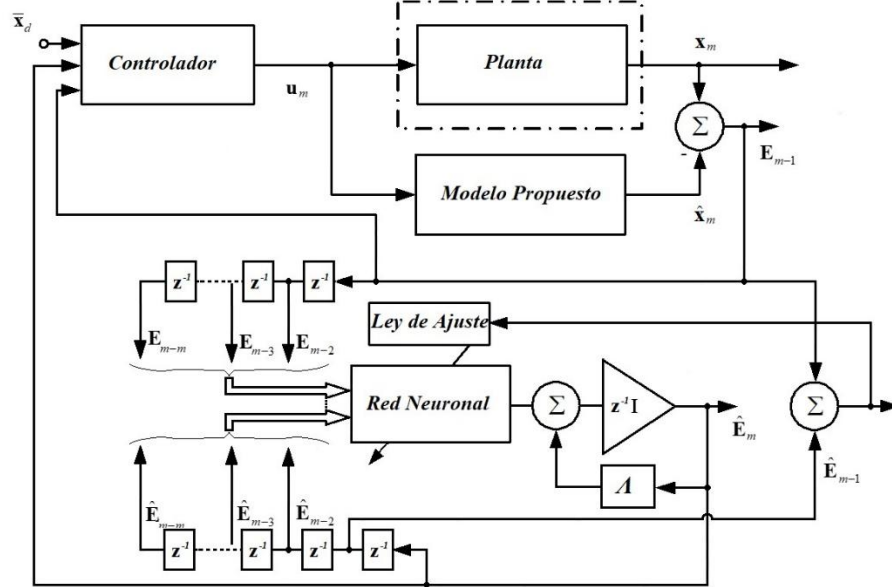


Figura 5.1: Estructura de Control

Este modelo se utilizará para demostrar la viabilidad de la técnica de control propuesta sobre la cinemática del robot móvil.

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_n \cos(\theta) \\ v_n \sin(\theta) \\ \omega_n \end{pmatrix} \quad (4-1)$$

Donde:

v : indica la velocidad lineal del robot móvil,

ω : es la velocidad angular del robot móvil.

(x, y) : representa la posición cartesiana.

θ : es la orientación del robot.

Es importante aclarar que estas variables están indicadas en el dominio continuo.

4.3. Descripción del Problema

Para la obtención de la ley de control que el robot móvil siga fielmente la trayectoria predeterminada (x_d, y_d) , pero para obtener el controlador es necesario discretizar el modelo cinemático (4-1) por el método de Euler, donde se obtiene un conjunto de ecuaciones en tiempo discreto:

$$\chi_{n+1} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ \theta_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n + \tau_s v_n \cos(\theta) \\ y_n + \tau_s v_n \sin(\theta) \\ \theta_n + \tau_s \omega_n \end{pmatrix} = \hat{f}(\chi_n, u_n) \quad (4-2)$$

Donde las variables mencionadas en la ecuación (4-2) son las siguientes:

(x_n, y_n) : representa la posición instantánea del robot en el plano XY en el instante $n\tau_s$.

v_n : representa la velocidad lineal del robot.

ω_n : indica la velocidad angular del robot.

θ_n : es la orientación del robot móvil con respecto al eje X.

n : Es el índice de tiempo discreto. $n \in 1, 2, 3 \dots$

τ_s : representa el período de muestreo.

Si ahora consideramos una planta real de la forma:

$$\chi_{n+1} = f(\chi_n, u_n) \quad (4-3)$$

Entonces la incertidumbre aditiva se puede expresar de la siguiente forma:

$$\mathbf{E}_n = f(\chi_n, u_n) - \hat{f}(\chi_n, u_n) \quad (4-4)$$

Donde:

$\hat{f}(\chi_n, u_n)$: es el modelo no lineal del robot expresado en tiempo discreto.

Si se considera que, χ y u están acotados y f es una función Lipschitz, es posible modelar $\mathbf{E}_n$ como una incertidumbre acotada (Rosales et al. (2019) [26] ; Rossomando et al. (2014)[31]).

Si se incorpora la incertidumbre aditiva en el modelo del sistema (4-3), se puede expresar como:

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ \theta_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ \theta_n \end{pmatrix} + \tau_s \begin{pmatrix} \cos(\theta_n) & 0 \\ \sin(\theta_n) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_n \\ w_n \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{E}_{x,n} \\ \mathbf{E}_{y,n} \\ \mathbf{E}_{\theta,n} \end{pmatrix}}_{\mathbf{E}_n} \quad (4-5)$$

Donde E_n : representa la incertidumbre aditiva. El vector E_n se obtiene de la incertidumbre muestreada en el instante n . Suponiendo que la incertidumbre es una función continua; entonces es posible usar E_n para representar sistemas perturbados, (Sira- Ramírez et al. (2013) [81]; Scaglia et al. (2020) [80]; Sun et al. (2017)[82] and Fareh et al. (2021)[83]). Teniendo en cuenta que E_n es una función continua, entonces es posible aproximarla por la aplicación de redes neuronales Rossomando et al. (2012) [29]. Es importante obtener un valor más aproximado posible de esta incertidumbre para obtener una ley de control con el mínimo error. El desafío de este trabajo es obtener una buena estimación de esta incertidumbre para que el robot siga la trayectoria con mayor fidelidad a la trayectoria deseada. En la siguiente subsección se desarrollará el análisis para implementar un estimador neuronal adaptable para esta clase de incertidumbres.

4.3.1. Estimación Neuronal

De la ec. (4-5) se puede ver que E_n es la incertidumbre en el instante n , pero en realidad nosotros conoceremos esa incertidumbre en el instante $n + 1$. Entonces en el instante n conocemos E_{n-1} , E_{n-2} , E_{n-3} ... y utilizando toda esa información podemos estimar E_n . Así, según la teoría de Redes Neuronales, es posible estimar el valor de la incertidumbre en el momento actual considerando los valores anteriores. A continuación, se propone un enfoque para eliminar la influencia de la incertidumbre aditiva en el error de seguimiento. Uno de los objetivos de este trabajo es estimar la incertidumbre utilizando el vector $\hat{E}_n$ que representa una buena aproximación de E_n , el cual es definido por una red neuronal (4-9); para lograr este objetivo se emplean los valores pasados de E_n (ver Pantano et al. (2017) [84]).

$$\hat{E}_n = \begin{pmatrix} \hat{E}_{x,n} \\ \hat{E}_{y,n} \\ \hat{E}_{\theta,n} \end{pmatrix} \quad (4-6)$$

Definiendo el error de modelado observado como:

$$\tilde{E}_n = E_n - \hat{E}_n \quad (4-7)$$

Donde: $\hat{E}_n \in R^{3 \times 1}$ es el vector de error de modelado estimado por el observador neuronal y $\tilde{E}_n \in R^{3 \times 1}$ es la diferencia de error entre el error real y el error de modelado estimado. El error de modelado se considera como una función no lineal desconocida de los errores de modelado pasados, siendo el principal objetivo de esta sección estimar esta función mediante una red neuronal. Ahora representando (4-6) como función de los pesos neuronales óptimos en una función neuronal

$$E_n = f(E_{n-1}, E_{n-2}, \dots, E_{n-p}) = -\Lambda E_{n-1} + w^{*T} \varphi(\bar{E}) + \varepsilon \quad (4-8)$$

Donde, $\bar{E}$ es un vector de los valores anteriores de salida de E_n , formado por

$\bar{E} = [E_{n-1}, E_{n-2}, \dots, E_{n-p}]^T$ y $w \in R^{3 \times m}$ es una matriz de pesos óptimos y el vector $\varphi \in R^{3 \times 1}$ son los vectores de función de base radial (RBF) vinculados al peso w^* . Y ε es el error de aproximación neuronal. Dado que el vector de estado de salida se ve afectado por las perturbaciones del ruido, es necesario estimar sus valores. Un observador neuronal de estado basado en (4-8) se determina de la siguiente manera:

$$\hat{E}_n = -\Lambda \hat{E}_{n-1} + \hat{w}^T \varphi(\hat{E}) \quad (4-9)$$

Donde Λ es una ganancia matricial y es una matriz diagonal (será $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$), el parámetro $\hat{w}$ es la matriz de ponderación neuronal obtenida de la estimación del error adaptable de aproximación $\hat{f}(\hat{E}, \hat{w})$ y se puede expresar por:

$$\hat{f}(\hat{E}, \hat{w}) = \hat{w}^T \varphi(\hat{E}) \quad (4-10)$$

Donde $\hat{w}_i$ son vectores *i-ésima* fila. La función gaussiana se utiliza como función de activación de cada neurona en el vector RBF φ (capa oculta de (4-9)).

$$\varphi_j(\hat{E}) = \exp\left(-\frac{\|\hat{E} - c_j\|^2}{\mu_j^2}\right) \quad (4-11)$$

donde j es la *j-ésima* neurona de la capa oculta, c_j es la posición central de la *j-ésima* neurona, y μ_j es el factor de dispersión de la función gaussiana, y el regresor utilizado en la función gaussiana es $\hat{E} = [\hat{E}_{n-1}, \dots, \hat{E}_{n-p}, E_{n-1}, \dots, E_{n-p}]^T$. Para ajustar los parámetros neuronales se utiliza una regla de aprendizaje y se define como:

$$\Delta \hat{w}_i = \gamma \tilde{E}_{n,i} \varphi(\hat{E}) \quad (4-12)$$

De acuerdo a lo visto anteriormente y teniendo en cuenta (4-7) en $(n+1)$ y haciendo la diferencia entre (4-8) y (4-9) y sumando y restando el término $w^{*T} \varphi(\hat{E})$, el error de modelado puede ser descrito por:

$$\begin{aligned} \tilde{E}_n &= -\Lambda E_{n-1} + w^{*T} \varphi(\bar{E}_n) + \varepsilon - \left(-\Lambda \hat{E}_{n-1} + \hat{w}^T \varphi(\hat{E})\right) + \dots \\ &+ \left(w^{*T} \varphi(\hat{E}_n) - w^{*T} \varphi(\bar{E}_n)\right) = -\Lambda \tilde{E}_{n-1} + \tilde{w}^T \varphi(\hat{E}) + \bar{\varepsilon} \end{aligned} \quad (4-13)$$

Donde $\bar{\varepsilon} = w^{*T} (\varphi(\bar{E}) - \varphi(\hat{E})) + \varepsilon$ es una función de una diferencia de función gaussiana φ y se puede considerar como un error de aproximación (incluido en $\bar{\varepsilon}$).

Consideración 1: el error de aproximación $\bar{\varepsilon}$ está limitado por una constante $\|\bar{\varepsilon}\| \leq \varepsilon_{max}$. Ahora expresando (4-13) en forma escalar.

$$\tilde{E}_{n-i} = \lambda_i \tilde{E}_{n-1, i} + \tilde{w}_i^T \varphi(\hat{E}) + \bar{\varepsilon}_i \quad (4-14)$$

El índice i denota el *i-ésima* fila de E_n , para la realización de los experimentos se adoptará el valor de 0,1 para las constantes λ_i . Esta ecuación se utilizará para demostrar la estabilidad del estimador y se muestra en el apéndice.

4.3.2. Descripción de la estructura de la red neuronal RBF

Para la implementación del estimador se utilizó una red neuronal del tipo RBF debido a su

capacidad como aproximador universal de funciones (Poggio y Girosi (1990) [85]). Este tipo de redes neuronales utiliza funciones de base radial (gaussianas) como funciones de activación (4-11). Estas redes son especialmente efectivas para la aproximación de funciones no lineales y pueden manejar problemas de alta dimensionalidad sin los problemas de mínimos locales que a menudo afectan a otras arquitecturas de redes neuronales, como el perceptrón multicapa (MLP) (Gómez et al. (2023)[86]). La arquitectura de las RBF es generalmente más simple, compuesta por tres capas: entrada, oculta y salida, como se observa en la figura 4-1 lo que facilita en gran manera su implementación y entrenamiento (Yu et al. (2011)[87]).

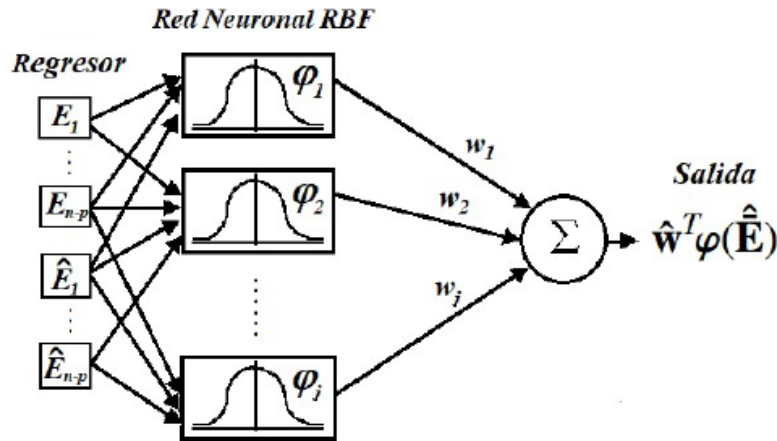


figura 4-1: Estructura de la red neuronal del tipo RBF

Los pesos de la capa de salida están actualizados de forma on-line por la regla de ajuste indicada en la ecuación (4-12), que fue obtenida respetando el criterio de estabilidad de Lyapunov (ver Apéndice). Para la construcción de este estimador se utilizaron cinco neuronas del tipo RBF cuyos resultados se muestran en la Sección 4.5.

4.4. Controlador Propuesto

En esta sección se propone la formalización de la ley de control, donde básicamente es hallar el valor de las variables v_n y ω_n para que el robot móvil realice un seguimiento de trayectoria predeterminada. Las variables estimadas $\hat{x}_n$, $\hat{y}_n$, $\hat{\theta}_n$ obtenidas en (4-13)) representan los valores estimados de las variables x_n , y_n , θ_n y se calculan de acuerdo con (4-15),

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_n \\ \hat{y}_n \\ \hat{\theta}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x}_{n-1} \\ \hat{y}_{n-1} \\ \hat{\theta}_{n-1} \end{pmatrix} + \tau_s \begin{pmatrix} v_{n-1} \cos(\theta_{n-1}) \\ v_{n-1} \sin(\theta_{n-1}) \\ \omega_{n-1} \end{pmatrix} \quad (4-15)$$

Donde $\hat{x}_{n-1}$, $\hat{y}_{n-1}$ y $\hat{\theta}_{n-1}$ corresponden a la posición y orientación del robot en el momento $n-1$, y v_{n-1} y ω_{n-1} corresponden a los valores de las acciones de control calculados en el momento $n-1$. Es fácil demostrar que si $\nabla_m E_n = 0$ y $\hat{E}_n$ se calcula de acuerdo con (4-13) $\Rightarrow E_n = \hat{E}_n$. Incorporando la estimación de incertidumbres $\hat{E}_n$ (calculado por (4-9)), se obtiene:

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ \theta_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ \theta_n \end{pmatrix} + \tau_s \begin{pmatrix} \cos(\theta_n) & 0 \\ \sin(\theta_n) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_n \\ \omega_n \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} \hat{E}_{x,n} \\ \hat{E}_{y,n} \\ \hat{E}_{\theta,n} \end{pmatrix}}_{E_n} \quad (4-16)$$

Una vez calculada la estimación de las incertidumbres y a su vez, la trayectoria deseada x_{dn+1} y y_{dn+1} es conocida, entonces las variables x_{n+1} , y_{n+1} y θ_{n+1} en (4-2) que en su lugar son reemplazadas por x_{dn+1} , y_{dn+1} y $\theta_{ex,n+1}$, respectivamente, donde la variable θ_{ex} es obtenida a partir de (4-25) que representa el ángulo de orientación del robot móvil para que el error de seguimiento tienda a cero (ver Prueba del Teorema 1). De esta forma, para obtener un seguimiento de posición sin discontinuidades, el siguiente estado deseado (x_{dn+1} , y_{dn+1} , $\theta_{ex,n+1}$), no es necesariamente el nuevo valor de estado de referencia ($x_{ref,n+1}$, $y_{ref,n+1}$, $\theta_{ref,n+1}$). Estos nuevos estados son reemplazados asumiendo una aproximación proporcional al error.

$$\begin{pmatrix} x_{dn+1} \\ y_{dn+1} \\ \theta_{dn+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{ref,n+1} - k_v(x_{ref,n} - x_n) \\ y_{ref,n+1} - k_v(y_{ref,n} - y_n) \\ \theta_{ex,n+1} - k_w(\theta_{ex,n} - \theta_n) \end{pmatrix} \quad (4-17)$$

$$e_n = \begin{pmatrix} e_{x,n} \\ e_{y,n} \\ e_{\theta,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{ref,n} - x_n \\ y_{ref,n} - y_n \\ \theta_{ref,n} - \theta_n \end{pmatrix}$$

Se define k_v y k_w como parámetros de diseño de valores positivos menores a uno, ($0 < k_v < 1$) y ($0 < k_w < 1$). Y teniendo en cuenta que:

- si $0 < k_v < 1$, el error debe decrecer, cuya tendencia es llegar a cero paulatinamente.
- si $k_v = 0$, ($x_{d,n+1} = x_{ref,n+1}$), debe alcanzar la trayectoria de referencia en un solo paso;

Por lo tanto, el enfoque propuesto en (4-17) se aplica para obtener una trayectoria sin discontinuidades. De la misma forma se aplica a y_{dn+1} y θ_{dn+1} , entonces definimos a:

$$\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{ref,n+1} - k_v(x_{ref,n} - x_n) - x_n \\ y_{ref,n+1} - k_v(y_{ref,n} - y_n) - y_n \\ \theta_{ex,n+1} - k_w(\theta_{ex,n} - \theta_n) - \theta_n \end{pmatrix} \quad (4-18)$$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \cos(\theta_n) & 0 \\ \sin(\theta_n) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Definición: La diferencia entre la referencia y la trayectoria real se denominará error de seguimiento, y está definida por:

$$\begin{pmatrix} e_{x,n} \\ e_{y,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{ref,n} - x_n \\ y_{ref,n} - y_n \end{pmatrix} \quad (4-19)$$

El error de seguimiento se define de la forma:

$$\|e_n\| = \sqrt{e_{x,n}^2 + e_{y,n}^2} \quad (4-20)$$

El vector indicado por $(x_{n+1} - x_n, y_{n+1} - y_n, \theta_{n+1} - \theta_n)^T$ en (4-16) se sustituye por los elementos correspondientes según a (4-18), y se obtiene el sistema indicado en (4-21)

$$\overbrace{\frac{1}{\tau_s} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta \theta \end{bmatrix} - \hat{\mathbf{E}}_{x,n}}^{\boldsymbol{\rho}} = \overbrace{\boldsymbol{\Gamma} \begin{pmatrix} v_n \\ \omega_n \end{pmatrix}}^{\mathbf{u}} \quad (4-21)$$

El sistema mostrado en la ecuación (4-21) posee tres ecuaciones y dos incógnitas. Y a su vez, las dos primeras filas en (4-21) se encuentran en función de una única variable v_n . Y para que (4-21) posea una solución única, el vector $\boldsymbol{\gamma}$ debe estar contenido en el espacio columnas de $\boldsymbol{\Gamma}$ $C(\boldsymbol{\Gamma})$; de esta forma, $\boldsymbol{\rho}$ debe ser una combinación lineal de las columnas de $\boldsymbol{\Gamma}$. Entonces, (4-22) las constantes reales d_1 y d_2 deben existir.

$$d_1 \begin{pmatrix} \cos(\theta_n) \\ \cos(\theta_n) \\ 0 \end{pmatrix} + d_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta \theta \end{pmatrix} - \hat{\mathbf{E}}_x ; d_1, d_2 \in \mathbb{R} \quad (4-22)$$

Separando las dos primeras filas es posible encontrar la condición a cumplir por orientación θ tal que el sistema (4-22) tiene solución exacta

$$\begin{cases} d_1 \cos(\theta_n) = \Delta x - \hat{E}_{x,n} \\ d_1 \sin(\theta_n) = \Delta y - \hat{E}_{y,n} \end{cases} \quad (4-23)$$

De la ecuación anterior se obtiene la siguiente igualdad,

$$\frac{\sin(\theta_n)}{\cos(\theta_n)} = \frac{\Delta y - \hat{E}_{y,n}}{\Delta x - \hat{E}_{x,n}} \quad (4-24)$$

Utilizando un cálculo auxiliar para obtener las variables ϑy y ϑx que luego serán empleadas para determinar el ángulo de orientación, siendo:

$$\begin{aligned} \vartheta y &= [y_{ref,n+1} - k_v (y_{ref,n} - y_n) - y_n - \hat{E}_{y,n}] \\ \vartheta x &= [x_{ref,n+1} - k_v (x_{ref,n} - x_n) - x_n - \hat{E}_{x,n}] \end{aligned} \quad (4-25)$$

Para obtener una única solución, la dirección $\theta_{ex,n+1}$ debe calcularse de la siguiente forma:

$$\theta_{ex,n+1} = \tan^{-1} \left(\frac{\vartheta y}{\vartheta x} \right) \quad (4-26)$$

donde θ_{ey} representa la orientación necesaria para que el robot móvil alcance y siga la trayectoria de referencia. Como se puede ver en comparación con los controladores de álgebra lineal anteriores (Scaglia et al. (2020)[80]; Scaglia et al., 2014 [36]), el espacio columnas de la matriz $\boldsymbol{\gamma}$ se le agrega el vector de incertidumbres estimadas $\hat{\mathbf{E}}_n$. Con esta nueva consideración, se pretende reducir de manera considerable los efectos indeseados del vector de incertidumbres sobre el error de trayectoria. Con este nuevo cálculo del ángulo de orientación deseado del robot, se alcanzará la trayectoria pre definida de manera correcta.

Para definir la acción de control debe resolverse el sistema definido en (4-21), cuya solución óptima se obtiene aplicando el método de mínimos cuadrados, de la forma:

$$\boldsymbol{\Gamma}^T \boldsymbol{\Gamma} \mathbf{u} = \boldsymbol{\Gamma}^T \boldsymbol{\rho} \quad (4-27)$$

Ahora si consideramos las ecuaciones (4-21), (4-25) y (4-26), la ley de control para el robot móvil se obtiene en (4-28)

$$\begin{cases} x_n = \frac{1}{\tau_s} [(\Delta y - \hat{E}_{y,n}) \sin(\theta_{e\chi,n}) + (\Delta x - \hat{E}_{x,n}) \cos(\theta_{e\chi,n})] \\ \omega_n = \frac{1}{\tau_s} (\Delta \theta - \hat{E}_{\theta,n}) \end{cases} \quad (4-28)$$

Teorema 1: El robot móvil descrito por (4-2) controlado por el enfoque desarrollado anteriormente conduce a un sistema asintótico estable, O sea, los valores de v_n y ω_n representan las acciones de control necesarias para que el error de seguimiento tienda a cero con n tendiendo a infinito. La prueba del *Teorema 1* y la convergencia a cero de los errores de estimación de la red neuronal se muestran en el Apéndice.

4.5. Resultados Experimentales

Para demostrar la viabilidad de implementación del controlador propuesto, se propone que el robot siga diferentes trayectorias circulares de distinto diámetro, las cuales están unidas tangencialmente de tal forma que forman una trayectoria continua. El experimento es similar al realizado por Scaglia et al. (2020)[80]. La posición inicial del robot es el origen del sistema. En la prueba, se supone que existe una perturbación aditiva sobre las velocidades (siendo esta una señal escalón más una senoidal), donde la técnica propuesta deberá mantener fielmente la trayectoria de referencia con el mínimo error de control. En la prueba se utilizará un control LABC sin estimador donde el robot debe seguir las trayectorias con perturbación actuando sobre las velocidades. Posteriormente se realizará la misma prueba con la técnica propuesta en este trabajo (LABC+NN) realizando las comparaciones entre ambos resultados. En la figura 4-2 muestra la trayectoria de referencia y los resultados obtenidos con ambas propuestas. La figura 4-5 presenta las acciones de control sobre el robot y el modelo, las acciones de control sobre el robot se encuentran afectada por una perturbación indeseada (línea continua). En cambio, la que ingresa al modelo no se encuentra afectada perturbación (línea de trazo). Se puede observar que la perturbación actuante en el robot es creciente con el tiempo y afecta de manera significativa la trayectoria seguida durante el experimento. En la figura 4-3 muestra las gráficas del valor de los errores de seguimiento en las coordenadas eje x para ambos controles. De igual manera se muestra el error de seguimiento en las coordenadas eje y (figura 4-4). Es posible apreciar que ambos errores permanecen acotados y cercanos a cero cuando el robot alcanza la trayectoria de referencia, donde la propuesta LABC+NN obtiene el menor error. De igual manera este resultado se ve reflejado en la figura 4-6 donde se observa que el error acumulado se reduce drásticamente al emplear la técnica LABC con estimador neuronal en comparación con el método LABC clásico. En este caso se observa claramente el efecto de las incertidumbres en el error. Pero, el menor error se obtuvo por la combinación LABC y estimador neuronal propuesto en este trabajo, siendo el menos afectado por la perturbación aditiva y las posibles incertidumbres. También es más eficaz en el rechazo de perturbaciones y no produce error constante causado por ruido en los sensores o perturbaciones de todo tipo. Además, el controlador clásico es vulnerable a las variaciones de velocidad y a las posibles incertidumbres.

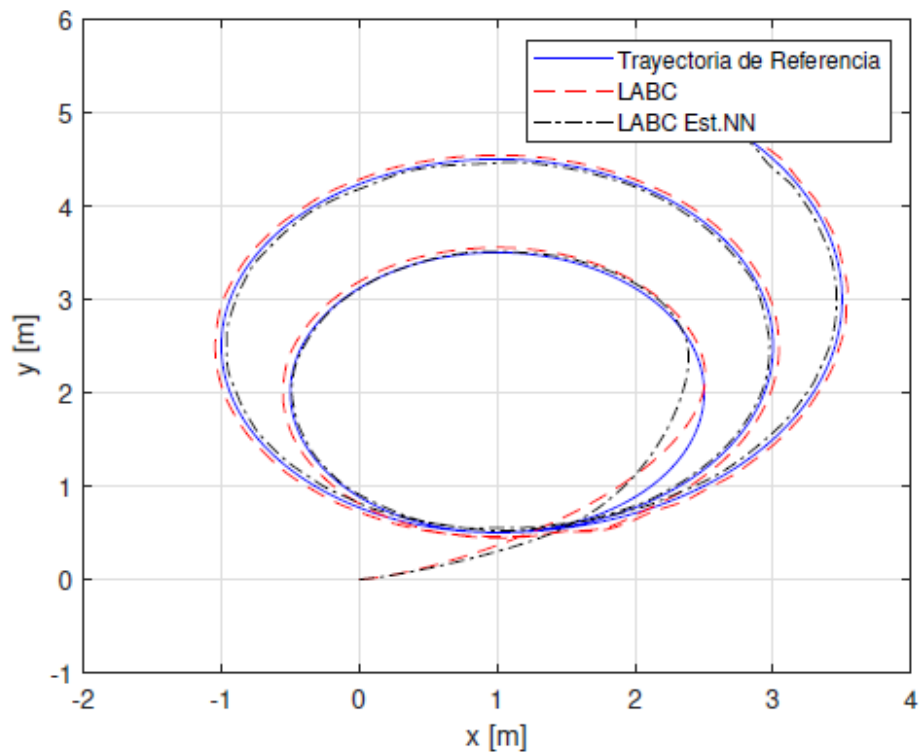


figura 4-2: Trayectorias seguidas por el robot, línea de trazo indica el uso del controlador LABC, línea de trazo y punto uso de control LABC con estimador neuronal.

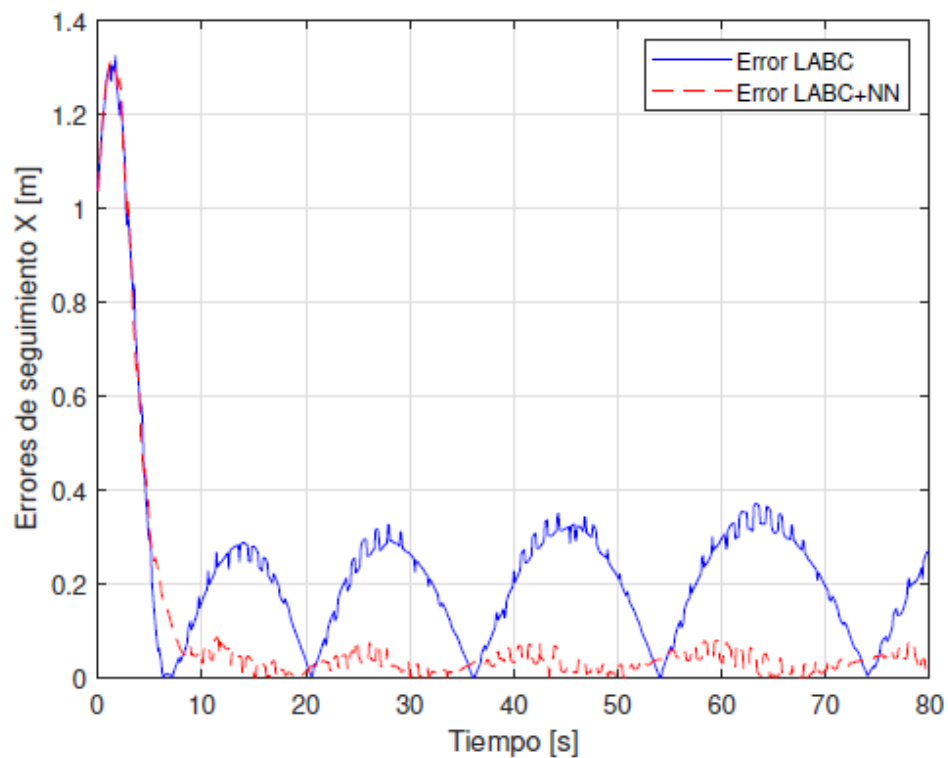


figura 4-3:Error de trayectoria en la dirección del eje x, donde la línea continua indica el resultado del controlador LABC sin estimador, línea de trazo indica control LABC con estimador neuronal

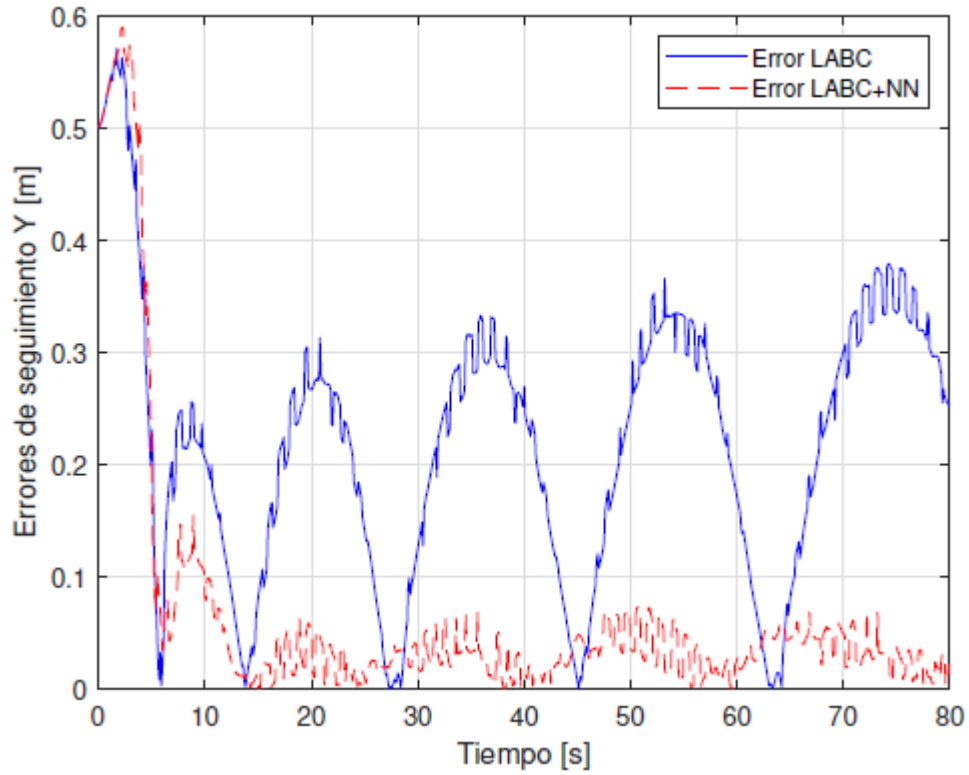


figura 4-4: Error en la dirección del eje y, donde la línea continua indica el resultado del controlador LABC sin estimador, línea de trazo indica control LABC con estimador neuronal

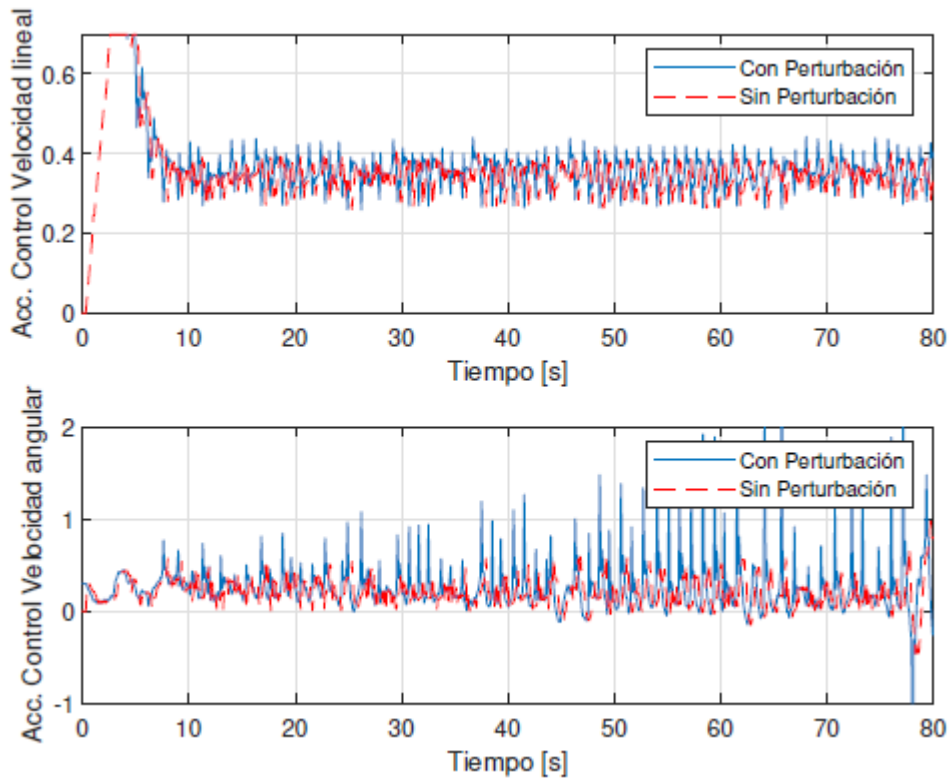


figura 4-5: Acciones de Control, con perturbación (línea continua) y sin perturbación (línea de trazo)

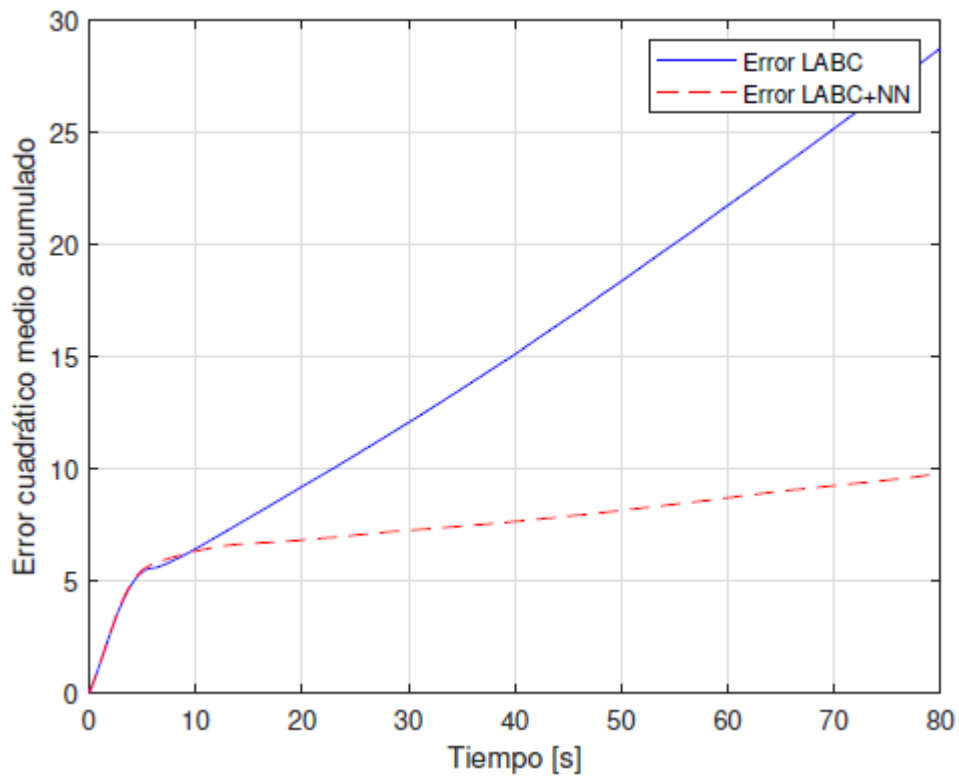


figura 4-6:Error Acumulado durante el experimento, donde la línea de continua indica el uso del controlador LABC sin estimador, línea de trazo respuesta de control LABC con estimador neuronal

La técnica de control desarrollada en este trabajo, para un sistema robótico no lineal, no se necesita conocer las perturbaciones actuantes o el nivel de ruido en la odometría. Además, se sabe que una representación matemática de un modelo cinemático no describe con precisión el comportamiento real. Los efectos de estas no linealidades e incertidumbres, junto con las variaciones en el sensado del robot demuestran la robustez de la propuesta empleada. Esta técnica de control inteligente puede ser considerada como una solución general para el control de sistemas no lineales y, en particular, para el caso de sistemas robóticos o cuando se necesita realizar seguimiento de trayectoria en entornos desconocidos. Este campo de investigación en control de robots sigue abierta a las cuestiones de modelado, la estabilidad matemática, la convergencia y el análisis de robustez de sistemas que continúan avanzando para la obtención de técnicas de control cada vez más precisas.

4.6. Observaciones finales

En este trabajo se desarrolló una metodología basada en métodos numéricos y álgebra lineal para la creación de algoritmos de control destinados a robots móviles. Esta metodología se aplica especialmente en situaciones donde el sistema está representado por un modelo no lineal multivariable y presenta incertidumbre aditiva. Además, se ha introducido una red neuronal de estimación, que se ajusta en base a la hipótesis de variación de E_n . La estimación $\hat{E}_n$ se auto ajusta considerando los valores pasados de E_n lo cual reduce la influencia del error de modelado en el error de seguimiento. El enfoque presentado reduce el efecto de las perturbaciones y los errores de modelado en el error de seguimiento independientemente de la

complejidad del controlador y de las perturbaciones actuantes en el robot. Estos resultados muestran que el error de seguimiento disminuye cuando se realiza una buena estimación de $\hat{E}_n$. En comparación con otras leyes de control publicadas anteriormente (Blazic (2011) [75]; Damodaran et al. (2017) [77]; Farooq et al. (2014) [88]; Gu y Hu (2002) [89]; Lee et al. (2009) [90]; Park et al. (2016) [91]; Wang (2012) [102]; Ye (2008b)[93]) El controlador propuesto ofrece la ventaja de ser sencillo de diseñar y es altamente factible de implementar en aplicaciones prácticas. Así, el algoritmo se puede implementar directamente en el microcontrolador del robot sin necesidad de implementarlo en una computadora externa, ya que los cálculos son simples de realizar. Además, el método propuesto aquí no necesita una transformación del modelo en comparación con Blazic (2011) [75].

Además, nuestro enfoque no necesita desarrollar el modelo cinemático incierto analítico en comparación con la metodología propuesta en Das y Kar (2006) [94] and Martins et al. (2008) [70]. Las características mencionadas hacen que la metodología propuesta se pueda aplicar a muchos sistemas no lineales, convirtiéndola en una técnica prometedora para su aplicación en varios sistemas de la industria.

Capítulo 5. Control Adaptable usando técnicas de supertwisting en un cuadricóptero para seguimiento de trayectorias

5.1. Resumen del Capítulo

En este capítulo se presenta una metodología novedosa para diseñar un controlador robusto y adaptable para vehículos aéreos. La arquitectura de control integra el algoritmo supertwisting (STA) con un controlador adaptativo.

El algoritmo supertwisting (STA) resuelve el problema más importante del efecto chattering que se encuentra generalmente en el control deslizante. El controlador adaptable actualiza los parámetros del controlador en línea para reducir los errores de control. La sinergia entre ambos esquemas proporciona un excelente rendimiento al tiempo que reduce el chattering. El artículo presenta un análisis de estabilidad utilizando la teoría de Lyapunov, que demuestra la estabilidad del sistema de lazo cerrado. El esquema propuesto fue validado experimentalmente. Los resultados confirman la efectividad del enfoque propuesto y verifican la estabilidad del sistema de control y la ley de adaptación usando la técnica de control propuesta.

5.2. Diseño del controlador

En esta sección, presentamos la principal contribución de este artículo, introduciendo un novedoso controlador diseñado para controlar un cuadricóptero durante tareas de seguimiento de trayectoria.

Este diseño se basa en un modelo matemático para vehículos aéreos multirrotor propuesto originalmente en [95] y detallado en [120], [105]. El supuesto subyacente en este modelo es que el dron emplea un sistema de estabilización interno que mantiene su equilibrio de acuerdo con los comandos del usuario.

Los pilotos automáticos o sistemas de control interno generalmente consisten en una malla de controladores PID con varias configuraciones, que permiten obtener los valores finales de voltaje para cada rotor que estabilizan al robot en las referencias enviadas. Además, se asume que la navegación no implicará maniobras agresivas. Por lo tanto, se supone que los ángulos de cabeceo (ϕ) y alabeo (θ) son ≈ 0 . Los autores prueban esta hipótesis en sus trabajos. En consecuencia, solo el ángulo de guiñada (ψ) se considera en el diseño y análisis del controlador. Esta simplificación se alinea con los parámetros operativos de muchos drones de consumo, facilitando una estrategia de control robusta pero eficiente. Un ejemplo de ello es el Bebop 2 de Parrot, el cuadricóptero utilizado en nuestros experimentos (véase la figura 5-1).

$$\ddot{x}^w = RK_u u - K_v \dot{x}^w + \delta(t) \quad (5-1)$$

El término $\delta(t)$ incluye las perturbaciones externas, las incertidumbres paramétricas y la dinámica no modelada. Además, la matriz de rotación que relaciona el marco móvil con el marco inercial, que resulta,

$$R = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 & 0 \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5-2)$$

vector $x^w = [x^w, y^w, z^w, \psi^w]$ son los cuatro grados de libertad relacionados con el marco inercial w . Además, $u = [u_x, u_y, u_z, u_\psi]$ son las señales de control normalizadas $u \in [0,1]$. La

matriz R es la matriz de rotación. Los parámetros dinámicos del modelo se consideran agrupados en las matrices diagonales positivas no singulares $K_u = \text{diag}[k_{u1}, k_{u2}, k_{u3}, k_{u4}]$ y $K_v = \text{diag}[k_{v1}, k_{v2}, k_{v3}, k_{v4}]$. Es importante destacar que, si bien el modelo 1 es una representación simplificada de un cuadricóptero real, sirve como base para el desarrollo del controlador.

Sin embargo, el controlador propuesto puede ser utilizado para controlar cualquier vehículo real, y esto se valida en la sección de experimentación donde se utiliza un cuadricóptero Bebop 2 de la empresa Parrot.

El controlador propuesto combina un algoritmo de Super-Twisting (STA) con un controlador adaptativo (AC), lo que les permite trabajar juntos para mejorar el control. El control de modo deslizante (SMC) es conocido por su robustez; sin embargo, tiene el inconveniente del fenómeno de vibración causado por el término discontinuo en su ley de control.

El algoritmo Super-Twisting es un término de modo deslizante de segundo orden que reduce el fenómeno de chattering. Sin embargo, para minimizar los errores de control, se deben aumentar las ganancias en el diseño del controlador, lo que puede empeorar las acciones de control, lo que genera vibración y ruido de alta frecuencia. Por lo tanto, este documento propone un nuevo controlador adaptativo basado en la teoría de Lyapunov, que opera en conjunto con el algoritmo de Super-Twisting (STA). El controlador adaptativo modifica los parámetros del modelo empleados en la estrategia de control para mejorar el rendimiento del sistema de bucle cerrado. La figura 5-2 muestra el sistema de control. El análisis comienza con el modelo matemático (5-1). Se supone que es una función de Lipschitz y los errores de control se definen de la siguiente manera:

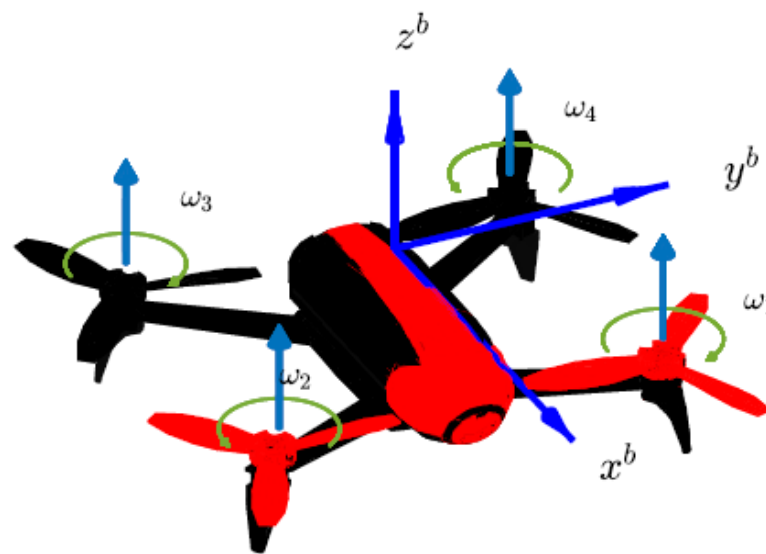


figura 5-1: El Bebop 2 de Parrot Company, su estructura y la dirección de rotación de cada hélice.

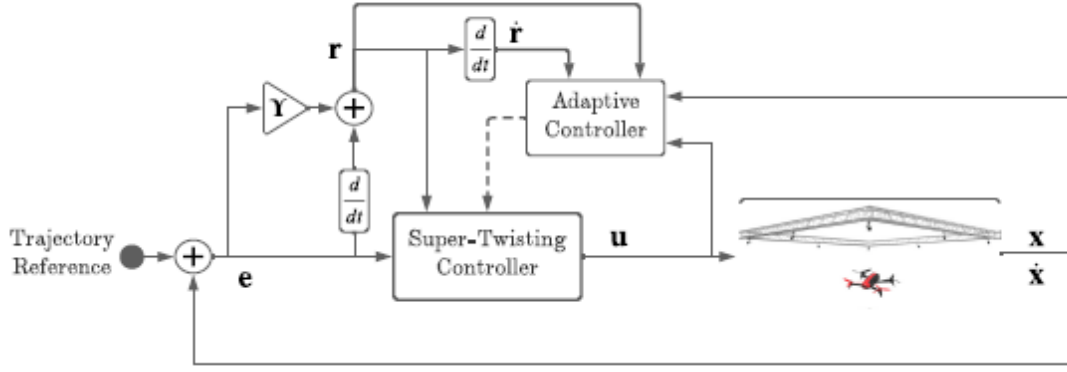


figura 5-2: Esquema completo del sistema de control.

$$e = x^w - x_{ref}^w \quad (5-3)$$

La superficie de deslizamiento se define a continuación considerando los errores de control.

$$\sigma = \text{diag} \left[\left(\gamma_1 + \frac{d}{dt} \right), \dots, \left(\gamma_4 + \frac{d}{dt} \right) \right] e = \gamma e + \dot{e} \quad (5-4)$$

es una matriz diagonal y positiva con $v_i > 0$. Entonces la derivada temporal de (4-4) conduce a:

$$\dot{\sigma} = \ddot{e} + \gamma \dot{e} \quad (5-5)$$

A continuación, se sustituye (4-3) y (4-4) en (4-5).

$$\ddot{x}^w = \dot{\sigma} - \gamma (\sigma - \gamma e) + \ddot{x}_{ref}^w = -K_v \dot{x}^w + RK_u u + \delta(t) \quad (5-6)$$

Por lo tanto, $\dot{\sigma}$ se puede obtener de (4-6) y los resultados

$$\dot{\sigma} = -K_v \dot{x}^w + RK_u u + \delta(t) + \gamma \sigma - \gamma^2 e - \ddot{x}_{ref}^w \quad (5-7)$$

Cabe señalar que las matrices K_u y K_v dependen de parámetros dinámicos y aerodinámicos, algunos de los cuales son desconocidos y pueden variar durante el experimento. Por lo tanto, en el controlador se utilizan valores estimados para las matrices $\hat{K}_u$ y $\hat{K}_v$. Con base en (4-7) se propone el siguiente controlador para un vehículo aéreo multirotor en una tarea de seguimiento de trayectoria,

$$u = (R\hat{K}_u)^{-1} (\hat{K}_u \dot{x}^w + \ddot{x}_{ref}^w + \gamma^2 e - 2\gamma \sigma) \quad (5-8)$$

El algoritmo de Super-Twisting (STA) es un algoritmo de modo deslizante de segundo orden presentado en [96], y se ha utilizado en aplicaciones de robótica aérea [97][98][99]. En comparación con un controlador de modo deslizante de primer orden, el algoritmo de Super-Twisting (STA) produce una señal de control continua, que es preferible para muchas aplicaciones [100].

Se propone el siguiente STA para lograr el objetivo de control.

$$\begin{cases} u_{sw} = -h_1 \sqrt{\|\sigma\|} \frac{\sigma}{\|\sigma\|} + v \\ \dot{v} = -h_2 \frac{\sigma}{\|\sigma\|} \end{cases} \quad (5-9)$$

donde h_1 y h_2 son números positivos cuyos valores son parámetros de diseño.

$$\begin{cases} u = (R\hat{K}_u)^{-1} \left(-2 \gamma \sigma + \hat{K}_u \dot{x}^w + \ddot{x}_{ref}^w + \gamma^2 e - h_1 \sqrt{\|\sigma\|} \frac{\sigma}{\|\sigma\|} + v \right) \\ \dot{v} = -h_2 \frac{\sigma}{\|\sigma\|} \end{cases} \quad (5-10)$$

Para cerrar el lazo de control, es necesario operar en (4-7) sumando y restando $(R\hat{K}_u)u$.

$$\dot{\sigma} = -K_v \dot{x}^w + RK_u u - R\hat{K}_u u + \delta(t) + \gamma \sigma - \gamma^2 e - \ddot{x}_{ref}^w \quad (5-11)$$

Además, reemplazando la ecuación (4-10) en (4-11), el resultado es un lazo de control cerrado,

$$\begin{cases} \dot{\sigma} = \gamma \sigma + \delta(t) - h_1 \sqrt{\|\sigma\|} \frac{\sigma}{\|\sigma\|} + v - (K_v - \hat{K}_v) \dot{x}^w + R (K_u - \hat{K}_u) u \\ \dot{v} = -h_2 \frac{\sigma}{\|\sigma\|} \end{cases} \quad (5-12)$$

Recordando $\tilde{K}_v = K_v - \hat{K}_v$, $\tilde{K}_u = K_u - \hat{K}_u$ y reemplazando en (4-12)

$$\begin{cases} \dot{\sigma} = -\gamma \sigma - h_1 \sqrt{\|\sigma\|} \frac{\sigma}{\|\sigma\|} + v - \tilde{K}_v \dot{x}^w + R \tilde{K}_u u + \delta(t) \\ \dot{v} = -h_2 \frac{\sigma}{\|\sigma\|} \end{cases} \quad (5-13)$$

La ecuación anterior define la superficie de deslizamiento de acuerdo con la acción de control propuesta. Además, esta superficie depende de los errores paramétricos del modelo, que proporcionan la base para la ley de control adaptativo que se analiza en la sección siguiente.

5.3. Análisis de estabilidad y reglas de ajuste adaptable

En la sección anterior se mostró el diseño del STA. En esta sección se realizará el análisis de estabilidad del sistema de control utilizando la teoría de Lyapunov para sistemas no lineales.

Teorema 1: El sistema de lazo cerrado, tal como se define en (4-13), exhibe estabilidad asintótica cuando se rige por la ley de control dada en (4-10).

Demostración: Primero, se propone la siguiente candidata a función de Lyapunov (LFC).

$$\mathcal{L} = h_2 \|\sigma\| + \frac{1}{2} v^T v + \frac{1}{2b_v} \text{tr} (\tilde{K}_v \tilde{K}_v^T) + \frac{1}{2b_u} \text{tr} (\tilde{K}_u \tilde{K}_u^T) \quad (5-14)$$

Los parámetros b_v y b_u son constantes y $0 < b_v$; $b_u < 1$. Para el análisis del sistema, se toma la derivada temporal de la función candidata de Lyapunov (4-14).

$$\dot{\mathcal{L}} = h_2 \frac{d\|\sigma\|}{dt} + v^T \dot{v} + \frac{1}{b_v} \text{tr} (\tilde{K}_v \dot{\tilde{K}}_v^T) + \frac{1}{b_u} \text{tr} (\tilde{K}_u \dot{\tilde{K}}_u^T) \quad (5-15)$$

La aplicación de la regla de la cadena se realiza de la siguiente manera

$$\frac{d\|\sigma\|}{dt} = \frac{\partial\|\sigma\|}{\partial\sigma} \frac{\partial\sigma}{\partial t} = \frac{\partial^T}{\|\sigma\|} \dot{\sigma} \quad (5-16)$$

Resultados de la ecuación (4-15)

$$\dot{\mathcal{L}} = h_2 \frac{\sigma^T}{\|\sigma\|} \dot{\sigma} + v^T \dot{v} + \frac{1}{b_v} \text{tr} \left(\tilde{K}_v \dot{\tilde{K}}_v^T \right) + \frac{1}{b_u} \text{tr} \left(\tilde{K}_u \dot{\tilde{K}}_u^T \right) \quad (5-17)$$

Entonces la ecuación (4-13) es reemplazada en (4-16)

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{L}} = & h_2 \frac{\sigma^T}{\|\sigma\|} \left(-\gamma \sigma - h_1 \sqrt{\|\sigma\|} \frac{\sigma}{\|\sigma\|} + v - \tilde{K}_v \dot{x}^w + \tilde{K}_u u + \delta(t) \right) + \dots \\ & + v^T \left(-h_2 \frac{\sigma}{\|\sigma\|} \right) + \frac{1}{b_v} \text{tr} \left(\tilde{K}_v \dot{\tilde{K}}_v^T \right) + \frac{1}{b_u} \text{tr} \left(\tilde{K}_u \dot{\tilde{K}}_u^T \right) \end{aligned} \quad (5-18)$$

Aplicando la propiedad distributiva

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{L}} = & \left(h_2 \frac{\sigma^T}{\|\sigma\|} \gamma \sigma - h_1 h_2 \sqrt{\|\sigma\|} + h_2 \frac{\sigma^T}{\|\sigma\|} v - h_2 \frac{\sigma^T}{\|\sigma\|} \tilde{K}_v \dot{x}^w + \dots \right. \\ & \left. + h_2 \frac{\sigma^T}{\|\sigma\|} R \tilde{K}_u u + h_2 \frac{\sigma^T}{\|\sigma\|} \delta \right) - \dots \\ & - h_2 v^T \frac{\sigma}{\|\sigma\|} + \frac{1}{b_v} \text{tr} \left(\tilde{K}_v \dot{\tilde{K}}_v^T \right) + \frac{1}{b_u} \text{tr} \left(\tilde{K}_u \dot{\tilde{K}}_u^T \right) \end{aligned} \quad (5-19)$$

Teniendo en cuenta que $h_2 \frac{\sigma^T}{\|\sigma\|} v = h_2 v^T \frac{\sigma}{\|\sigma\|}$. Además, en la ecuación (4-19) se utiliza la propiedad cíclica del operador de traza.

$$\begin{aligned} \frac{\sigma^T}{\|\sigma\|} \tilde{K}_v \dot{x}^w &= \text{tr} \left(\frac{\sigma^T}{\|\sigma\|} \tilde{K}_v \dot{x}^w \right) = \text{tr} \left(\tilde{K}_v \dot{x}^w \frac{\sigma^T}{\|\sigma\|} \right) \\ \frac{\sigma^T}{\|\sigma\|} R \tilde{K}_u u &= \text{tr} \left(\frac{\sigma^T}{\|\sigma\|} R \tilde{K}_u u \right) = \text{tr} \left(\tilde{K}_u u \frac{\sigma^T}{\|\sigma\|} R \right) \end{aligned} \quad (5-20)$$

y reemplazando (4-20) en (4-19),

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{L}} = & -h_2 \frac{\sigma^T}{\|\sigma\|} \gamma \sigma - h_1 h_2 \sqrt{\|\sigma\|} + h_2 \frac{\sigma^T}{\|\sigma\|} \delta + \dots \\ & + \text{tr} \left(\tilde{K}_u \left[h_2 u \frac{\sigma^T}{\|\sigma\|} R + \frac{1}{b_2} \dot{\tilde{K}}_u^T \right] \right) + \dots \\ & + \text{tr} \left(\tilde{K}_v \left[-h_2 \dot{x}^w \text{sign}(\sigma^T) + \frac{1}{b_3} \dot{\tilde{K}}_v^T \right] \right) \end{aligned} \quad (5-21)$$

Con base en la ecuación anterior, los siguientes términos $\tilde{K}_v$ y $\tilde{K}_u$ son definidos como:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{K}}_u &= -b_u h_2 R^T \frac{\sigma}{\|\sigma\|} u^T \\ \dot{\tilde{K}}_v &= b_v h_2 \frac{\sigma}{\|\sigma\|} (\dot{x}^w)^T\end{aligned}\quad (5-22)$$

Se supone que los valores óptimos de K_u^* y K_v^* son constantes. Por lo tanto $\dot{\tilde{K}}_v$ y $\dot{\tilde{K}}_u$ son dados por,

$$\begin{aligned}\dot{\hat{K}}_u &= -b_u h_2 R^T \frac{\sigma}{\|\sigma\|} u^T \\ \dot{\hat{K}}_v &= b_v h_2 \frac{\sigma}{\|\sigma\|} (\dot{x}^w)^T\end{aligned}\quad (5-23)$$

Las ecuaciones (4-23) son las leyes de adaptación de parámetros del controlador adaptativo. Reemplazando las ecuaciones anteriores en (4-21), se obtiene:

$$\dot{\mathcal{L}} = -h_2 \frac{\sigma^T}{\|\sigma\|} \Upsilon |\sigma| - h_1 h_2 \sqrt{\|\sigma\|} + h_2 \frac{\sigma^T}{\|\sigma\|} \delta \quad (5-24)$$

Por hipótesis la función δ está acotada, por lo tanto, $\|\delta\| \leq \delta_0$. La ecuación (5-24) es semidefinida negativa si $h_1 \sqrt{\|\sigma\|} \geq \|\delta\|$. Por lo tanto, $h_1 \geq \frac{\delta_0}{\sqrt{\|\sigma\|}}$ garantiza la estabilidad del controlador propuesto y σ , v , $\dot{\tilde{K}}_v$ y $\dot{\tilde{K}}_u$ son encerradas. A continuación, integrando (5-24) sobre el intervalo de tiempo $[0, T]$ se obtiene:

$$\mathcal{L}(T) - \mathcal{L}(0) = \int_0^T -h_2 \frac{\sigma^T}{\|\sigma\|} \Upsilon |\sigma| dt \quad (5-25)$$

$\mathcal{L}(T) > 0$ porque $\mathcal{L}$ es un LCF y descuidando este término la ecuación anterior se convierte en

$$\mathcal{L}(0) \geq \int_0^T -h_2 \frac{\sigma^T}{\|\sigma\|} \Upsilon |\sigma| d\tau \quad (5-26)$$

Porque Υ es una matriz diagonal positiva cuyos valores propios mínimo y máximo son $\lambda_{\min}$ y $\lambda_{\max}$, respectivamente. Por lo tanto,

$$\lambda_{\min}(\Upsilon) \|\sigma\|^2 \leq \sigma^T \Upsilon \sigma \leq \lambda_{\max}(\Upsilon) \|\sigma\|^2 \quad (5-27)$$

A partir de la ecuación anterior, se calcula la siguiente desigualdad

$$\int_0^T \sqrt{\|\sigma\|} dt \leq \frac{\mathcal{L}(0)}{h_2 \lambda_{\min}(\Upsilon)}, \forall T \quad (5-28)$$

Como la dinámica del error del cuadricóptero no es autónoma, se utiliza el lema de Barbalat [101] para demostrar la estabilidad asintótica. Primero, la ecuación anterior es independiente de T , y tomando $T \rightarrow \infty$ resulta $\sigma \in L^1$. Previamente se demostró que σ , v y $\tilde{K}_u$ son acotados.

Luego, es necesario demostrar que $\dot{\sigma}$ es acotado, lo que significa $\dot{\sigma} \in L^\infty$. Por lo tanto, de (5-17) solo queda analizar $\dot{x}^w$ y u . Las acciones de control se describen en (4-10) queda ver qué sucede con e , $\dot{x}^w$ y las referencias de trayectoria. Por hipótesis, la referencia y sus derivadas son continuas y acotadas. Dado que es acotado y analizando la ecuación (4-3), se demuestra que es físicamente imposible que el error de posición crezca positivamente, y al mismo tiempo, que el error de velocidad crezca negativamente. Por lo tanto, e también está acotado. En conclusión, $\sigma \in L^1$ y $\sigma \in L^\infty$, y por el lema de Barbalat $\sigma \rightarrow 0$ con $t \rightarrow \infty$. Al utilizar el análisis realizado anteriormente, esto implica que e y $\dot{e}$ tienden a 0 con $t \rightarrow \infty$.

5.4. Resultados experimentales

El controlador propuesto fue validado a través de experimentos en el mundo real. La configuración experimental se ilustra en la figura 5-3, que proporciona una descripción general de cómo se interconectan los componentes para evaluar el rendimiento del controlador propuesto en condiciones realistas. La configuración incluye un cuadricóptero Bebop 2 de Parrot. El algoritmo de control se ejecuta en una estación externa a una frecuencia de 30 Hz, mientras que las poses y velocidades del Bebop 2 se registran a 200 Hz utilizando un sistema de captura de movimiento OptiTrack equipado con ocho cámaras.

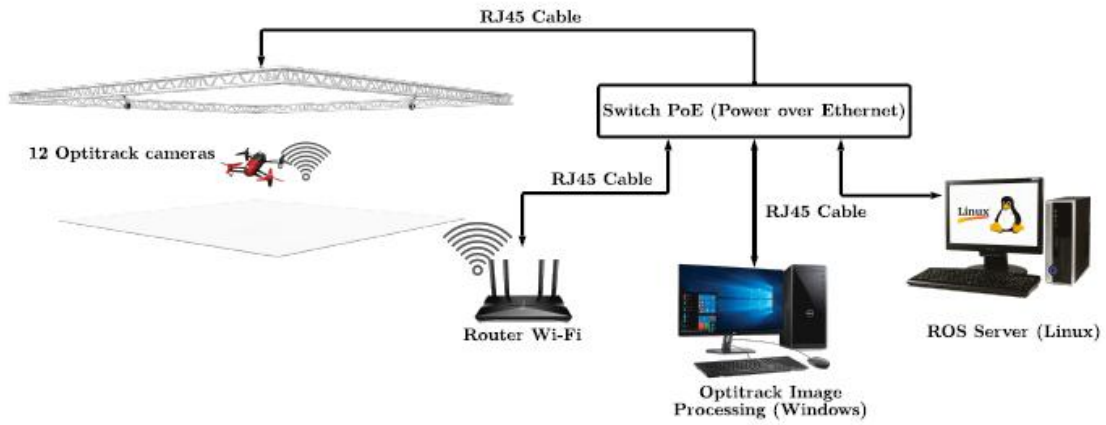


figura 5-3: Diagrama esquemático y conexión de los equipos utilizados en los experimentos.

Estas variables se fusionan con los sensores internos del Bebop 2 para estimar la posición y la velocidad de todos los grados de libertad. Las acciones de control se comunican a través del Sistema Operativo Robótico (ROS). Se supone que los parámetros del vehículo son desconocidos; por lo tanto, en todos los experimentos, las matrices se inicializan con valores arbitrarios, $\hat{K}_u = [1; 1; 1; 1]^T$ y $\hat{K}_v = [0.5, 0.5, 0.5, 0.5]^T$. La trayectoria de referencia para todos los experimentos fue un círculo con un radio de 1 metro a una altura constante de 1 metro. El ángulo de guiñada se definió como tangente a la trayectoria. Un video de los experimentos está disponible en <https://youtu.be/Ne7tuhNf9bA>.

Inicialmente, solo se utilizó el controlador Super-Twisting (STA) para realizar la tarea de seguimiento de trayectoria. El controlador se calibró con valores de ganancia pequeños, específicamente $\gamma = [0.55, 0.55, 0.5, 0.5]^T$, $h_1 = 0.0075$ y $h_2 = 0.005$. El objetivo era analizar el comportamiento del sistema sin el componente adaptivo y evaluar los valores de error de control. Como se esperaba, el controlador fue capaz de estabilizar el vehículo, pero los errores de control fueron sustanciales, aunque acotados. En la figura 5-4, se muestra el comportamiento de cada variable. Se puede observar que el dron intenta seguir las trayectorias de referencia, aunque con notables errores de control.

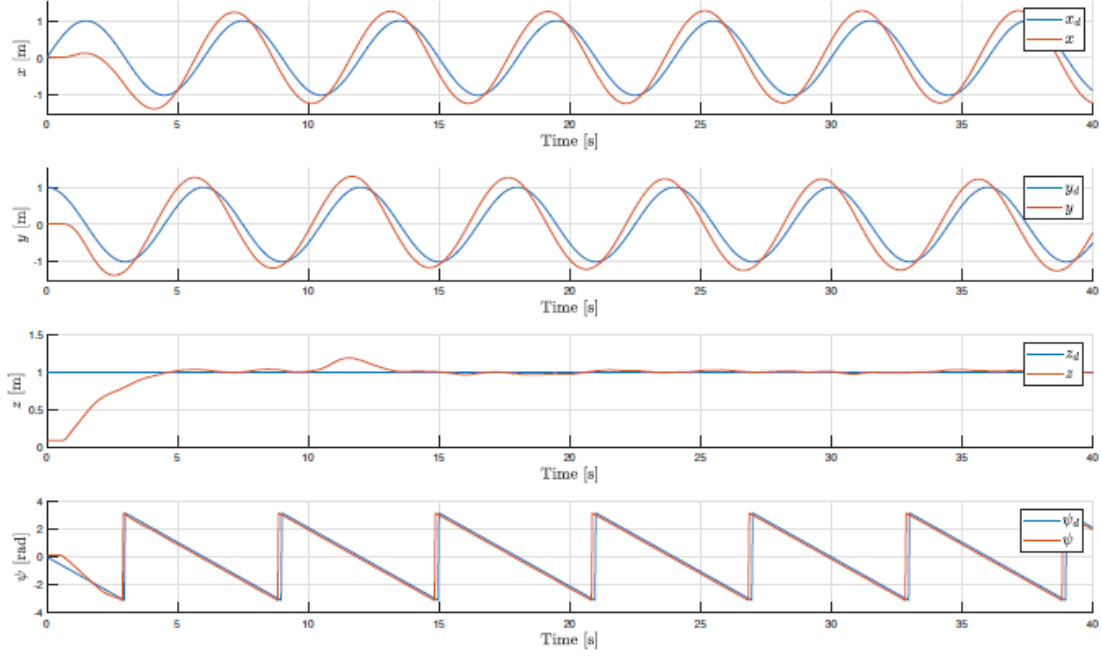


figura 5-4: Evolución temporal de la posición del cuadricóptero y su ángulo de guiñada durante el experimento. Se utilizó únicamente un controlador de modo deslizante de supertwisting sin calibración y con incertidumbres paramétricas.

A continuación, se utilizó la misma configuración del controlador STA y los mismos valores de ganancia, pero esta vez se incluyó el controlador adaptativo en la arquitectura de control. El objetivo era evaluar el impacto de la integración de ambos controladores en el rendimiento del sistema de lazo cerrado. El controlador adaptable fue diseñado para ajustar continuamente los parámetros del controlador durante la operación, mejorando así el manejo de los errores de control. Este enfoque colaborativo de ambos sistemas de control tenía como objetivo mejorar el seguimiento de la trayectoria de referencia. En esta configuración específica, el controlador adaptativo utilizó factores de ajuste de $b_v = 0.05$ y $b_v = 0.075$. En la figura 5-5, se muestra la evolución de cada una de las variables de control. El inicio de ambos experimentos es casi el mismo porque las condiciones iniciales son las mismas. Sin embargo, a medida que se realiza la tarea, el rendimiento mejora sustancialmente. Esto se debe a que el algoritmo ajusta los valores de los parámetros $\hat{K}_u$ y $\hat{K}_v$ para reducir los errores de control.

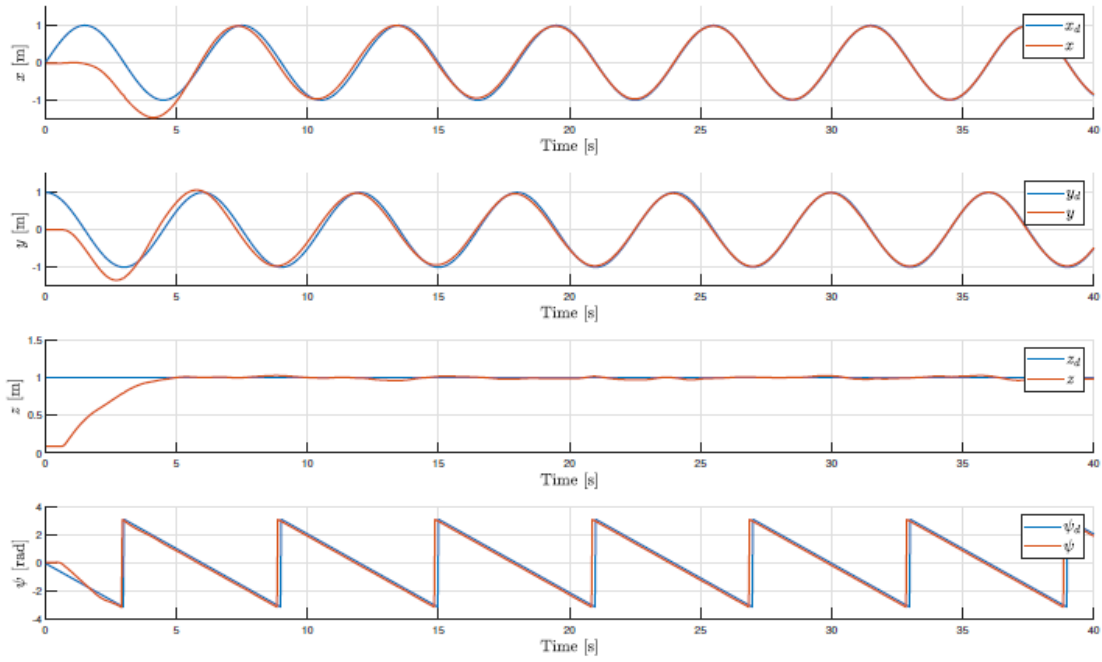


figura 5-5: Evolución de la posición y el ángulo de guiñada del Bebop 2 para el controlador Super-Twisting con control adaptativo. El rendimiento mejora durante la tarea debido a la adaptación de los parámetros del controlador.

La figura 5-6 ilustra la evolución de los valores de los parámetros del controlador. Los valores se mantienen estables sin divergir, por lo que se demostró experimentalmente para lo que previamente se había demostrado analíticamente en el análisis de estabilidad de que la ley de adaptación (5-22) es estable. Los resultados de estos dos experimentos confirman la hipótesis de que la integración de un controlador STA con un controlador adaptativo da como resultado un sistema de lazo cerrado robusto, que ofrece un alto rendimiento incluso frente a incertidumbres paramétricas y de modelado. La sinergia entre estos dos controladores conduce a una mejora sustancial en el rendimiento general del sistema.

Sin embargo, es pertinente analizar si es posible lograr una respuesta similar en términos de errores de control utilizando solo el STA sin control adaptable. Para investigar esto, se realizaron varias pruebas para ajustar las ganancias del controlador, y se determinó que los valores $\gamma = [1.2, 1.2, 0.05, 0.05]^T$, $h_1 = 0.095$ y $h_2 = 0.075$ lograron un desempeño comparable. La figura 5-7 muestra la norma cuadrática de la suma de los errores de control para los tres experimentos analizados. Los resultados indican que los errores del controlador STA con los valores de ganancia ajustados son comparables a los del sistema STA con control adaptativo. Sin embargo, al examinar las acciones de control en la figura 5-8, queda claro que la mayor ganancia conduce a un mayor parloteo. Este hallazgo subraya la importancia de utilizar el esquema adaptativo para mejorar el desempeño del sistema de control y lograr una acción de control más suave y menos ruidosa.

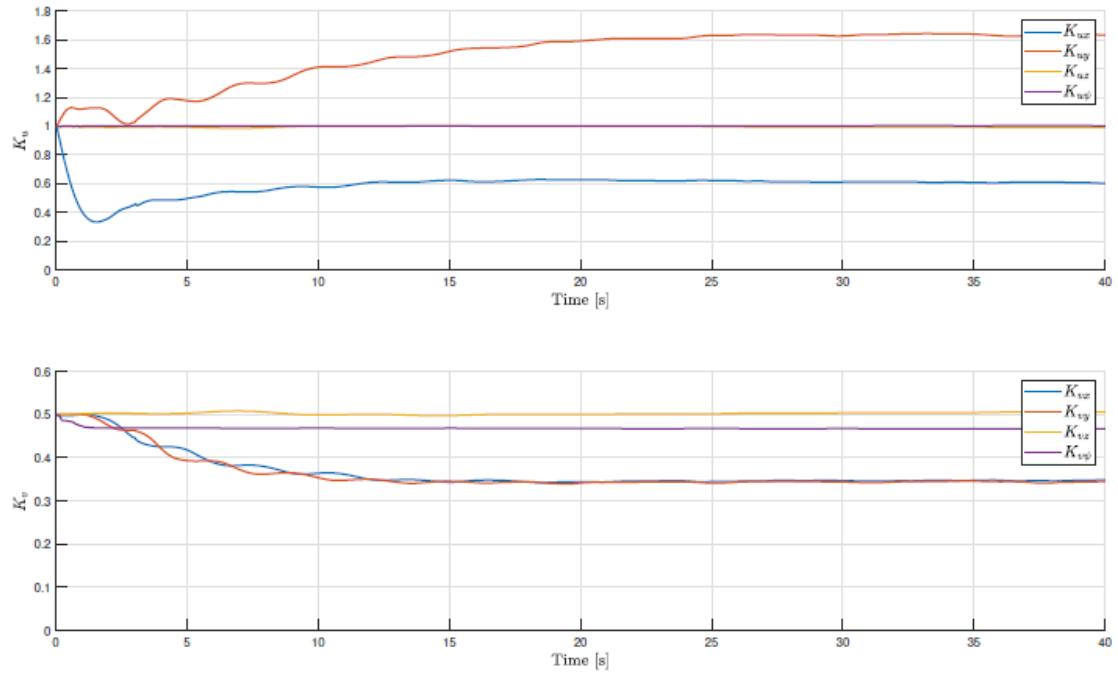


figura 5-6: Dinámica de los parámetros actualizados por el controlador adaptativo.

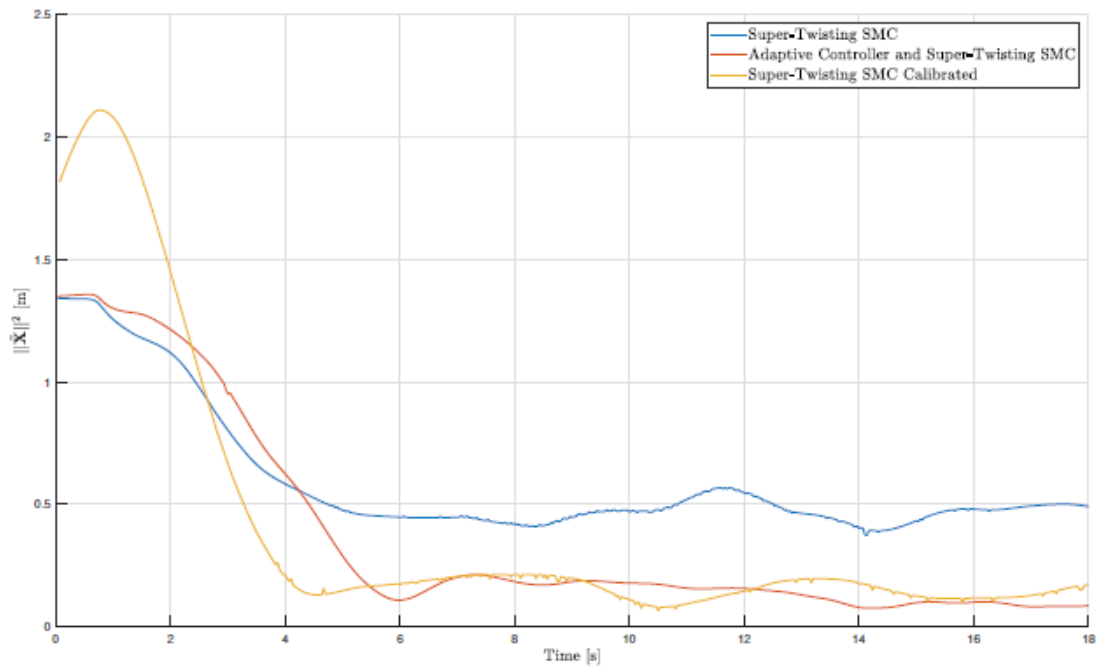


figura 5-7: Comparación de la norma cuadrática de los errores de control de los tres experimentos.

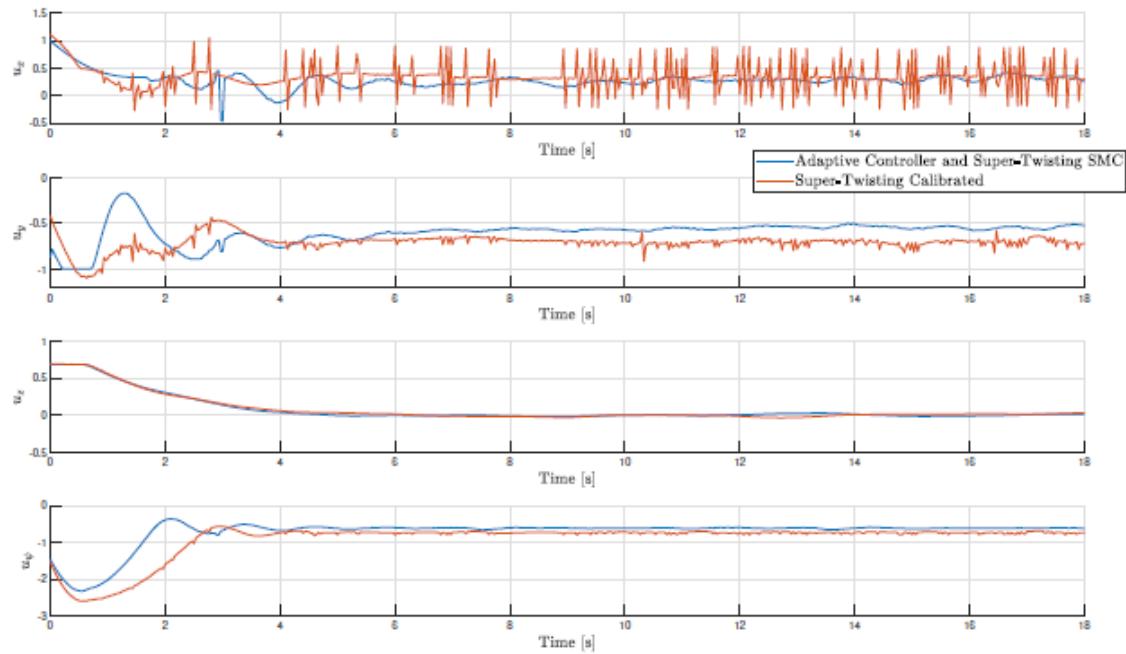


figura 5-8: Acciones de control para Super-Twisting con el controlador adaptativo y para Super-Twisting calibrado. La combinación de ST con el controlador adaptativo reduce el parpadeo de la señal de control.

5.5. Observaciones finales

Este Capítulo presenta un controlador adaptable basado en el algoritmo Super-Twisting para un cuadricóptero.

Este controlador combina las características clave de dos enfoques: la robustez del control de modo deslizante de segundo orden y la actualización dinámica de los parámetros del controlador a través de un controlador adaptativo. Esta combinación ayuda a reducir los errores de control durante la ejecución de la tarea. Se presenta un teorema que asegura la estabilidad asintótica del sistema de lazo cerrado considerando perturbaciones externas y errores de modelado acotados. Además, las leyes de adaptación se derivan del análisis de estabilidad y se demuestra analítica y experimentalmente que son estables. Se demostró experimentalmente que la combinación de ambos controladores produce excelentes resultados. Además, no se requieren altos valores de ganancia STA para un rendimiento óptimo, ya que el controlador adaptativo ajusta los parámetros del modelo durante la navegación, mejorando el rendimiento general del sistema. Se observó que aumentar la ganancia del controlador ST mejora los errores de control además de generar una mayor incidencia de vibraciones, un fenómeno indeseable. En consecuencia, el control propuesto es una solución efectiva al desafío de la navegación con cuadricóptero.

Capítulo 6. Transporte de carga con UAV con control PID y compensación Neuronal.

6.1. Resumen del Capitulo

En este Capítulo se aborda el control de formación para transportar una carga útil suspendida de un cable con dos cuadrotores (UAVs). La estructura de control está basada en un esquema de capas donde un controlador cinemático basado en el espacio nulo se combina con un control PID asociado a cada quadrotor con un sistema de corrección neuronal.

El controlador de espacio nulo está diseñado para generar referencias de velocidad a la formación. El cual es utilizado para evadir obstáculos, distribuir uniformemente el peso en cada vehículo y el encargado de seguimiento de la trayectoria. El controlador PID asociado al sistema neuronal de corrección recibe estas velocidades de referencia y realiza una compensación dinámica considerando incertidumbres paramétricas y perturbaciones dinámicas causadas por la carga fijada a los cuadrotores. El análisis de estabilidad del sistema de control se realiza utilizando la teoría de Lyapunov. Se incluyen modelos dinámicos muy detallados para los cuadrotores, los cables flexibles y la carga útil en un escenario muy realista.

Por último, las simulaciones numéricas demuestran el buen rendimiento del controlador propuesto.

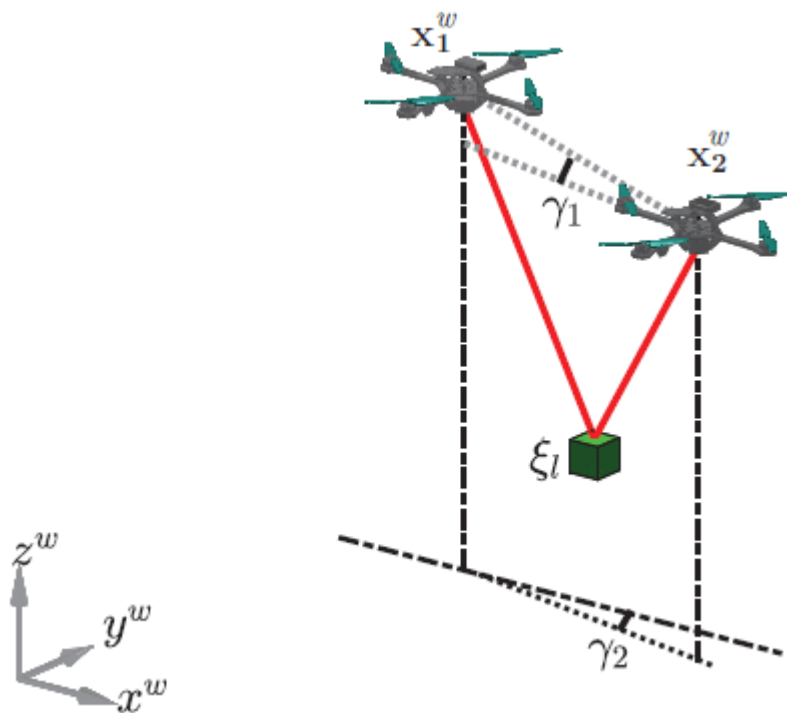


figura 6-1: Esquema de transporte de carga útil utilizando dos quadrotores AscTec Hummingbird, donde ambos vehículos están conectados a la carga mediante cables flexibles.

6.2. Planificación en Robótica Moderna

La planificación del movimiento es un aspecto crucial de la robótica moderna. Se refiere al proceso de generar una secuencia de acciones que permita al robot alcanzar un objetivo

específico. Esto implica considerar las limitaciones del robot, como su espacio de trabajo, alcance y velocidad, así como los obstáculos en el entorno.

Existen diferentes algoritmos de planificación de movimiento, cada uno con sus propias ventajas y desventajas. Algunos de los algoritmos más comunes incluyen:

- Planificación basada en grafos: Representa el espacio de configuración del robot como un grafo, y busca un camino desde el estado inicial al estado objetivo.
- Planificación basada en muestreo: Genera aleatoriamente muestras en el espacio de configuración y conecta las muestras para formar un camino.
- Planificación jerárquica: Divide el problema de planificación en subproblemas más pequeños y los resuelve de forma jerárquica.

En esta tesis se considerará Planificación jerárquica el control de formación de robots para el transporte de cargas. Por lo tanto, el control por espacio nulo (ver [136]) puede considerarse una técnica aplicable a la planificación de trayectorias en el control de formación de robots, especialmente en sistemas multi-robot donde se requiere coordinar múltiples tareas simultáneamente.

El control por espacio nulo es una estrategia utilizada en sistemas redundantes, donde se aprovechan los grados de libertad adicionales del sistema para cumplir objetivos secundarios sin afectar el objetivo principal. En el contexto del control de formación de robots, esto se traduce en lo siguiente:

- Tarea principal: Mantener la formación deseada (por ejemplo, una configuración geométrica específica entre los robots, como una línea, triángulo, etc.). Esto implica controlar la posición relativa de los robots para seguir una trayectoria colectiva o alcanzar un objetivo común.
- Tareas secundarias: Usar el espacio nulo del controlador principal para optimizar otras variables, como evitar obstáculos, minimizar el consumo de energía, mantener la conectividad de comunicación entre robots o seguir trayectorias individuales específicas sin comprometer la formación.

6.2.1. Aplicación de la técnica de Espacio nulo a la planificación de trayectorias

En la planificación de trayectorias para formaciones de robots, el control por espacio nulo permite:

- Coordinación jerárquica: Priorizar la formación como tarea principal, mientras que las trayectorias individuales de los robots (o tareas como evitar colisiones) se gestionan como tareas secundarias en el espacio nulo.
- Flexibilidad: Los robots pueden ajustar sus movimientos individuales para cumplir con restricciones adicionales (como límites de velocidad, restricciones dinámicas o entornos complejos) sin alterar la geometría de la formación.
- Optimización: Se pueden incorporar criterios de optimización (por ejemplo, suavidad en las trayectorias o eficiencia energética) en el espacio nulo.

6.3. Formulación del Problema

Consideremos dos quadrotores UAVs transportando cooperativamente una carga útil suspendida por cables con una masa puntual m (ver figura 6-1). Hacemos que $x_i^w =$

$[x_i^w, y_i^w, z_i^w]^T$ la posición del centro de gravedad (c.g.) del i -ésimo vehículo referenciado en el marco global. Además, la orientación de guiñada del i -ésimo UAV se indica por ψ_i^w . Así, la configuración del sistema esta dada por $q = [x_1^w, \psi_1^w, x_2^w, \psi_2^w]^T$. Por último, se consideran dos cables de longitud ℓ que unen la carga útil con cada UAV.

La formación debe realizar las siguientes tareas (ver [136] para más detalles):

- (i) evasión de obstáculos;
- (ii) posición de la carga útil $\xi_\ell = [x_\ell^w, y_\ell^w, z_\ell^w]^T$ debería seguir una trayectoria deseada descrita como $\xi_\ell^* = \xi_\ell^{w*}(t) = [x_\ell^{w*}, y_\ell^{w*}, z_\ell^{w*}]^T$;
- (iii) la distancia entre dos UAVs $d = \|x_1^w - x_2^w\|$ debería ser mantenida en un rango seguro $d_m \leq d \leq d_M$;
- (iv) para una distribución equilibrada del peso, el ángulo de elevación $\gamma_1 = \arcsin(\frac{z_2^w - z_1^w}{d})$ debería asegurar que $\tilde{f}_1/\rho = \tilde{f}_2/(1-\rho)$, donde $\tilde{f}_i$ es una versión filtrada de la fuerza realizada por cada UAV, y $0 < \rho < 1$ regula la proporción del peso de la carga levantada por cada UAV;
- (v) Para una navegación tangencial, la orientación de guiñada de la formación $\gamma_2 = \text{atan2}(y_2^w - y_1^w, x_2^w - x_1^w)$ debe ser tangencial a la trayectoria deseada;
- (vi) la orientación de guiñada de cada UAV debe permitir desplazamientos frontales.

La evasión de obstáculos es la tarea de mayor prioridad y debe activarse siempre que una función de potencial artificial positiva V supere un determinado umbral. Esta función debe ser $V = 0$ cuando no hay obstáculos cerca de la formación, y define trayectorias de evitación a través de sus curvas de nivel ($\dot{V} = 0$). Por tanto, el objetivo de control es navegar en la región espacial con $V = 0$ (ver [136] para más detalles). Se puede demostrar que

$$\dot{V} = J_1 \dot{q} + a_1$$

donde $J_1 = J_1(q)$ es la Jacobiana de la tarea, y a_1 es un valor residual.

A continuación, la evitación de obstáculos se alcanza teniendo en cuenta el controlador

$$v_c^{(1)} = J_1^\dagger (-k_v V - a_1)$$

donde $J_1^\dagger$ denota la matriz pseudoinversa de J_1 .

Las demás tareas pueden verificarse simultáneamente si no hay obstáculos cerca. Para ellas, existen 8 variables de tareas independientes

$\xi_\ell = [x_\ell^w, y_\ell^w, z_\ell^w, d, \gamma_1, \gamma_2, \psi_1^w, \psi_2^w]^T$, como en el vector q de la configuración del sistema. Las velocidades de estas variables están relacionadas linealmente con $\dot{q}$ como (ver [136] para más detalles):

$$\dot{\xi} = J_2 \dot{q} + a_2 \quad (6-1)$$

donde $J_2 = J_2(q)$ es el Jacobiano de la tarea, y a_2 es un vector residual. Así, estas tareas pueden realizarse utilizando el controlador cinemático definido por

$$v_c^{(2)} = J_2^\dagger (v_x - a_2)$$

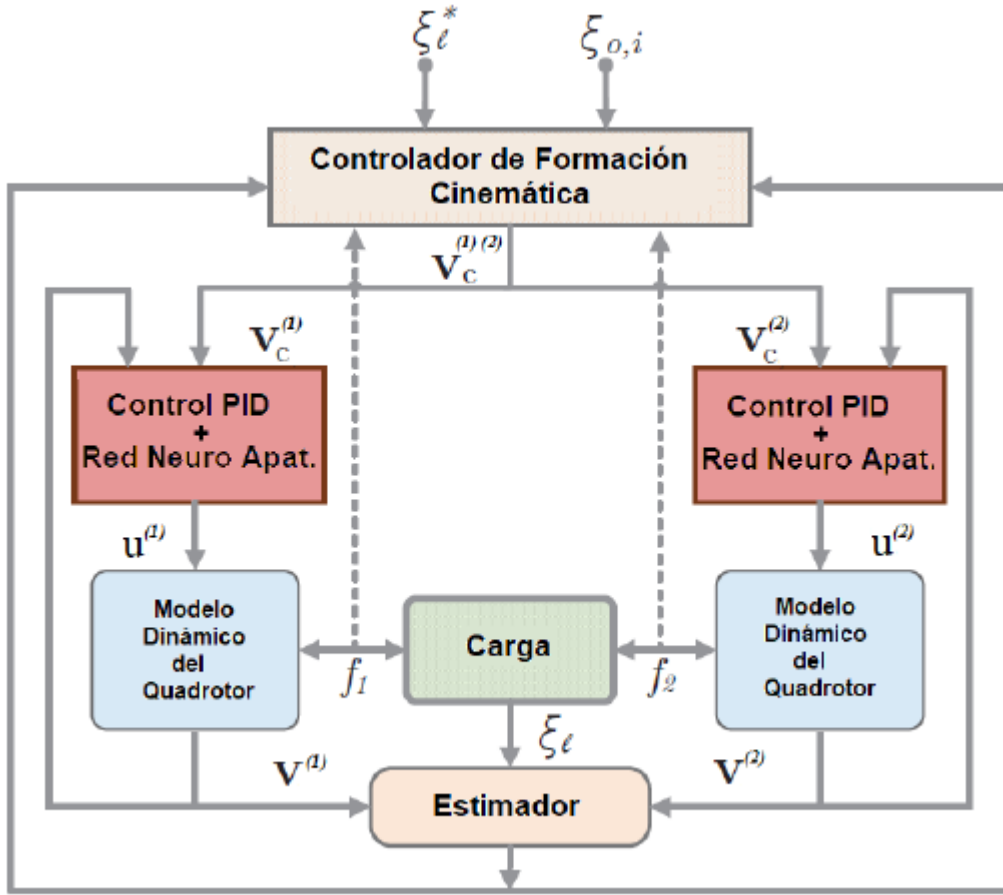


figura 6-2: Estructura de control formación.

donde v_x está dado por (ver [136] para más detalles)

$$v_x = \begin{bmatrix} \dot{\xi}_\ell^* + K_{\ell,1} \tanh(K_{\ell,1} (\xi_\ell^* - \xi_\ell)) \\ \tilde{d} \\ \dot{\gamma}_1^* + k_{\gamma_{1,1}} \tanh(k_{\gamma_{1,2}} (\gamma_1^* - \gamma_1)) \\ \dot{\gamma}_2^* + k_{\gamma_{2,1}} \tanh(k_{\gamma_{2,2}} (\gamma_2^* - \gamma_2)) \\ \dot{\psi}_1^{w*} + k_{\psi_{1,1}} \tanh(k_{\psi_{1,2}} (\psi_1^{w*} - \psi_1)) \\ \dot{\psi}_2^{w*} + k_{\psi_{2,1}} \tanh(k_{\psi_{2,2}} (\psi_2^{w*} - \psi_2)) \end{bmatrix}$$

Con

$$\tilde{d} = \begin{cases} 0 & \text{if } d < d_m, \\ -k_{d,1} \tanh(-k_{d,2}(d - d_m)) & \text{if } d_m < d < d_M, \\ -k_{d,1} \tanh(-k_{d,2}(d - d_M)) & \text{if } d > d_M, \end{cases}$$

$$\gamma_{1,d} = \gamma_1 + k_{\gamma_{1,1}} \tanh \left(k_{\gamma_{1,2}} \left(\frac{\tilde{f}_1}{\rho} - \frac{\tilde{f}_2}{1-\rho} \right) \right)$$

Por último, el controlador basado en el espacio nulo fue considerado para cumplir el mayor número posible de tareas asignadas por:

$$v_c = v_c^{(1)} + (I_8 - J_1^\dagger J_1) v_c^{(2)} \quad (6-2)$$

Las velocidades de referencia calculadas por (6-2) se envían a cada quadrotor. Estas velocidades de referencia son diferentes de las velocidades reales de cada vehículo, debido a la dinámica de todo el sistema y al hecho de que los robots no pueden alcanzar las referencias v_c instantáneamente. Por lo tanto, se define un compensador dinámico en cascada con el control de formación, para hacer que el error de seguimiento de la velocidad disminuya cuando el tiempo tiende a infinito.

6.4. Simulación Numérica

6.4.1. Modelado de la cuerda flexible

El sistema utilizado para llevar a cabo la validación del controlador dinámico de formación propuesto se basa en la interacción de varias etapas de software.

La primera es la simulación y posterior identificación paramétrica del modelo dinámico de un minicuatrotor de 6 grados de libertad. Además, se presenta la simulación de los cables y la carga acoplada a cada vehículo. Los cables de Kelvin-Voigt de masas puntuales unidas por resortes y amortiguadores. Esto permite movimientos de balanceo y ondulación en el cable.

Todos los modelos están implementados en C++ y están interconectados con MATLAB a través de memoria compartida. El controlador cinemático y el controlador PID con corrección neuronal fueron programados en código MATLAB. Los parámetros utilizados en las simulaciones se describen en la Tabla 1.

Cada partícula de masa de los cables se ve afectada por la fuerza elástica y viscosa generada por el resto de resortes y amortiguadores, la fuerza gravitatoria, la fuerza de fricción del aire, la fuerza de arrastre y otras fuerzas relacionadas con el suelo (fricción, absorción y repulsión). El número de partículas utilizadas para simular el comportamiento dinámico de cada cable es un parámetro de diseño. Cuanto mayor sea el número de partículas, más detallado será el comportamiento simulado. En estas simulaciones se definen cuarenta masas, lo que permite una resolución de diez centímetros. La última masa de cada cable representa la masa acoplada al sistema.

6.4.2. Modelo Matemático del Vehículo UAV

El controlador para cada vehículo está fundamentado en un modelo matemático de un vehículo aéreo multirrotor (6-3), de cual existe abundante información en trabajos científicos. Por lo tanto, a continuación, se presentan dos modelos matemáticos para representar el comportamiento dinámico de la aeronave. El primero es un modelo simplificado válido para maniobras no agresivas que fue publicado en [105] y es el utilizado para el diseño del controlador. Así, el autor considera que un dron comercial siempre lleva un controlador a bordo para estabilizarlo, y los ángulos de cabeceo (ϕ) y alabeo (θ) son lo suficientemente pequeños en maniobras no agresivas como para considerarlos nulos, y sólo se tiene en cuenta el ángulo de guiñada (ψ).

$$\dot{v} = K_u u - K_v v \quad (6-3)$$

Parametros	Valor
Numero de cables	2
Numero de particulas de masa por cable	40
Masa de cable de sosten	0.001 [kg]
Diametro del cable	0.0005 [m]
coeficiente de arrastre del cable	1.0
Masa de la carga util	0.4 [kg]
Longitud de borde de carga útil	0.1 [m]
Coeficiente de arrastre de la carga útil	1.05
longitud del resorte	0.08 [m]
Índice de elasticidad	5000 [N/m]
Fricción del resorte	0.6 [N · s/m]
Aceleracion de la gravedad	9.7917 [m/s ²]
Densidad del aire	1.151 [kg/m ³]
friccion del aire	0.02 [N · s/m]
respulsion del suelo	100 [N/m]
friccion del suelo	0.2 [N · s/m]
absorcion del suelo	0.05 [N · s/m]

Tabla 1: Parámetros de los cables y la carga útil.

La ecuación anterior (6-3), es la representación del modelo UAV con los cuatro grados de libertad considerados en relación con un marco inercial. Además, $u = u_x, u_y, u_z, u_\psi$ son las señales de control normalizadas $u \in [0, 1]$. La matriz R es la matriz de rotación. Los parámetros dinámicos del modelo se consideran agrupados en las matrices diagonales positivas $K_u = \text{diag}[k_{u1}, k_{u2}, k_{u3}, k_{u4}]$ y $K_v = \text{diag}[k_{v1}, k_{v2}, k_{v3}, k_{v4}]$. Estos parámetros (k_i con $i: 1 \dots 8$) contienen la información sobre el modelo dinámico del dron.

Con el fin de validar la propuesta, se considera un modelo dinámico más complejo que se muestra en [137] para el cuadrotor Hummingbird de la empresa Ascending Technologies. Este cuadrotor tiene una configuración plus, es decir, el eje x^b tiene la misma dirección de un brazo del cuerpo del cuadrotor. El modelo para un quadrotor se obtuvo con las ecuaciones de Newton-Euler

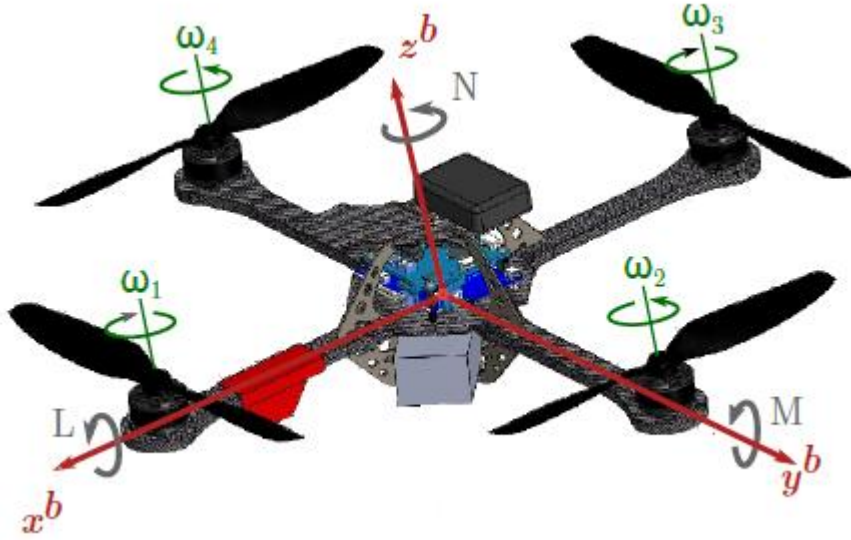


figura 6-3: El Hummingbird quadrotor de AscTec company.

$$\begin{aligned}
 \dot{u} &= -g \sin(\theta) + rv - qw \\
 \dot{v} &= g \sin(\phi) \cos(\theta) - ru + pw \\
 \dot{w} &= \frac{1}{m} F_z + F_\ell + g \cos(\phi) \cos(\theta) + qu - pv \\
 \dot{p} &= \frac{1}{I_{xx}} (L + L_\ell + (I_{yy} - I_{zz}) qr) \\
 \dot{q} &= \frac{1}{I_{yy}} (M + M_\ell + (I_{zz} - I_{xx}) pr) \\
 \dot{r} &= \frac{1}{I_{zz}} (N + (I_{xx} - I_{yy}) pq)
 \end{aligned} \tag{6-4}$$

las variables u, v, w, p, q, r son las velocidades lineal y angular del quadrotor respecto al bastidor móvil, g es la aceleración de la gravedad, L, M y N son los momentos causados por las cuatro hélices en torno a los ejes x^b, y^b y z^b , respectivamente. Las cuatro hélices producen una fuerza vertical $F_i = k_F w_i^2$.

Además, producen un momento $M_i = k_M w_i^2$ alrededor del centro de gravedad del quadrotor.

6.5. Diseño del Controlador Dinámico

El controlador que se definirá a continuación utiliza tres estrategias de control que funcionan conjuntamente. El controlador PID propio del vehículo y calibrado por el fabricante. Sobre este controlador, se definirá una corrección neuronal adaptable basado en la teoría de Lyapunov para actualizar los parámetros en la red neuronal y brindar una acción de control aditiva a la del PID para mejorar el rendimiento del sistema en lazo cerrado. Y por último, como se definió en la sección anterior El control de espacio nulo para coordinar las tareas entre los vehículos y la carga útil.

El modelo matemático (6-3) presenta una representación simplificada para la dinámica del quadrotor. Las perturbaciones causadas por la dinámica no modelada y las perturbaciones externas se incluyen en el modelo dinámico con un término extra δ .

$$\dot{v} = K_u u - K_v v + \delta \quad (6-5)$$

Se supone que δ y su derivada son funciones acotadas por un valor real positivo δ_0 .

$$\|\dot{\delta}(t)\| \leq \delta_0 \quad (6-6)$$

Basándose en lo anteriormente expuesto; se propone un controlador adaptable. La ley de control está formada por un controlador PID estático, y un sistema de corrección neuronal adaptable basado en Lyapunov. Para continuar con el análisis, las salidas del controlador cinemático v_c^i corresponden a las referencias de velocidad de cada vehículo, por lo tanto $v_c^i = v_{ref}$, recordando que el supra índice i es el indicativo del vehículo UAV 1 o 2. Si consideramos los errores de velocidad de cada vehículo, estos se definen como:

$$e = v_{ref} - v \quad (6-7)$$

Derivando la ecuación anterior:

$$\dot{e} = \dot{v}_{ref} - \dot{v} \quad (6-8)$$

Ahora, definiendo una variable auxiliar U , que se utilizará para ajustar la acción de control, la cual se define como:

$$U = \dot{v}_{ref} - (K_u u - K_v v) \quad (6-9)$$

A partir de la ecuación anterior (6-9), obtenemos la acción de control U , que dependerá de los parámetros del modelo. A continuación, reescribiendo (6-9) conduce a:

$$u = K_u^{-1} [(\dot{v}_{ref} - U) + K_v v] \quad (6-10)$$

Si consideramos U como un controlador PID, la variable U se expresa como:

$$\begin{aligned} U &= -K_p e + K_d \dot{e} + w \\ \dot{w} &= K_i e \end{aligned} \quad (6-11)$$

Siendo w una variable auxiliar para el cálculo de la acción integral. Ahora sustituyendo la ec. (6-11) en (6-10) se obtiene la siguiente ecuación:

$$\begin{pmatrix} u \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_u^{-1} [(K_p e + K_d \dot{e} + w + \dot{v}_{ref}) + K_v v] \\ K_i e \end{pmatrix} \quad (6-12)$$

Si consideramos $\hat{K}_u$ y $\hat{K}_v$ como los parámetros conocidos del vehículo, la nueva ley de control se expresa como:

$$\begin{pmatrix} u \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{K}_u^{-1} [(K_p e + K_d \dot{e} + w + \dot{v}_{ref}) + \hat{K}_v v] \\ \hat{K}_i e \end{pmatrix} \quad (6-13)$$

Para obtener la ecuación diferencial del error de control debemos considerar la ecuación del modelo (6-5), a la que sumamos y restamos el término $\hat{K}_u u$. Se expresa entonces como:

$$\dot{v} = K_u u - K_u v + \delta + \hat{K}_u u - \hat{K}_u u \quad (6-14)$$

Sustituyendo la ec. (6-13) en eq. (6-14), obtenemos la dinámica de error de la forma:

$$\begin{pmatrix} \dot{v} \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_u u - K_u v + \delta + [(K_p e + K_d \dot{e} + w + \dot{v}_{ref}) + \hat{K}_v v] - \hat{K}_u u \\ \hat{K}_i e \end{pmatrix} \quad (6-15)$$

reordenando la ecuación anterior:

$$\begin{pmatrix} \dot{v} \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (K_p e + K_d \dot{e} + w + \dot{v}_{ref}) - \tilde{K}_v v + \tilde{K}_u u + \delta \\ K_i e \end{pmatrix} \quad (6-16)$$

Definiendo las matrices $\tilde{K}_v = K_v - \hat{K}_v$ y $\tilde{K}_u = K_u - \hat{K}_u$. Posteriormente se despeja la variable $\dot{v}_{ref}$ y reordenando (6-16) se obtiene:

$$\begin{pmatrix} \dot{v} - \dot{v}_{ref} \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{e} \\ K_i e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_p e + K_d \dot{e} + w - \tilde{K}_v v + \tilde{K}_u u + \delta \\ K_i e \end{pmatrix} \quad (6-17)$$

Despejando $\dot{e}$ de ambos miembros de la ecuación, obtenemos lo siguiente.

$$\begin{pmatrix} \dot{e} \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (K_d + I)^{-1} (-K_p e - w - (-\tilde{K}_v v + \tilde{K}_u u + \delta)) \\ K_i e \end{pmatrix} \quad (6-18)$$

A partir de la ecuación anterior (6-18) es necesario obtener un método para corregir el error de control debido a las perturbaciones externas δ y a las variaciones de los parámetros del vehículo $\tilde{K}_v$ y $\tilde{K}_u$. Para resolver este problema, se propone añadir un término adaptable a la acción de control del PID estático (6-18), cuyo objetivo para reducir el efecto de las diferencias dinámicas y las perturbaciones debidas a la tensión de la cuerda. La figura 6-4 muestra la estrategia de control propuesta sobre la dinámica de cada vehículo.

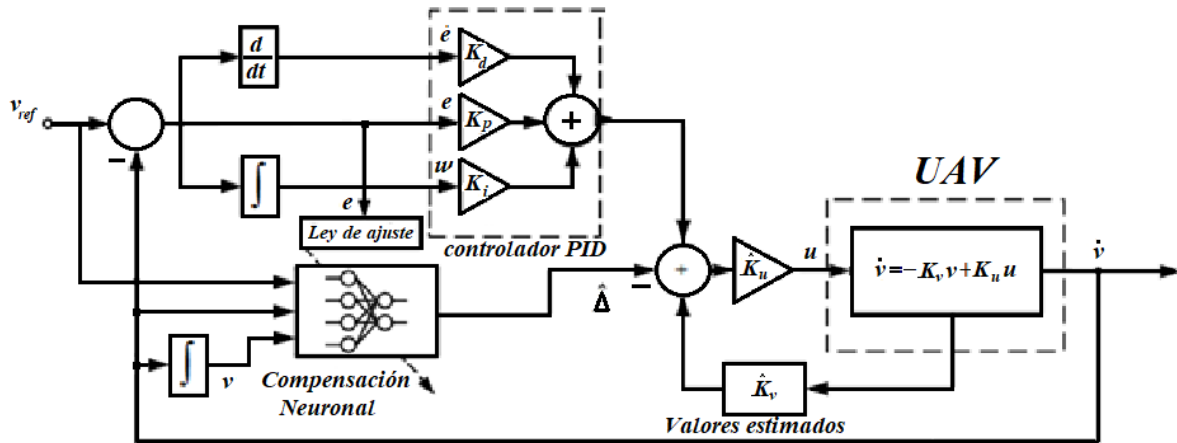


figura 6-4: Estructura de control dinámico

6.5.1. Diseño del sistema de corrección neuronal

En este apartado se implementa una técnica de ajuste basada en una función de red neuronal adaptable (ANN), siendo una red neuronal basada en funciones gaussianas. El objetivo principal es ajustar los parámetros del controlador (u) para compensar variaciones dinámicas a la dinámica conocida ($\tilde{K}_v$ y $\tilde{K}_u$) manteniendo constantes las ganancias del PID (controlador principal). Para implementar esta estrategia de control se debe realizar una estimación adaptable, considerando que cualquier función no lineal puede ser aproximada mediante una técnica de aproximación de redes neuronales ([130]). En este caso, la variación dinámica $\Delta = -\tilde{K}_v v + \tilde{K}_u u + \delta$ se aproximará mediante una ANN, con ajuste de parámetros en línea. Definiendo el vector regresor de la forma $\xi = [v, v_{ref}, \dot{v}]$ de la ANN, la aproximación de Δ se expresa como:

$$\begin{aligned}
\Delta &= -\tilde{K}_v v + \tilde{K}_u u + \delta = \dots \\
&= \sum_{k=1}^m w_k^{*T} \exp\left(-\frac{1}{\sigma_k^{*2}} \|\zeta - c_k^*\|\right) + \varepsilon(v) = \dots \\
&= w^{*T} \xi(\zeta, \sigma^*, c^*) + \varepsilon(v)
\end{aligned} \tag{6-19}$$

donde w^* es vector de pesos optimo $m \times n$ (m indica el número de neuronas ocultas) y ξ es $m \times 1$. Cada función gaussiana está determinada por el vector de centros c^* y los anchos de la campana σ^* , y por último ε es el menor valor del error de aproximación de la red neuronal. De ahora en más se escribe ξ^* en lugar de $\xi(\zeta, \sigma^*, c^*)$ para mejorar la legibilidad.

$$\Delta = w^{*T} \xi^* + \varepsilon(v) \tag{6-20}$$

En este punto es necesario definir un término de compensación que se añade a la ley de control para reducir el error de control. Esta compensación se puede indicar como:

$$\hat{\Delta} = \hat{w}^T \hat{\xi} \tag{6-21}$$

Añadiendo la corrección neuronal a la acción de control (6-13) queda:

$$\begin{pmatrix} u \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_u^{-1} [(K_p e + K_d \dot{e} + w + \dot{v}_{ref}) + \hat{K}_v v - \hat{\Delta}] \\ K_i e \end{pmatrix} \tag{6-22}$$

Ahora, definiendo el error de vector de peso $\tilde{w}$ como la diferencia entre w^* (óptimo) y w (instantáneo), y de la misma forma para $\tilde{\xi} = \xi^* - \xi$, (6-22) puede escribirse como:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} u \\ \dot{w} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} K_u^{-1} [(K_p e + K_d \dot{e} + w + \dot{v}_{ref}) + \hat{K}_v v - (\hat{w}^T \hat{\xi})] \\ K_i e \end{pmatrix} = \dots \\
&= \begin{pmatrix} K_u^{-1} [(K_p e + K_d \dot{e} + w + \dot{v}_{ref}) + \hat{K}_v v - (w^{*T} \xi^* + \tilde{w}^T \xi^* + w^{*T} \tilde{\xi} + \tilde{w}^T \tilde{\xi})] \\ K_i e \end{pmatrix}, \tag{6-23}
\end{aligned}$$

Reemplazando en (6-14) y reordenando queda:

$$\begin{aligned}
\dot{v} &= K_u u - K_u v + \delta + \hat{K}_u [\hat{K}_u^{-1} [(K_p e + K_d \dot{e} + w + \dot{v}_{ref}) + \hat{K}_v v - \dots \\
&\quad - (w^{*T} \xi^* + \tilde{w}^T \xi^* + w^{*T} \tilde{\xi} + \tilde{w}^T \tilde{\xi})] + \hat{K}_u u = \dots \\
&= -\tilde{K}_v v + \tilde{K}_u u + \delta + (K_p e + K_d \dot{e} + w + \dot{v}_{ref}) - \dots \\
&\quad - (w^{*T} \xi^* + \tilde{w}^T \xi^* + w^{*T} \tilde{\xi} + \tilde{w}^T \tilde{\xi}); \\
\dot{w} &= K_i e
\end{aligned} \tag{6-24}$$

Reordenando nuevamente la ec. (6-24) queda y recordando que $(I + K_D)^{-1} = K_S$:

$$\begin{aligned}
\dot{e} &= K_S [-K_p e - w - (-\tilde{K}_v v + \tilde{K}_u u + \delta) + \dots \\
&\quad + (w^{*T} \xi^* + \tilde{w}^T \xi^* + w^{*T} \tilde{\xi} + \tilde{w}^T \tilde{\xi})] \\
\dot{w} &= K_i e
\end{aligned} \tag{6-25}$$

La red neuronal tiende a minimizar el error, por lo tanto:

$$(-\tilde{K}_v v + \tilde{K}_u u + \delta) = w^{*T} \xi^* + \varepsilon(v) \tag{6-26}$$

Y además considerando que $\tilde{w}^T \tilde{\xi} + \varepsilon(v) = \varepsilon'(v)$, ya que el producto $\tilde{w}^T \tilde{\xi}$ equivale al producto de dos errores puede ser considerado como parte del error mínimo de la red neuronal. Por lo tanto, la ecuación (6-25) queda expresada como:

$$\begin{pmatrix} \dot{e} \\ \dot{\tilde{w}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_S [-K_p e - w - (\tilde{w}^T \tilde{\xi} + w^T \tilde{\xi} + \varepsilon'(v))] \\ K_i e \end{pmatrix} \quad (6-27)$$

El punto de equilibrio de la ecuación anterior es $(e \ w)^T = (0 \ w^*)^T$, el punto de equilibrio $v = v_{ref}$, por lo tanto, ese equilibrio es $(0 \ \varepsilon'(v_{ref}))^T$, entonces para mover el punto de equilibrio en el origen:

$$\tilde{w} = w - \varepsilon'(v_{ref}) \quad (6-28)$$

Reemplazo (6-28) en (6-27) queda:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{e} \\ \dot{\tilde{w}} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} K_S [-K_p e - \tilde{w} - \varepsilon'(v_{ref}) + (\tilde{w}^T \tilde{\xi} + w^T \tilde{\xi} + \varepsilon'(v))] \\ K_i e \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \dot{e} \\ \dot{\tilde{w}} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} K_S [-K_p e - \tilde{w} + (\tilde{w}^T \tilde{\xi} + w^T \tilde{\xi} + \tilde{\varepsilon}')] \\ K_i e \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6-29)$$

Donde $\tilde{\varepsilon}' = \varepsilon'(v) - \varepsilon'(v_{ref})$ es la ecuación del error y se usará para determinar la estabilidad del sistema.

6.6. Análisis de Estabilidad y Reglas de Ajuste

Proponiendo una función candidata de Lyapunov de la forma:

$$V = \frac{1}{2} \left[e^T K_i K_p e + \tilde{w}^T K_p K_S \tilde{w} + tr \left(\frac{\tilde{w}^T \tilde{w}}{\alpha} \right) + \frac{\tilde{c}^T \tilde{c}}{\beta} + \frac{\tilde{\sigma}^T \tilde{\sigma}}{\gamma} \right] \quad (6-30)$$

Derivando (6-30)

$$\dot{V} = \left[e^T K_i K_p \dot{e} + \tilde{w}^T K_p K_S \dot{\tilde{w}} + tr \left(\frac{\tilde{w}^T \dot{\tilde{w}}}{\alpha} \right) + \frac{\tilde{c}^T \dot{\tilde{c}}}{\beta} + \frac{\tilde{\sigma}^T \dot{\tilde{\sigma}}}{\gamma} \right] \quad (6-31)$$

Remplazando ec. (6-29) en (6-31) y teniendo en cuenta que K_p es una matriz diagonal ($K_p^T K_p = K_p^2$), obtenemos:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= (-e^T K_i K_S K_p^2 e - e^T K_i K_S K_p \tilde{w} + \dots \\ &\quad + e^T K_i K_S K_p (\tilde{w}^T \tilde{\xi} + \tilde{w}^T \tilde{\xi} + \tilde{\varepsilon}')) + \dots \\ &\quad + \tilde{w}^T K_p K_S K_i e + tr \left(\frac{\tilde{w}^T \dot{\tilde{w}}}{\alpha} \right) + \frac{\tilde{c}^T \dot{\tilde{c}}}{\beta} + \frac{\tilde{\sigma}^T \dot{\tilde{\sigma}}}{\gamma} \end{aligned} \quad (6-32)$$

Reordenando queda

$$\dot{V} = \left[-e^T K_i K_S K_p^2 e + e^T K_i K_S K_p (\tilde{w}^T \xi + \tilde{w}^T \tilde{\xi} + \tilde{\varepsilon}') + \text{tr} \left(\frac{\tilde{w}^T \dot{\tilde{w}}}{\alpha} \right) + \frac{\tilde{c}^T \dot{\tilde{c}}}{\beta} + \frac{\tilde{\sigma}^T \dot{\tilde{\sigma}}}{\gamma} \right] \quad (6-33)$$

Ahora usando una aproximación para la función $(\tilde{\xi})$ basada en la serie de Taylor, se puede expresar como se aplica la expansión de Taylor de (ξ^*) en los puntos y

$$\xi^*(\zeta, \sigma^*, c^*) = \xi(\zeta, \sigma, c) + Z^T \tilde{c} + \Gamma^T \tilde{\sigma} + O(\zeta, \tilde{\sigma}, \tilde{c}) \quad (6-34)$$

Donde $O(.)$ indica los argumentos de orden superior en una expansión de series de Taylor, y Z y Γ son derivadas de $\xi^*(\zeta, \sigma^*, c^*)$ con respecto a y y σ en el punto σ . Pueden ser expresadas como $Z^T = \left[\frac{\partial \xi^*(\zeta, \sigma^*, c^*)}{\partial c^*} \right]$ y $\Gamma^T = \left[\frac{\partial \xi^*(\zeta, \sigma^*, c^*)}{\partial \sigma^*} \right]$ evaluada en los puntos $(c^*) = c$ y $(\sigma^*) = \sigma$. Ahora de (6-34) despejando se obtiene:

$$\tilde{\xi}(\zeta, \tilde{\sigma}, \tilde{c}) = Z^T \tilde{c} + \Gamma^T \tilde{\sigma} + O(\zeta, \tilde{\sigma}, \tilde{c}) \quad (6-35)$$

De (6-35) el término de orden superior $O(.)$ es acotado por:

$$\begin{aligned} \|O(\zeta, \tilde{\sigma}, \tilde{c})\| &= \|\tilde{\xi}(\zeta, \tilde{\sigma}, \tilde{c}) - Z^T \tilde{c} - \Gamma^T \tilde{\sigma}\| \leq \dots \\ &\leq \|\tilde{\xi}(\zeta, \tilde{\sigma}, \tilde{c})\| + \|Z^T \tilde{c}\| + \|\Gamma^T \tilde{\sigma}\| \leq k_1 + k_2 \|\tilde{c}\| + k_3 \|\tilde{\sigma}\| \leq O_{max} \end{aligned} \quad (6-36)$$

donde k_1, k_2 y k_3 son constantes debido al hecho de que las funciones gaussianas (RBF) y sus derivadas están limitadas por constantes k_1, k_2 y k_3 . Sustituyendo (6-35) en (6-33), se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -e^T K_i K_S K_p^2 e + \dots \\ &+ e^T K_i K_S K_p (\tilde{w}^T \xi + \tilde{w}^T (Z^T \tilde{c} + \Gamma^T \tilde{\sigma} + O(.)) + \tilde{\varepsilon}') + \dots \\ &\quad \text{tr} \left(\frac{\tilde{w}^T \dot{\tilde{w}}}{\alpha} \right) + \frac{\tilde{c}^T \dot{\tilde{c}}}{\beta} + \frac{\tilde{\sigma}^T \dot{\tilde{\sigma}}}{\gamma} = \dots \\ &= e^T K_i K_S K_p e + \dots \\ &+ e^T K_i K_S K_p (\tilde{w}^T \xi + w^T Z^T \tilde{c} + w^T \Gamma^T \tilde{\sigma} + w^T O(.) + \tilde{\varepsilon}') + \dots \\ &\quad + \text{tr} \left(\frac{\tilde{w}^T \dot{\tilde{w}}}{\alpha} \right) + \frac{\tilde{c}^T \dot{\tilde{c}}}{\beta} + \frac{\tilde{\sigma}^T \dot{\tilde{\sigma}}}{\gamma} \end{aligned} \quad (6-37)$$

Definiendo a la suma $w^T O(.) + \tilde{\varepsilon}' = \bar{\varepsilon}$ donde se supone que esta suma está delimitada por

$$\|\bar{\varepsilon}\| \leq k = cte \quad (6-38)$$

Donde $\bar{\varepsilon}$ representa el error de aproximación de la compensación neuronal. Utilizando la teoría de aproximación basado en redes neuronales, el error de aproximación inherente $\bar{\varepsilon}$ puede reducirse arbitrariamente aumentando el número de m neuronas, entonces es razonable suponer que $\bar{\varepsilon}$ esté limitado por una constante k ; de esta forma (6-37) puede reescribirse como:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -e^T K_i K_S K_p^2 e + \dots \\ &+ e^T K_i K_S K_p (\tilde{w}^T \xi + w^T Z^T \tilde{c} + w^T \Gamma^T \tilde{\sigma} + k) + \dots \\ &\quad + \text{tr} \left(\frac{\tilde{w}^T \dot{\tilde{w}}}{\alpha} \right) + \frac{\tilde{c}^T \dot{\tilde{c}}}{\beta} + \frac{\tilde{\sigma}^T \dot{\tilde{\sigma}}}{\gamma} \end{aligned} \quad (6-39)$$

Agrupando y reordenando (6-39) de forma que:

$$\begin{aligned}\dot{V} = & -e^T K_i K_S K_p^2 e + [tr \left(e^T K_i K_S K_p \tilde{w}^T \xi + \frac{\tilde{w}^T \dot{\tilde{w}}}{\alpha} \right) + \dots \\ & + \left(e^T K_i K_S K_p w^T Z^T \tilde{c} + \frac{\tilde{c}^T \dot{\tilde{c}}}{\beta} \right) + \dots \\ & + \left(e^T K_i K_S K_p w^T \Gamma^T \tilde{\sigma} + \frac{\tilde{\sigma}^T \dot{\tilde{\sigma}}}{\gamma} \right) + e^T K_i K_S K_p \bar{\varepsilon}\end{aligned}\quad (6-40)$$

De la ecuación anterior sabemos que

$$\begin{aligned}e^T K_i K_S K_p w^T Z^T \tilde{c} &= (e^T K_i K_S K_p w^T Z^T \tilde{c})^T = \tilde{c}^T Z w K_p K_S K_i e \\ e^T K_i K_S K_p w^T \Gamma^T \tilde{\sigma} &= (e^T K_i K_S K_p w^T \Gamma^T \tilde{\sigma})^T = \tilde{\sigma}^T \Gamma w K_p K_S K_i e\end{aligned}\quad (6-41)$$

Aplicando propiedad cíclica de la traza sabemos que:

$$tr(e^T K_i K_S K_p \tilde{w}^T \xi) = tr(\tilde{w}^T \xi e^T K_i K_S K_p) \quad (6-42)$$

Reemplazo (6-41) y (6-42) en (6-40)

$$\begin{aligned}\dot{V} = & -e^T K_i K_S K_p^2 e + [tr \left(\tilde{w}^T \xi e^T K_i K_S K_p + \frac{\tilde{w}^T \dot{\tilde{w}}}{\alpha} \right) + \dots \\ & + \left(\tilde{c}^T Z w K_p K_S K_i e - \frac{\tilde{c}^T \dot{\tilde{c}}}{\beta} \right) + \left(\tilde{\sigma}^T \Gamma w K_p K_S K_i e + \frac{\tilde{\sigma}^T \dot{\tilde{\sigma}}}{\gamma} \right)] + e^T K_i K_S K_p \bar{\varepsilon}\end{aligned}\quad (6-43)$$

Despejando $\tilde{w}^T$, $\tilde{c}^T$ y $\tilde{\sigma}^T$ la ec. (6-43) puede expresarse como:

$$\begin{aligned}\dot{V} = & -e^T K_i K_S K_p^2 e + [tr \left(\tilde{w}^T (\xi e^T K_i K_S K_p + \frac{\dot{\tilde{w}}}{\alpha}) \right) + \dots \\ & + \tilde{c}^T \left(Z w K_p K_S K_i e - \frac{\dot{\tilde{c}}}{\beta} \right) + \tilde{\sigma}^T \left(\Gamma w K_p K_S K_i e + \frac{\dot{\tilde{\sigma}}}{\gamma} \right)] + e^T K_i K_S K_p \bar{\varepsilon}\end{aligned}\quad (6-44)$$

Igualando a cero los términos entre paréntesis y despejando las derivadas quedan expresadas como:

$$\dot{\tilde{w}} = -\alpha \xi e^T K_i K_S K_p \quad (6-45)$$

$$\dot{\tilde{c}} = -\beta w K_p K_S K_i e \quad (6-46)$$

$$\dot{\tilde{\sigma}} = -\gamma \Gamma w K_p K_S K_i e \quad (6-47)$$

Reemplazando cada una de las leyes de juste (6-45), (6-46) y (6-47) en (6-44) queda expresada como:

$$\dot{V} = -e^T K_i K_S K_p^2 e + e^T K_i K_S K_p \bar{\varepsilon} \quad (6-48)$$

Para demostrar la convergencia de la propuesta de control debemos demostrar que (6-48) es negativa, por lo tanto, debemos encontrar las condiciones para que esta ecuación sea negativa., considerando:

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\lambda_{\min}(K_i) \lambda_{\min}(K_S) \left[\left(\lambda_{\min}(K_p) \right)^2 \|e\|^2 + \|e\| k \right] = \\ &= -\lambda_{\min}(K_i) \lambda_{\min}(K_S) \lambda_{\min}(K_p) \|e\| \left(\|e\| - \frac{k}{\lambda_{\min}(K_p)} \right) \leq 0 \end{aligned} \quad (6-49)$$

Por lo tanto, para que $\dot{V} \leq 0$

$$\|e\| > \frac{k}{\lambda_{\min}(K_p)} = \psi \quad (6-50)$$

Ahora considerando $\tilde{w} = w^* - w$, $\tilde{c} = c^* - c$ y $\tilde{\sigma} = \sigma^* - \sigma$ y con $w^* = 0$, $\dot{c}^* = 0$, $\sigma^* = 0$, entonces las reglas de ajuste se expresan como:

$$\dot{w} = \alpha \xi e^T K_i K_S K_p \quad (6-51)$$

$$\dot{c} = \beta w K_p K_S K_i e \quad (6-52)$$

$$\dot{\sigma} = \gamma \Gamma w K_p K_S K_i e \quad (6-53)$$

La ecuación (6-50) implica que las normas del error de control están limitadas en última instancia por el valor:

$$\psi = \frac{k}{\lambda_{\min}(K_p)} \quad (6-54)$$

Se puede afirmar que la técnica de control propuesta presenta una estabilidad uniformemente acotada cuya cota está definida por la ec. (6-54)

6.7. Resultados de Simulación

Para validar la estructura de control desarrollada en los apartados anteriores, se diseña un escenario de navegación con dos obstáculos situados en posiciones estratégicas, con el objetivo de activar el controlador anticolidión. La trayectoria de referencia elegida para realizar la simulación para la carga es la lemniscata de la curva de Bernoulli definida como:

$$\xi_\ell(t) = \begin{bmatrix} R \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \\ R \sin\left(\frac{4\pi t}{T}\right) \\ 2 + 10t/T \end{bmatrix} \quad (6-55)$$

con un tiempo total de simulación de $T = 180$ segundos, siendo t el instante de simulación actual, y R el radio de la trayectoria de la lemnisca ascendente. Las ganancias del controlador cinemático se han fijado en $K_{\ell,1} = \text{diag}(0.75, 0.75, 0.75)$, $K_{\ell,2} = \text{diag}(0.475, 0.475, 0.475)$, $k_{\gamma 1,1} = 0.01$, $k_{\gamma 1,2} = 0.75$, $k_{\gamma 2,1} = 0.5$, $k_{\gamma 2,2} = 0.75$, $k_{\psi 1,1} = k_{\psi 2,1} = 0.5$, $k_{\psi 1,2} = k_{\psi 2,2} = 0.75$, $k_{d,1} = 0.5$ y $k_{d,2} = 0.75$. Los pesos de la RBF-FT se inicializan con números aleatorios $\in (0, 1)$. Tras iniciar la simulación, estos valores se actualizan en cada tiempo de muestreo mediante las ecuaciones (6-45), (6-46) y (6-47) a lo largo de la ejecución de la tarea. De esta forma, el término neuronal calculado

a través de la red permite mejorar el rendimiento del sistema de control en línea. En las simulaciones se utilizan diez neuronas en la capa oculta.

La carga útil pesa 400 gr y este valor se decidió teniendo en cuenta la carga útil máxima de 200 gr especificada por el fabricante del quadrotor adoptado. Por lo tanto, la carga útil no puede ser transportada por un solo quadrotor. Además, en el entorno de simulación se consideran dos obstáculos, el primero estático y el segundo dinámico. Sus posiciones vienen dadas por

$$\xi_{0,1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} \quad y \quad \xi_{0,2}(t) = \begin{bmatrix} R_2 \cos\left(\frac{20\pi t}{T}\right) \\ R_2 \sin\left(\frac{20\pi t}{T}\right) \\ 11 \end{bmatrix} \quad (6-56)$$

donde $R_2 = 0.9 \text{ m}$ es el radio de la trayectoria seguida por el obstáculo.

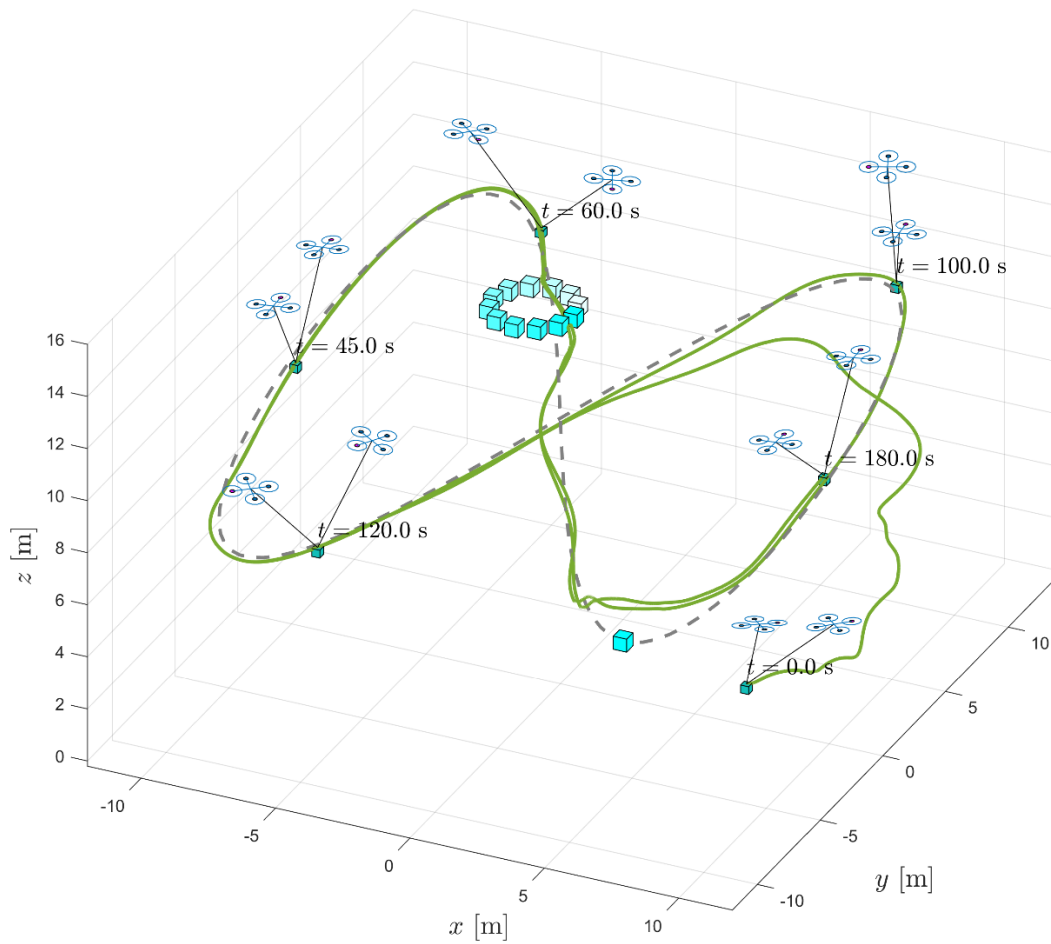


figura 6-5: Vistas superior y 3D de los recorridos seguidos por los vehículos y la carga.

La figura 6-5 muestra la evolución del sistema aéreo con la técnica propuesta. La figura 6-5 muestran una vista superior de la trayectoria seguida por la carga suspendida por cables desde los UAV. De acuerdo con la definición de los objetivos de control presentada en la Sección 6.2, la evasión de obstáculos es la tarea con la máxima jerarquía. Así, esta tarea se cumple siempre y las restantes se logran cuando no hay obstáculos cerca. Así, se observa que la formación se aleja de la trayectoria de referencia cuando los obstáculos están cerca de la carga o de los UAVs. De esta forma, durante la ejecución de la tarea de evasión de colisión, las demás tareas no se ejecutan.

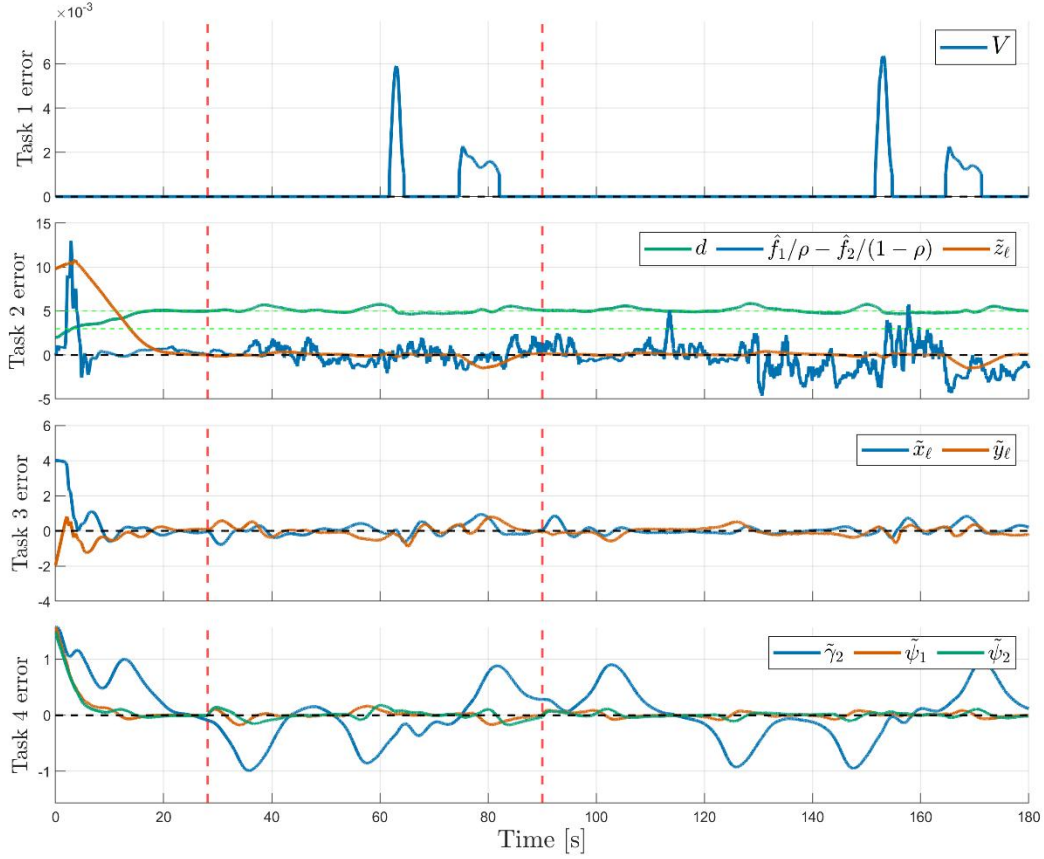


figura 6-6: Evolución temporal de los errores de formación.

La figura 6-6 presenta la evolución temporal de los cuatro errores de control del controlador de formación explicados en la sección 2. La primera subfigura muestra el campo de potencial ficticio no negativo V del controlador de evitación de colisiones presentado en [108], que es nulo en zonas de navegación libre y es positivo en zonas donde hay obstáculos. Nótese que la formación se mantiene alejada de los obstáculos ya que V es siempre próximo a cero. La segunda subfigura presenta la distancia entre los quadrotors d , el error de altitud, una curva que indica si el peso de la carga está adecuadamente distribuido. El intervalo de distancia deseado está definido por los valores mínimo y máximo $d_m = 5$ y $d_M = 10$. Durante la simulación, la distancia se mantiene dentro de este intervalo. La tercer subfigura indica el error de la posición de la carga en el plano x-y

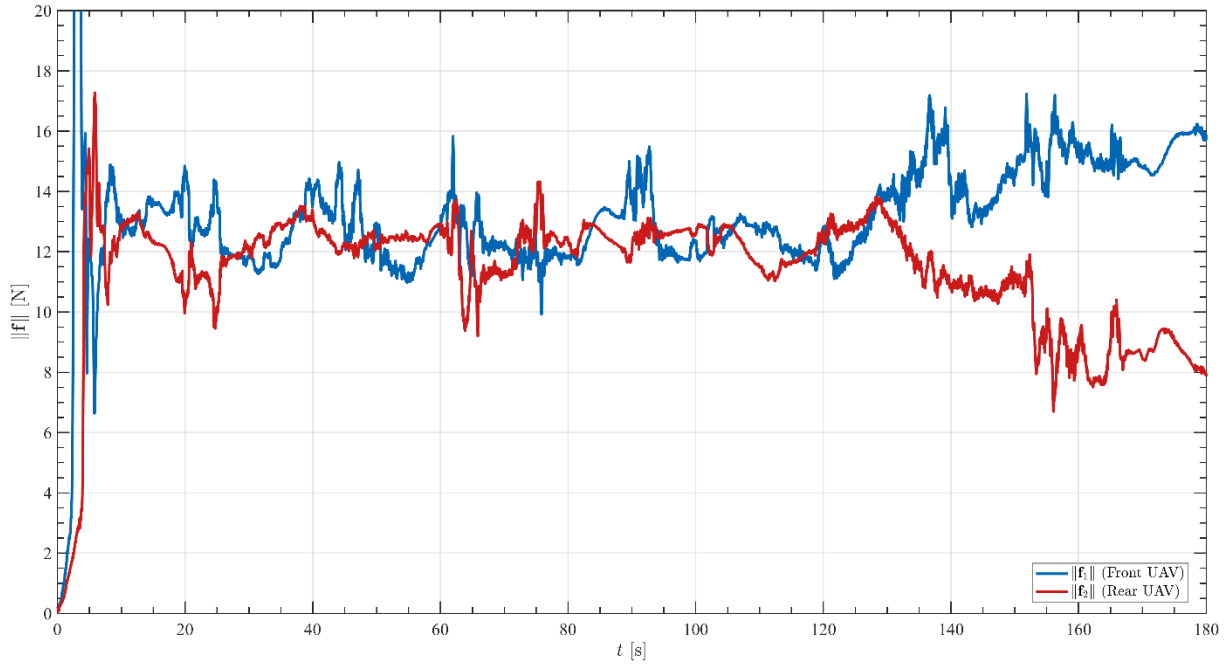


figura 6-7: Distribución de la carga útil a lo largo de la simulación.

Además, la distribución del peso se definió en 50% para cada quadrotor, de modo que $\rho = 0.5$. La figura 6-7: Distribución de la carga útil a lo largo de la simulación. presenta el peso soportado por cada UAV. De lo observado de la simulación pueden notarse que los errores de seguimiento aumentan cuando el controlador de espacio nulo actúa para evitar una colisión. Dado que la evasión de colisiones tiene prioridad sobre el seguimiento de la trayectoria. Por lo tanto, la evasión de colisiones está garantizada por el controlador de espacio nulo, mientras que la tarea de seguimiento de trayectoria está en un segundo nivel de prioridad. Dado que el ángulo de guiñada de cada UAV es independiente en las variables de formación definidas previamente en la Sección 6.2, el cumplimiento de esta tarea no se ve afectado cuando se realizan tareas de evasión de obstáculos. Sin embargo, el ángulo de guiñada de la formación se modifica durante las maniobras de evasión de colisiones. Por lo tanto, se observan claramente las ventajas del esquema de control de la formación basado en espacio nulo propuesto aquí se observan claramente a través de las simulaciones descritas anteriormente.

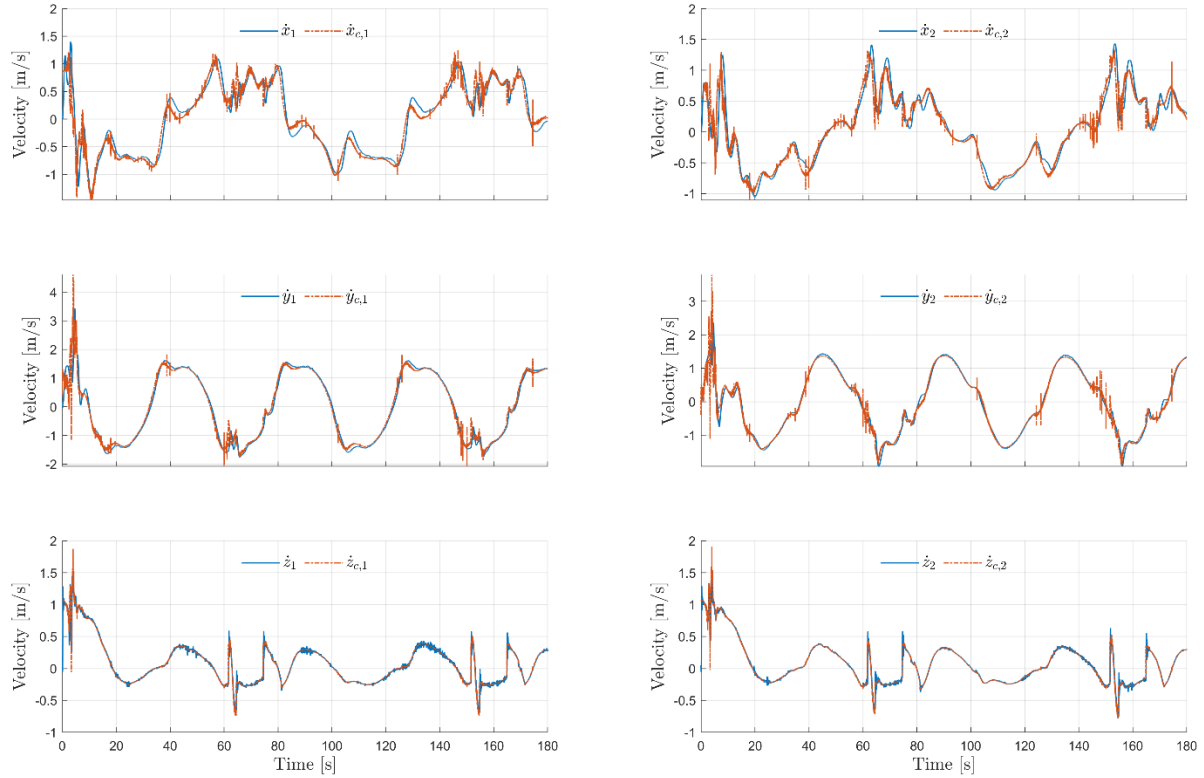


figura 6-8: Referencias de velocidad calculadas por el controlador cinemático de formación y las velocidades de cada UAV. Estos resultados se obtienen utilizando el PID con sistema neuronal de compensación

Las referencias de velocidad y sus valores reales para las variables x , y y z se comparan en la figura 6-8. Estos resultados se obtienen con el sistema de corrección neuronal sobre el PID interno de los UAV. En consecuencia, para validar la propuesta de control, se repitió el mismo experimento, ahora sin considerar el sistema de corrección neuronal.

La combinación del PID y del sistema de corrección neuronal RBF-FT permite obtener un controlador adaptativo con un buen rendimiento cuando la masa de la carga cambia y existen perturbaciones externas durante la navegación.

6.8. Consideraciones Finales

Se presenta una estructura de control dinámico para el transporte de cargas con múltiples cuadrotores. Se implementa como una combinación entre un controlador cinemático de formación y compensadores dinámicos conectados en cascada con dicho controlador cinemático. El controlador de formación se basa en múltiples objetivos de control, que son la evasión de colisiones, el seguimiento de la trayectoria de la posición de la carga útil, la distancia deseada entre los UAVs, la distribución equilibrada del peso de la carga entre ellos, la orientación de la formación y, finalmente, el ángulo de guiñada de cada quadrotor. Estas tareas se combinan de forma jerárquica en un controlador de espacio nulo. Además, se propone un novedoso corrector adaptable neuronal sobre el PID estático de cada UAV. El compensador dinámico se diseña para disminuir los errores de velocidad entre las referencias de velocidad calculadas por el controlador cinemático de formación y las velocidades reales de cada quadrotor. Está formado por un controlador PID estático propio del vehículo y un término de ajuste calculado por una red neuronal de RBF-FT, que actualiza sus parámetros en línea para actuar sobre la acción de control del PID para reducir los errores de control debido a las

variaciones paramétricas. Se presenta simulaciones numéricas con dinámica y entorno de navegación altamente realistas validan la propuesta.

Capítulo 7. Conclusiones y consideraciones finales

El desarrollo de controladores adaptables o neuro-adaptables para la estimación de las variaciones dinámicas de los vehículos autónomos (variaciones producidas por cambio de masa, o desplazamiento del centro de gravedad, etc.), los cuales son tratados en esta tesis, permitieron minimizar el error de seguimiento de trayectorias, cuyas referencias son previamente definidas.

Estos resultados se deben en parte a una buena elección del vector regresor de los diferentes controles propuestos gracias a la manera en la que se relacionan sus variables de entrada y de salida. También se demostró que la estrategia de estimación neuro adaptable en conjunto con controladores clásicos (Adaptive Control, STA y LABC) sobre distintas plataformas de vehículos autónomos demostraron su viabilidad técnica aportando una reducción del error de control. Las técnicas de control presentadas en esta tesis son optimizadas basado en las reglas de ajuste, las cuales se encuentran definidas por el error de control fueron obtenidas de un análisis de estabilidad del sistema. Esto implica que la técnica de control debe tener la capacidad de obtener resultados iguales o más significativos ante el seguimiento de trayectorias que impliquen geometrías muy distintas a las que se plantea en esta investigación. Como también la robustez del controlador ante perturbaciones externas, variaciones paramétricas y dinámicas no modeladas.

En los distintos capítulos considerados en esta tesis se presentaron distintos índices de comparación de los controladores propuestos con los existentes en la literatura científica de la temática. En los casos tratados se obtuvieron mejoras en el seguimiento de trayectorias reduciendo su error considerablemente. Este trabajo también presenta aportes en la aplicación de las técnicas de control y estimación basadas en herramientas neuro-adaptable aplicada a sistemas multi vehículos en acciones colaborativa, como el caso de control de formación que impliquen transporte de cargas. La tesis también muestra resultados de simulación y resultados experimentales en algunos de los vehículos aquí tratados que validan la hipótesis planteada.

Con los resultados obtenidos en la presente tesis se demuestra que la aplicación de técnicas de control neuro adaptable, mediante el uso de técnicas basadas específicamente en redes neuronales (tanto RBFNN y GRNN), y en combinación de técnicas de control no-lineal tradicional (LABC, Adaptive Control y STA) que permitió estimar las variaciones dinámicas de los vehículos autónomos tratados en los diferentes capítulos. Y como también, se obtuvo una ley de control que minimiza el error de trayectoria provocado por variaciones dinámicas. Que de esta forma se resuelve el problema planteado en la hipótesis de esta Tesis. La eficacia de los controladores propuesto en esta tesis es determinada mediante la comparación de los errores obtenidos con respecto a los controladores presentes en la literatura científica. También se logró completar al objetivo general, que fue obtener algoritmos de control avanzados de control adaptable no lineal basados en NN, cuya estabilidad fue demostrada en cada capítulo para cada vehículo tratado. Acorde a este objetivo también se completaron los objetivos específicos, inclusive se obtuvo resultados favorables en el control de formación para dos vehículos autónomos.

7.1. Trabajos futuros

Si bien en esta tesis se llegó a demostrar la viabilidad de la compensación dinámica sobre dos vehículos autónomos aéreos para transporte de cargas, la aplicación de estas técnicas sobre formación multi vehículo es un área de investigación de importancia. Inclusive entre vehículos de diferente naturaleza (formación UAV-UGV o UAV-USV), cuyo campo de aplicación es variado (transporte de cargas, vigilancia, defensa etc.). Donde estas temáticas pueden generar nuevas líneas de investigación tanto en el área de la robótica como el de control inteligente.

7.2. Difusión de los principales aportes de esta tesis

Con los resultados de esta temática de investigación se publicó un artículo en congreso internacional y cinco publicaciones en revista internacionales con referato. La lista de los trabajos se detalla a continuación:

- **Vacca Sisterna, C.**, Serrano, E., Scaglia, G. y Rossomando, F. (2021) «Control mixto para el seguimiento de trayectoria en buques marinos», *Revista Iberoamericana de Automática e Informática industrial*, 19(1), pp. 27–36. doi: 10.4995/riai.2021.15027.
- **Vacca, C. A.**, Scaglia, E. G., Ulloa-Vasquez, F. C., & Rossomando, F. G. (2023). «Diseño de una estrategia de control para robots móviles utilizando técnicas de álgebra lineal (LABC) y estimación neuronal en el seguimiento de trayectorias. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática industrial*. doi.org/10.4995/riai.2024.21484
- **Rosales C., Vacca, C. A.**, Rossomando, F. G, Gandolfo D., Soria C. and Carelli R., (2025) Super-Twisting Adaptive Control of a Quadrotor», *ISA Transactions, Elsevier*. doi.org/10.1016/j.isatra.2025.07.029
- Sahbi Boubaker, **Carlos Vacca**, Claudio Rosales, Souad Kamel Faisal S. Alsubaei and Francisco Rossomando (2025) «UAV Formation for Cargo Transport by PID Control with Neural Compensation», *Mathematics* <https://doi.org/10.3390/math13162650>

Referencias:

- [1]. National Institute of Standards and Technology Special Publication 1011. Autonomy Levels for Unmanned Systems (ALFUS) Framework, Volume I: Terminology, Version 1.1. September 2004. Available online: (accessed on 1 December 2020).
- [2]. Electronics Maker, Unmanned Vehicles—No pilot/driver on Board. 5 August 2014. Available online: (accessed on 1 December 2020).
- [3]. Daponte, P.; De Vito, L.; Mazzilli, G.; Picariello, F.; Rapuano, S.; Riccio, M. Metrology for drone and drone for metrology: Measurement systems on small civilian drones. In Proceedings of the 2015 IEEE Metrology for Aerospace (MetroAeroSpace), Benevento, Italy, 4–5 June 2015; pp. 306–311.
- [4]. Narayanan, A.; Rajeshirke, P.; Sharma, A.; Pestonjamas, K. Survey of the emerging bio-inspired Unmanned Aerial Underwater Vehicles. In Proceedings of the 2nd International Conference on Emerging trends in Manufacturing, Engines and Modelling (ICEMEM - 2019), Mumbai, India, 23–24 December 2019; Volume 810.
- [5]. Sándor, Z. Challenges Caused by the Unmanned Aerial Vehicle in the Air Traffic Management. *Period. Polytech. Transp. Eng.* 2017, 47, 96–105.
- [6]. Shakhathreh, H.; Sawalmeh, A.H.; Al-Fuqaha, A.; Dou, Z.; Almaita, E.; Khalil, I.; Othman, N.S.; Khreishah, A.; Guizani, M. Unmanned Aerial Vehicles (UAVs): A Survey on Civil Applications and Key Research Challenges. *IEEE Access* 2019, 7, 48572–48634.
- [7]. Dilipraj, E. Technologies: Pragmatic Role of Robotics, 3D Printing and Supercomputers in Future Wars. In *Asian Defence Review 2016*; Knowledge World Publishers: New Delhi, India, 2016; ISBN 978-9383-649-90-7.
- [8]. Odedra, S. Using unmanned ground vehicle performance measurements as a unique method of terrain classification. In Proceedings of the 2011 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, San Francisco, CA, USA, 25–30 September 2011; pp. 286–291.
- [9]. Philips, A. Air- and Ground- Based Autonomous Vehicles Working Together, Dronelife.com. October 2014. Available online: (accessed on 1 December 2020).
- [10]. Ilas, C. Electronic sensing technologies for autonomous ground vehicles: A review. In Proceedings of the 8th International Symposium on Advanced Topics in Electrical Engineering (ATEE), Bucharest, Romania, 23–25 May 2013; pp. 1–6.
- [11]. Autonomous and Unmanned Surface Vessels for Marine Monitoring, Surveying and Rescue. Available online: (accessed on 1 December 2020).
- [12]. Vasudev, K.L. Review of Autonomous Underwater Vehicles. In *Autonomous Vehicles*; Dekoulis, G., Ed.; IntechOpen: London, UK, 2020; ISBN 978-1-83968-191-2.
- [13]. Heo, J.; Kim, J.; Kwon, Y. Technology Development of Unmanned Underwater Vehicles (UUVs). *J. Comput. Commun.* 2017, 5, 28–35.
- [14]. Ho, G.; Pavlovic, N.; Arrabito, R. Human Factors Issues with Operating Unmanned Underwater Vehicles. *Proc. Hum. Factors Ergon. Soc. Ann. Meet.* 2011, 55, 429–433.
- [15]. Bao-Li M., “Global k-exponential asymptotic stabilization of underactuated surface vessels,” *Syst. Control Lett.*, vol. 58, no. 3, pp. 194–201, Mar. 2009.
- [16]. Do K. D., Jiang Z. P., and Pan J., “Robust global stabilization of underactuated ships on a linear course: State and output feedback,” in *Proc. Process. Amer. Control Conf.*, 2002, pp. 1687–1692.
- [17]. Do K.D., Jiang Z. P., and Pan J., “Universal controllers for stabilization and tracking of underactuated ships,” *Syst. Control Lett.*, vol. 47, no. 4, pp. 299–317, Nov. 2002.
- [18]. Ghommam J., Mnif F., Benali A., and Derbel N., “Asymptotic backstepping stabilization of an underactuated surface vessel,” *IEEE Trans. Control Syst. Technol.*, vol. 14, no. 6, pp. 1150–1157, Nov. 2006.

- [19]. Godhavn J.M., Fossen T.I., Berge S.P. (1998). ‘Nonlinear adaptive backstepping designs for tracking control of ships’. *Int. J. Adapt. Control Signal Process.* 1998, 12, pp. 649–670.
- [20]. Jiang Z.P., Nijmeijer H. (1997). ‘Tracking control of mobile robots: a case study in backstepping’. *Automatica*, 1997, 33, pp. 1393–1399.
- [21]. Jiang Z. P., “Global tracking control of underactuated ships by Lyapunov’s direct method,” *Automatica*, vol. 38, no. 2, pp. 301–309, Feb. 2002.
- [22]. Lapiere L. and Jouvencel B., “Robust nonlinear path-following control of an AUV,” *IEEE J. Ocean. Eng.*, vol. 33, no. 2, pp. 89–102, Apr. 2008.
- [23]. LeCun Y., Bengio Y., and G. Hinton G., “Deep learning,” *Nature*, vol. 521, pp. 436–444, May 2015.
- [24]. Rosales A., Scaglia G., Mut V. and di Sciascio F. (2009). Trajectory tracking of mobile robots in dynamic environments—a linear algebra approach. *Robotica*, Volume 27, Issue 07, Dec 2009, pp 981-997 doi: 10.1017/S0263574709005402, Published online by Cambridge University Press 26 Feb 2009.
- [25]. Rosales A., Scaglia G., Mut V., di Sciascio F. (2009). Navegación de Robots Móviles en Entornos no Estructurados utilizando Álgebra Lineal. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial*, ISSN 1697-7912, vol 6 N° 2, pp 79-88.
- [26]. Rosales, C., Soria, C. M., & **Rossomando**, F. G. (2019). Identification and adaptive PID Control of a hexacopter UAV based on neural networks. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 33(1), 74-91.
- [27]. Rosales Claudio, Leica Paulo, Sarcinelli-Filho Mario, Scaglia Gustavo, Carelli Ricardo, (2016), 3D Formation Control of Autonomous Vehicles Based on Null-Space. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, pp 1-15, ISSN 0921-0296.
- [28]. Rosales C., Gandolfo D., Scaglia G., Jordan M., Carelli R.. Trajectory tracking of a mini four-rotor helicopter in dynamic environments - a linear algebra approach. *Robotica*. doi:10.1017/S0263574714000952. ISSN: 0263-5747. *Robotica/ Volume 33 / Issue 08 / October 2015*, pp. 1628-1652.
- [29]. Rossomando F. G., Soria C., Carelli R.. “Autonomous Mobile Robot Navigation using RBF Neural Compensator”, *Control Engineering Practice*, ISSN 0967-0661, Vol.19, N°3, pp. 215–222, editorial Elsevier. DOI: 10.1016/j.conengprac.(2010).11.011.
- [30]. Rossomando F. G., Soria C., Carelli R.. “Adaptive Neural Sliding Mode Compensator for a class of Nonlinear Systems with Unmodeled Uncertainties” *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, editorial Elsevier, ISSN:0952-1976, Vol.26, serie 10, pp. 2251-2259. DOI:10.1016/j.engappai.2013.08.008 (2013).
- [31]. Rossomando F. G., Soria C., Carelli R. “Sliding Mode Neuro Adaptive Control in Trajectory Tracking for Mobile Robots”, *Journal of Intelligent and Robotic Systems: Volume 74, Issue 3 (2014)*, Page 931-944 ISSN: 0921-0296, editorial Springer, DOI: 10.1007/s10846-013-9843-5.
- [32]. Rossomando, F. G., & Soria, C. M. Identification and control of nonlinear dynamics of a mobile robot in discrete time using an adaptive technique based on neural PID. *Neural Computing and Applications*, 26(5), 1179-1191, (2015).
- [33]. Rossomando F. G., Soria C.. "Discrete Time Sliding Mode Neuro Adaptive Controller for SCARA Robot Arm", *Neural Computing and Applications (NCAA)* ISSN: 0941-0643, editorial Springer (2016), DOI: 10.1007/s00521-016-2242-7.
- [34]. Scaglia G., Quintero O. L., Mut V., di Sciascio F. (2009). “Numerical Methods Based Controller Design for Mobile Robots”. *Robotica*, Volume 27, Issue 02, Mar 2009, pp 269-279 doi: 10.1017/S0263574708004669, Published online by Cambridge University Press 23 Jun 2008 ISSN 0263-5747.

- [35]. Scaglia G., Rosales A., Quintero L., Mut V., Agarwal R..(2010). "A Linear-Interpolation-based Controller Design for trajectory Tracking of Mobile Robots". Control Engineering Practice, vol. 18 (2010), Volume 18, Issue 3, March 2010, Pages 318–329ISSN: 0967-0661.
- [36]. Scaglia G. J. E., Serrano E., Rosales A., Albertos P., Linear interpolation based controller design for trajectory tracking under uncertainties: Application to mobile robots, Control Engineering Practice, Volume 45, December 2015, pp. 123-132, ISSN 0967-0661, <http://dx.doi.org/10.1016/j.conengprac.2015.09.010>.
- [37]. Scaglia G. J. E., Vicente A. Mut, Mario Jordan, Carlos Calvo, Lucia Quintero (2009). "MOBILE ROBOT CONTROL BASED ON ROBUST CONTROL TECHNIQUES", Journal of Engineering Mathematics Volume 63 Number 1, DOI 10.1007/s10665-008-9252-0, enero 2009, page 17-32, ISSN 0022-0833 (Print) 1573-2703 (Online), Editor Springer Netherlands
- [38]. Serrano Mario E., Godoy Sebastián A., Rómoli Santiago and Scaglia Gustavo J.E. (2017). "A Numerical Approximation-Based Controller for Mobile Robots with Velocity Limitation." ASIAN JOURNAL OF CONTROL. Version of Record online : 11 APR 2017, DOI: 10.1002/asjc.1522. ISSN 1934-6093.
- [39]. Serrano, M.E., Godoy, S.A., Quintero, L., Gustavo J. E. Scaglia (2016). Interpolation Based Controller for Trajectory Tracking in Mobile Robots. Journal of Intelligent & Robotic Systems. doi:10.1007/s10846-016-0422-4. ISSN 0921-0296.
- [40]. Serrano M. E., Godoy S., Mut V., Ortiz O., Scaglia G.. "A nonlinear trajectory tracking controller for mobile robots with velocity limitation via parameters regulation". Robotica Cambridge University, doi:10.1017/S026357471500020X.
- [41]. Serrano, M. E., Scaglia, G. J., Godoy, S. A., Mut, V., & Ortiz, O. A. (2013). Trajectory tracking of underactuated surface vessels: A linear algebra approach. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 22(3), 1103-1111.
- [42]. Serrano M. E., Scaglia G., Auat Cheein F., Mut V. and Ortiz O. (2015). Trajectory-tracking controller design with constraints in the control signals: a case study in mobile robots. Robotica, 33, pp 2186-2203, diciembre 2015. doi:10.1017/S0263574714001325.
- [43]. Serrano M. E., Scaglia G. J.E., Mut V., Ortiz O.A., Jordan M., (2013), "Linear Algebra Based Controller Design: a case study in Underactuated Surface Vessels", Control Engineering and Applied Informatics Journal. Vol.15, No.4 pp. 15-25, 2013. ISSN 1454-8658.
- [44]. Serrano M. E., Godoy Bordes S. A., Gandolfo D., Mut V. A., & Scaglia G. J. E. . "Nonlinear Trajectory Tracking Control for Marine Vessels with Additive Uncertainties" 2018.
- [45]. Schmidhuber J., "Deep learning in neural networks: An overview," Neural Netw., vol. 61, pp. 85–117, Jan. 2015.
- [46]. Shima, T., & Rasmussen, S. (Eds.). (2009). UAV cooperative decision and control: challenges and practical approaches. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [47]. Tee K. P. and Ge S. S., "Control of fully actuated ocean surface vessels using a class of feedforward approximators control of fully actuated ocean surface vessels using a class of feedforward approximators," IEEE Trans. Control Syst. Technol., vol. 14, no. 4, pp. 750–756, Jul. 2006.
- [48]. Vepa, R. (2016). Nonlinear Control of Robots and Unmanned Aerial Vehicles: An Integrated Approach. CRC-Press.
- [49]. Wondergem M., E. Lefeber E., Pettersen K. Y., and Nijmeijer H., "Output feedback tracking of ships," IEEE Trans. Control Syst. Technol., vol. 19, no. 2, pp. 442–448, Mar. 2011.

- [50]. Yu-Lei L., Lei W., and Jia-Yuan Z., "Backstepping dynamical sliding mode control method for the path following of the underactuated surface vessel," *Procedia Eng.*, vol. 15, pp. 256–263, Dec. 2011.
- [51]. Zheng, Z., & Sun, L. (2016). Path following control for marine surface vessel with uncertainties and input saturation. *Neurocomputing*, 177, 158-167.
- [52]. Isidori A. *Nonlinear control systems II*. Springer-Verlag, 1999.
- [53]. Slotine, J.-J.E., and W. Li. 1991. *Applied Nonlinear Control*. Upper Saddle River: Prentice Hall.
- [54]. Hung, L.C., Chung, H.Y.: Decoupled control using neural network-based sliding-mode controller for nonlinear systems. *Expert Syst. Appl. Elsevier* **32**, 1168–1182 (2007)
- [55]. Sastry, S. 1999. *Nonlinear Systems*. New York: Springer.
- [56]. Zinober, A.S.I., ed. (1990). *Deterministic control of uncertain systems*. London: Peter Peregrinus Press. ISBN 978-0-86341-170-0.
- [57]. Utkin, Vadim I. (1993). "Sliding Mode Control Design Principles and Applications to Electric Drives". *IEEE Transactions on Industrial Electronics*. 40 (1): 23–36.
- [58]. Utkin, Vadim I. Variable Structure systems with Sliding Modes. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 22, 2, 212-222, 1977.
- [59]. Hung J. Y, Gao W., and Hung J.C, "Variable Structure Control: A Survey", *IEEE Trans. on Industrial Electronics*, vol. 40, No. 1, Feb. 1993
- [60]. Slotine, J. J. E., & Li, W. (1991). *Applied nonlinear control* (Vol. 199, No. 1, p. 705). Englewood Cliffs, NJ: Prentice hall.
- [61]. Specht, D. F. (1991). A general regression neural network. *IEEE transactions on neural networks*, 2(6), 568-576.
- [62]. Chen T., Chen H., Approximations of continuous functionals by neural networks with application to dynamic systems, *IEEE Transactions on Neural Networks* 4 (6) (1993) 910–918.
- [63]. Haykin S., *Neural Networks: A Comprehensive Foundation*, Prentice Hall, NJ 1999.
- [64]. Liu Y.J., Li S., Tong S., and Chen C.L.P., Neural approximation-based adaptive control for a class of nonlinear nonstrict feedback discrete-time systems, *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 99, 1–11 doi:10.1109/TNNLS.2016.2531089.
- [65]. Park J., Sandberg I., *Neural Networks* 1993, 3, 246.
- [66]. Hornik K. Multilayer feedforward networks are universal approximators. *Neural Networks*, 2:359–366, 1989.
- [67]. Norgaard M., O. Ravn O., Poulsen N., and Hansen L.. *Neural Networks for Modelling and Control of Dynamic System*. Springer-Verlag, London, UK, 2000.
- [68]. De La Cruz, C., Carelli, R.: 'Dynamic modeling and centralized formation control of mobile robots'. 32nd Annual Conf. on IEEE Industrial Electronics Society IECON, Paris, 2006
- [69]. Cyhenko, G.: 'Approximation by superpositions of a sigmoidal function', *Math. Control Signal, Syst.*, 1989, 2, pp. 303–31420
- [70]. Martins, F.N., Celeste, W.C., Carelli, R., Sarcinelli Filho, M., Bastos Filho, T.F.: 'An adaptive dynamic controller for autonomous mobile robot trajectory tracking', *Control Eng. Pract.*, 2008, 16, pp. 1354–1363.
- [71]. Yang Y., Du J., Liu H., Guo C., & Abraham A., (2013). "A trajectory tracking robust controller of surface vessels with disturbance uncertainties". *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 22(4), 1511-1518, 2013
- [72]. Pierson W., Peteherych S., & Wilkerson J., "The winds of the comparison data set for the Seasat Gulf of Alaska Experiment". *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, 5(2), 169-176, 1980

- [73]. Dai SL, He S, Lin H. "Transverse function control with prescribed performance guarantees for underactuated marine surface vehicles". *International Journal of Robust and Nonlinear Control* 2019; 29(5): 1577–1596.
- [74]. Yu Y, Guo C, Yu H. "Finite-time predictor line-of-sight-based adaptive neural network path following for unmanned surface vessels with unknown dynamics and input saturation". *International Journal of Advanced Robotic Systems* 2018; 15(6): 1729881418814699.
- [75]. Blazic, S., 2011. A novel trajectory tracking control law for wheeled mobile robots. *Robotics and Autonomous Systems* 59 (11), 1001-1007.
- [76]. Jung, S., 2012. Experiences in developing an experimental robotics course program for undergraduate education. *IEEE Transactions on Education* 56 (1), 129-136.
- [77]. Damodaran, S., Kumar, T. S., Sudheer, A. P., 2017. Design and implementation of ga tuned pid controller for desired interaction and trajectory tracking of wheeled mobile robot. En: *Proceedings of the Advances in Robotics*. pp.1-6.
- [78]. Gu, D., Hu, H., 2002. Neural predictive control for a car-like mobile robot. *Robotics and Autonomous Systems* 39 (2), 73-86.
- [79]. Yang, C., Ma, H., Fu, M., Yang, C., Ma, H., Fu, M., 2016. Robot kinematics and dynamics modeling. *Advanced technologies in modern robotic applications*, 27-48
- [80]. Scaglia, G. J. E., Serrano, M. E., Godoy, S. A., Rossomando, F., 2020. Linear algebra-based controller for trajectory tracking in mobile robots with additive uncertainties estimation. *IMA Journal of Mathematical Control and Information* 37 (2), 607-624.
- [81]. Sira-Ramirez, H., L'opez-Urbe, C., Velasco-Villa, M., 2013. Linear observerbased active disturbance rejection control of the omnidirectional mobile robot. *Asian Journal of Control* 15 (1), 51-63.
- [82]. Sun, Z., Xia, Y., Dai, L., Liu, K., Ma, D., 2017. Disturbance rejection MPC for tracking of wheeled mobile robot. *IEEE/ASME Transactions On Mechatronics* 22 (6), 2576-2587.
- [83]. Fareh, R., Khadraoui, S., Abdallah, M. Y., Baziyad, M., Bettayeb, M., 2021. Active disturbance rejection control for robotic systems: A review. *Mechatronics* 80, 102671.
- [84]. Pantano, M. N., Serrano, M. E., Fernandez, M. C., Rossomando, F. G., Ortiz, O.A., Scaglia, G. J., 2017. Multivariable control for tracking optimal profiles in a nonlinear fed-batch bioprocess integrated with state estimation. *Industrial and Engineering Chemistry Research* 56 (20), 6043-6056.
- [85]. Poggio, T., Girosi, F., 1990. Networks for approximation and learning. *Proceedings of the IEEE* 78 (9), 1481-1497.
- [86]. Gomez, J., Rossomando, F., Capraro, F., Soria, C., 2023. Real-time neuroadaptive pi control of soil moisture by using a hybrid model. *Revista Iberoamericana de Automatica e Inform'atica industrial* 20 (1), 93-103.
- [87]. Yu, H., Xie, T., Paszczynski, S., Wilamowski, B. M., 2011. Advantages of radial basis function networks for dynamic system design. *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 58 (12), 5438-5450.
- [88]. Farooq, U., Hasan, K., Hanif, A., Amar, M., Asad, M. U., 2014. Fuzzy logic based path tracking controller for wheeled mobile robots. *International Journal of Computer and Electrical Engineering* 6 (2), 77.
- [89]. Gu, D., Hu, H., 2002. Neural predictive control for a car-like mobile robot. *Robotics and Autonomous Systems* 39 (2), 73-86.
- [90]. Lee, J. H., Lin, C., Lim, H., Lee, J. M., 2009. Sliding mode control for trajectory tracking of mobile robot in the rfid sensor space. *International Journal of Control, Automation and Systems* 7, 429-435.
- [91]. Park, J.-W., Kwak, H.-J., Kang, Y.-C., Kim, D.W., et al., 2016. Advanced fuzzy potential field method for mobile robot obstacle avoidance. *Computational intelligence and neuroscience* 2016.

- [92]. Ye, J., 2008a. Adaptive control of nonlinear pid-based analog neural networks for a nonholonomic mobile robot. *Neurocomputing* 71 (7-9), 1561-1565.
- [93]. Ye, J., 2008b. Tracking control for nonholonomic mobile robots: Integrating the analog neural network into the backstepping technique. *Neurocomputing* 71 (16-18), 3373-3378.
- [94]. Das, T., Kar, I. N., 2006. Design and implementation of an adaptive fuzzy logic based controller for wheeled mobile robots. *IEEE Transactions on Control systems technology* 14 (3), 501-510.
- [95]. H. Lee, V. I. Utkin, Chattering suppression methods in sliding mode control systems, *Annual reviews in control* 31 (2) (2007) 179-188.
- [96]. M. Sarcinelli-Filho, R. Carelli, Dynamic models, in: *Control of Ground and Aerial Robots*, chapter 3, Springer International Publishing, Cham, Switzerland, 2023, pp. 23{39. doi:10.1007/978-3-031-23088-2_3.
- [97]. Y. Chalam, *Adaptive control systems: Techniques and applications*, Routledge, 2017.
- [98]. A. Levant, Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control, *International journal of control* 58 (6) (1993) 1247-1263.
- [99]. M. Labbadi, Y. Boukal, M. Cherkaoui, Path following control of quadrotor uav with continuous fractional-order super twisting sliding mode, *Journal of Intelligent & Robotic Systems* 100 (3) (2020) 1429-1451.
- [100]. R. Jiao, W. Chou, Y. Rong, M. Dong, Anti-disturbance control for quadrotor uav manipulator attitude system based on fuzzy adaptive saturation super-twisting sliding mode observer, *Applied Sciences* 10 (11) (2020) 3719.
- [101]. E. Paiva, J. Rodas, Y. Kali, R. Gregor, M. Saad, Robust flight control of a tri-rotor uav based on modified super-twisting algorithm, in: *2019 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS)*, IEEE, 2019, pp. 551-556.
- [102]. Wang, K., 2012. Near-optimal tracking control of a nonholonomic mobile robot with uncertainties. *International Journal of Advanced Robotic Systems* 9 (3), 66..
- [103]. Shtessel Y., Edwards C., Fridman L., Levant A., "Introduction: Intuitive Theory of Sliding Mode Control" en *Sliding mode Control and Observation*, Ed. Birkhäuser, 2014.
- [104]. Camacho, O., Rojas, R., & García-Gabín, W. (2007). Some long time delay sliding mode control approaches. *ISA transactions*, 46(1), 95-101.
- [105]. Santana L. V., Brandao A. S., Sarcinelli-Filho M., Carelli R., A trajectory tracking and 3D positioning controller for the AR.Drone quadrotor, in: *Proc. Int. Conf. on Unmanned Aircraft Systems*, 2014, pp. 756–767.
- [106]. Perez-Alcocer R., Moreno-Valenzuela J., Adaptive control for quadrotor trajectory tracking with accurate parametrization, *IEEE Access* 7 (2019) 53236–53247.
- [107]. Santos M. C., Santana L. V., Martins M. M., Brandao A. S., Sarcinelli-Filho M., Estimating and controlling UAV position using RGB-D/IMU data fusion with decentralized information/Kalman filter, in: *Proc. 2015 IEEE Int. Conf. on Industrial Technology*, pp. 232–239.
- [108]. Santos M. C. P., Rosales C. D., Sarcinelli-Filho M., Carelli R., A novel nullspace-based UAV trajectory tracking controller with collision avoidance, *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics* 22 (6) (2017) 2543–2553.
- [109]. Santos M. C. P., Rosales C. D., Sarapura J. A., Sarcinelli-Filho M., Carelli R., An adaptive dynamic controller for quadrotor to perform trajectory tracking tasks, *Journal of Intelligent & Robotic Systems* 93 (1-2) (2019) 5–16.
- [110]. F. Kendoul, Z. Yu, K. Nonami, Guidance and nonlinear control system for autonomous flight of minirotorcraft unmanned aerial vehicles, *Journal of Field Robotics* 27 (3) (2010) 311–334.
- [111]. Carrillo L. R. G., Lopez A. E. D., Lozano R., Pegard C., *Quad rotorcraft control: vision - based hovering and navigation*, Springer-Verlag, London, UK, 2012.

- [112]. Bouadi H., Tadjine M., Nonlinear observer design and sliding mode control of four rotors helicopter, *Int. Journal of Mechanical, Aerospace, Industrial, Mechatronic and Manufacturing Engineering* 1 (7) (2007) 354–359.
- [113]. Bouadi H., Bouchoucha M., Tadjine M., Sliding mode control based on backstepping approach for an UAV type-quadrotor, *World Academy of Science, Engineering and Technology* 26 (5) (2007) 22–27.
- [114]. Luukkonen T., Modelling and control of quadcopter (Aalto University, Espoo, Finland, Int. Rep. 22, 2011).
- [115]. Bangura M., Mahony R., Nonlinear dynamic modeling for high performance control of a quadrotor, in: *Proc. Australasian Conf. on Robotics and Automation*, 2012, pp. 115–124.
- [116]. Von asek K. T, V., Fiser D., Faigl J., AR-Drone as a robotic platform for research and education, in: *Proc. Int. Conf. on Research and Education in Robotics*, 2011, pp. 1–15.
- [117]. Engel J., Sturm J., Cremers D., Camera-based navigation of a low-cost quadcopter, in: *Proc. IEEE/RSJ Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems*, 2012, pp. 2815–2821.
- [118]. Hernandez A., Copot C., De Keyser R., Vlas T., Nascu I., Identification and path following control of an AR.Drone quadrotor, in: *Proc. 17th Int. Conf. on System Theory, Control and Computing*, 2013, pp. 583–588.
- [119]. Falcon P., Barreiro A., Cacho M. D., Modeling of Parrot Ardrone and passivity-based reset control, in: *Proc. 9th Asian Control Conf.*, 2013, pp. 1–6.
- [120]. Santana L. V., Brandao A. S., Sarcinelli-Filho M., Navigation and cooperative control using the AR.Drone quadrotor, *Journal of Intelligent & Robotic Systems* 84 (1-4) (2016) 327–350.
- [121]. Santos M. C., Sarcinelli-Filho M., Carelli R., Trajectory tracking for UAV with saturation of velocities, in: *Proc. Int. Conf. on Unmanned Aircraft Systems*, 2016, pp. 643–648.
- [122]. Rosales C. D., Tosetti S. R., Soria C. M. , Rossomando F. G., Neural adaptive PID control of a quadrotor using EFK, *IEEE Latin America Transactions* 16 (11) (2018) 2722–2730.
- [123]. Rosales C., Gimenez J., Rossomando F, Soria C., Sarcinelli-Filho M., Carelli R., UAVs formation control with dynamic compensation using neuro adaptive SMC, in: *Int. Conf. on Unmanned Aircraft Systems*, 2019, pp. 93–99.
- [124]. Rossomando F, Rosales C., Gimenez J., Salinas L., Soria C., Sarcinelli-Filho M., Carelli R., Aerial load transportation with multiple quadrotors based on a kinematic controller and a neural SMC dynamic compensation, *Journal of Intelligent & Robotic Systems* (2020).
- [125]. Sarapura J. A., Roberti F, Toibero J. M., Sebastian J. M., Carelli R., Visual servo controllers for an UAV tracking vegetal paths, in: *Machine Vision and Navigation*, Springer, Cham, Switzerland, 2020, pp. 597–625.
- [126]. Capraro F., Rossomando F. G., Soria C., Scaglia G., Cascade sliding control for trajectory tracking of a nonholonomic mobile robot with adaptive neural compensator, *Mathematical Problems in Engineering* 2017 (2017) 1–13.
- [127]. Chen T., Chen H., Approximations of continuous functionals by neural networks with application to dynamic systems, *IEEE Transactions on Neural Networks* 4 (6) (1993) 910–918.
- [128]. Lewis F. L., Campos J., Selmic R., Neuro-fuzzy control of industrial systems with actuator nonlinearities, *Society for Industrial and Applied Mathematics*, Philadelphia, PA, USA, 2002.

- [129]. Liu Z., Chen C. P., Broad learning system: Structural extensions on singlelayer and multi-layer neural networks, in: Proc. Int. Conf. on Security, Pattern Analysis, and Cybernetics, 2017, pp. 136–141.
- [130]. [33] G. Cybenko, “Approximation by superpositions of a sigmoidal function,” *Mathematics of control, signals and systems*, vol. 2, no. 4, pp. 303–314, 1989.
- [131]. Li S., Wang Y., Tan J., Zheng Y., Adaptive RBFNNs/integral sliding mode control for a quadrotor aircraft, *Neurocomputing* 216 (2016) 126–134.
- [132]. Seng T. L., Khalid M., Yusof R., Adaptive GRNN for the modelling of dynamic plants, in: Proc. IEEE Internatinal Symp. on Intelligent Control, 2002, pp. 217–222.
- [133]. Polat O., Yıldırım T., Genetic optimization of GRNN for pattern recognition without feature extraction, *Expert Systems with Applications* 34 (4) (2008) 2444–2448.
- [134]. Li H.-Z., Guo S., Li C.-J., Sun J.-Q., A hybrid annual power load forecasting model based on generalized regression neural network with fruit fly optimization algorithm, *Knowledge-Based Systems* 37 (2013) 378–387.
- [135]. Al-Mahasneh A. J., Anavatti S. G., Garratt M. A., Altitude identification and intelligent control of a flapping wing micro aerial vehicle using modified generalized regression neural networks, in: Proc. IEEE Symp. Series on Computational Intelligence, 2017, pp. 1–6.
- [136]. Gimenez, J., Gandolfo, D., Salinas, L., Rosales, C., Carelli, R.: Multi-objective control for cooperative payload transport with rotorcraft uavs. *ISA Trans.* 80, 491–502 (2018)
- [137]. [32] C. Powers, D. Mellinger, and V. Kumar, “Quadrotor kinematics and dynamics,” *Handbook of Unmanned Aerial Vehicles*, pp. 307–328, 2015.
- [138]. Santos, M.C., Santana, L.V., Brandao, A.S., Sarcinelli-Filho, M., Carelli, R.: Indoor low-cost localization system for controlling aerial robots. *Control. Eng. Pract.* 61, 93–111 (2017)
- [139]. Mellinger M.N., Lindsey D., Kumar Q.: The grasp multiple micro-uav testbed. *IEEE Robot. Autom. Mag.* 17(3), 56–65 (2010)
- [140]. Rosales, C., Soria, C., Carelli, R., Rossomando, F.: Adaptive dynamic control of a quadrotor for trajectory tracking. In: 2017 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS), pp. 547–553. IEEE (2017)
- [141]. Vt, S.E., Shin, Y.C.: Radial basis function neural network for approximation and estimation of nonlinear stochastic dynamic systems. *IEEE Trans. Neural Netw.* 5(4), 594–603 (1994).

Apéndice A. Análisis de Estabilidad

Teorema 1: Considerando el sistema definido por (3-2) y el modelo estimador (3-9). El observador de errores neuronales basado en funciones RBF es SGUUB.

Prueba: Una función candidata de Lyapunov $\mathcal{L}_{n,i}$ función definida positiva por:

$$\mathcal{L}_{n,i} = \tilde{E}_{n,i}^2 + \gamma^{-1} (\tilde{w}_{n-1,i}^T \tilde{w}_{n-1,i}) \quad (\text{A.1})$$

Ahora, haciendo la diferencia en tiempo discreto, $\Delta \mathcal{L}_{n,i}$ se escribe de la siguiente manera:

$$\Delta \mathcal{L}_{n,i} = \mathcal{L}_{n+1,i} - \mathcal{L}_{n,i} = \tilde{E}_{n+1,i}^2 - \tilde{E}_{n,i}^2 + \gamma^{-1} (\tilde{w}_{n,i}^T \tilde{w}_{n,i} - \tilde{w}_{n-1,i}^T \tilde{w}_{n-1,i}) \quad (\text{A.2})$$

Definiendo el segundo término de la ecuación anterior como:

$$\Delta w = \gamma^{-1} (\tilde{w}_{n,i}^T \tilde{w}_{n,i} - \tilde{w}_{n-1,i}^T \tilde{w}_{n-1,i}) \quad (\text{A.3})$$

Organizando (A.2) y considerando que $\Delta \tilde{E}_{n,i} = \tilde{E}_{n+1,i} - \tilde{E}_{n,i}$, obtenemos:

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{L}_{n,i} &= \tilde{E}_{n+1,i}^2 - \tilde{E}_{n,i}^2 + \Delta w = (\tilde{E}_{n,i} + \Delta \tilde{E}_{n,i})^2 - \tilde{E}_{n,i}^2 + \Delta w = \dots \\ &= 2 \tilde{E}_{n,i} \Delta \tilde{E}_{n,i} + \Delta \tilde{E}_{n,i}^2 + \Delta w \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Entonces, reemplazando (14) en (A.4), $\Delta \mathcal{L}_{n,i}$ se convierte en:

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{L}_{n,i} &= 2 \tilde{E}_{n,i} (\tilde{E}_{n+1,i} + \tilde{E}_{n,i}) + \Delta \tilde{E}_{n,i}^2 + \Delta w = \dots \\ &= 2 \tilde{E}_{n,i} \left(\tilde{w}_i^T \varphi(\hat{E}) - \lambda_i \tilde{E}_{n,i} + \bar{\varepsilon}_i - \tilde{E}_{n,i} \right) + \Delta \tilde{E}_{n,i}^2 + \Delta w \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Si ahora consideramos $\Delta \tilde{w}_{n,i} = \tilde{w}_{n,i} - \tilde{w}_{n-1,i}$, nosotros reescribimos Δw por conveniencia se expresa como:

$$\begin{aligned} \Delta w &= \gamma^{-1} (\tilde{w}_{n,i}^T \tilde{w}_{n,i} - (\tilde{w}_{n,i} - \Delta \tilde{w}_{n,i})^T (\tilde{w}_{n,i} - \Delta \tilde{w}_{n,i})) = \dots \\ &= 2\gamma^{-1} (\tilde{w}_{n,i}^T \Delta \tilde{w}_{n,i}) - \gamma^{-1} (\Delta \tilde{w}_{n,i}^T \Delta \tilde{w}_{n,i}) \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Entonces, (A.6) se reemplaza en (A.5) donde, reordenando los términos, obtenemos:

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{L}_{n,i} &= 2 \tilde{E}_{n,i} \left(\tilde{w}_i^T \varphi(\hat{E}) - \lambda_i \tilde{E}_{n,i} + \bar{\varepsilon}_i - \tilde{E}_{n,i} \right) + \Delta \tilde{E}_{n,i}^2 + \dots \\ &\quad + 2\gamma^{-1} (\tilde{w}_{n,i}^T \Delta \tilde{w}_{n,i}) - \gamma^{-1} (\Delta \tilde{w}_{n,i}^T \Delta \tilde{w}_{n,i}) = \dots \\ &= \left(2\tilde{w}_i^T \left[\tilde{E}_{n,i} \varphi(\hat{E}) + \gamma^{-1} \Delta \tilde{w}_{n,i} \right] \right) - \dots \\ &\quad - 2 \lambda_i \tilde{E}_{n,i}^2 + 2 \tilde{E}_{n,i} \bar{\varepsilon}_i - 2 \tilde{E}_{n,i}^2 + \Delta \tilde{E}_{n,i}^2 - \gamma^{-1} (\Delta \tilde{w}_{n,i}^T \Delta \tilde{w}_{n,i}) \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Sustitución de la ley de ajuste (12) $\Delta \tilde{w}$, en (A.7), $\Delta \mathcal{L}_{n,i}$ queda como:

$$\Delta \mathcal{L}_{n,i} = -2 (\lambda_i + 1) \tilde{E}_{n,i}^2 + 2 \tilde{E}_{n,i} \bar{\varepsilon}_i + \Delta \tilde{E}_{n,i}^2 - \gamma^{-1} (\Delta \tilde{w}_{n,i}^T \Delta \tilde{w}_{n,i}) \quad (\text{A.8})$$

En (A.8) el incremento del modelo del error de $\Delta \tilde{E}_{n,i}$ es desconocido, y se puede aproximar mediante la siguiente ecuación:

$$\Delta \tilde{E}_{n,i} = \left(\frac{\partial \tilde{E}_{n+1,i}}{\partial \hat{w}_{n,i}} \right)^T \Delta \tilde{w}_{n,i} \quad (\text{A.9})$$

La derivada parcial del modelo de error depende solo de los pesos de la red neuronal y se puede reescribir como:

$$\Delta \tilde{E}_{n,i} = - \left(\frac{\partial \hat{E}_{n+1,i}}{\partial \hat{w}_{n,i}} \right)^T \Delta \tilde{w}_{n,i} \quad (\text{A.10})$$

Cambiar los valores de los pesos según (A.10), y considerando que w^* es constante, los vectores de peso ideal se requieren solo con fines analíticos, reorganizando, $\Delta \tilde{w}_{n,i}$ se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{w}_{n,i} &= \tilde{w}_{n,i} - \tilde{w}_{n-1,i} = (w^* - \hat{w}_{n,i}) - (w^* - \hat{w}_{n-1,i}) = \dots \\ &= -\hat{w}_{n,i} + \hat{w}_{n-1,i} = -\Delta \hat{w}_{n,i} \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Entonces, el incremento del modelo de error (A.9) se puede escribir como:

$$\Delta \tilde{E}_{n,i} = - \left(\frac{\partial \hat{E}_{n+1,i}}{\partial \hat{w}_{n,i}} \right)^T \left(\gamma \tilde{E}_{n,i} \boldsymbol{\varphi}(\hat{\tilde{E}}) \right) \quad (\text{A.12})$$

Considerando el valor de la derivada parcial de la red neuronal (A.9) y reemplazándolo en (A.12), nosotros llegamos a:

$$\Delta \tilde{E}_{n,i} = - \left(\gamma \tilde{E}_{n,i} \boldsymbol{\varphi}(\hat{\tilde{E}})^T \boldsymbol{\varphi}(\hat{\tilde{E}}) \right) \quad (\text{A.13})$$

El aumento en el error del modelo se define como:

$$\Delta \tilde{E}_{n,i} = -\bar{\gamma} |\tilde{E}_{n,i}| \quad (\text{A.14})$$

Donde

$$\bar{\gamma} = \gamma \left\| \boldsymbol{\varphi}(\hat{\tilde{E}}) \right\|^2 \quad (\text{A.15})$$

con el vector de funciones RBF, $\boldsymbol{\varphi}(\hat{\tilde{E}})$, siendo una función acotada, i.e., $\left\| \boldsymbol{\varphi}(\hat{\tilde{E}}) \right\| \leq k$. El valor $\bar{\gamma}$ es un factor de aprendizaje de la red neuronal $0 < \bar{\gamma} < 1$ y puede definirse arbitrariamente.

Expresando ecuación (A.14) en forma vectorial:

$$\Delta |\tilde{E}_{n,i}| \leq \bar{\gamma} |\tilde{E}_{n,i}| \quad (\text{A.16})$$

Sustituyendo el valor del incremento del error del modelo en (A.8), la diferencia discreta de Lyapunov se define como:

$$\Delta \mathcal{L}_{n,i} = -2 (\lambda_i + 1) \tilde{E}_{n,i}^2 + 2 \tilde{E}_{n,i} \bar{\varepsilon}_i + \bar{\gamma}^2 \tilde{E}_{n,i}^2 - \gamma^{-1} (\Delta \tilde{w}_{n,i}^T \Delta \tilde{w}_{n,i}) \quad (\text{A.16})$$

Reemplazando la regla de aprendizaje en la ecuación anterior y aplicando la regla, se obtiene:

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{L}_{n,i} &= -2 (\lambda_i + 1) \tilde{E}_{n,i}^2 + 2 \tilde{E}_{n,i} \bar{\varepsilon}_i + \bar{\gamma}^2 \tilde{E}_{n,i}^2 - \dots \\ &\quad - \gamma^{-1} \left(\gamma \tilde{E}_{n,i} \varphi(\hat{E}) \right)^T \left(\gamma \tilde{E}_{n,i} \varphi(\hat{E}) \right) \leq \dots \\ &\leq -2 (\lambda_i + 1) |\tilde{E}_{n,i}|^2 + 2 |\tilde{E}_{n,i}| |\bar{\varepsilon}_i| + \bar{\gamma}^2 |\tilde{E}_{n,i}|^2 - \gamma \left\| \varphi(\hat{E}) \right\|^2 |\tilde{E}_{n,i}|^2 \leq \dots \quad (\text{A.17}) \\ &\leq -2 (\lambda_i + 1) |\tilde{E}_{n,i}|^2 + 2 |\tilde{E}_{n,i}| |\bar{\varepsilon}_i| + \bar{\gamma}^2 |\tilde{E}_{n,i}|^2 - \bar{\gamma} |\tilde{E}_{n,i}|^2 \leq \dots \\ &\leq -2 \left(\lambda_i \frac{(1 - \bar{\gamma}) \bar{\gamma}}{2} + 1 \right) |\tilde{E}_{n,i}|^2 + 2 |\tilde{E}_{n,i}| |\bar{\varepsilon}_i| \end{aligned}$$

de la ecuación anterior podemos obtener la condición de estabilidad

$$\Delta \mathcal{L}_{n,i} \leq -2 \left(\lambda_i - \frac{(1 - \bar{\gamma}) \bar{\gamma}}{2} + 1 \right) |\tilde{E}_{n,i}|^2 + 2 |\tilde{E}_{n,i}| |\bar{\varepsilon}_i| \leq 0 \quad (\text{A.18})$$

Teniendo en cuenta la Observación 1 se llega a:

$$|\tilde{E}_{n,i}| \geq \frac{\varepsilon_{max}}{\left(\lambda_i - \frac{(1 - \bar{\gamma}) \bar{\gamma}}{2} + 1 \right)} \quad (\text{A.18})$$

La ecuación (A.19) demuestra que la estimación neuronal del sistema no lineal es semiglobal, finalmente uniformemente acotada (SGUUB) y es estable y que también se puede utilizar para construir una ley de control, que se ilustrará en la siguiente sección.



ISBN: 978-631-90962-6-2