



Universidad Nacional de San Juan
Facultad de Ingeniería
Instituto de Automática

Modelado y control de estructura flexible accionada por piezoeléctrico para sistema de posicionamiento dual de ultraprecisión

**Tesis Doctoral de
Alejandro Emmanuel Masante**

Temas de Automática

110

Modelado y control de estructura flexible accionada por piezoeléctrico para sistema de posicionamiento dual de ultraprecisión

Tesis doctoral de

Alejandro Emmanuel Masante

Aprobada por la
**Facultad de Ingeniería de la
Universidad Nacional de San Juan**

para el otorgamiento del grado académico de

Doctor en Ingeniería de Sistemas de Control

Dirección de Tesis:

Dr. Ing. Rogelio L. Hecker

Facultad de Ingeniería,
Universidad Nacional de La Pampa, Argentina
Instituto de Automática,
Universidad Nacional de San Juan, Argentina

Dr. Ing. Miguel E. Peña

Jurado de Tesis:

Dr. Ing. Andrés Lage

Instituto de Automática,
Universidad Nacional de San Juan, Argentina
Departamento de Ingeniería Mecánica,
Universidad de La Frontera, Chile

Dr. Ing. Eduardo I. D. Cifuentes

Fecha de defensa oral: 10 de diciembre de 2024

Masante, Alejandro

Modelado y control de estructura flexible accionada por piezoeléctrico para sistema de posicionamiento dual de ultraprecisión / Alejandro

Masante. - 1^{ra} ed. - San Juan: Instituto de Automática, 2025.

256 p., 21 × 15 cm.



ISBN: **978-631-90962-0-0**

1. Ingeniería. 2. Sistemas de Control.

I. Título. CDD 620

MODELADO Y CONTROL DE ESTRUCTURA FLEXIBLE ACCIONADA POR PIEZOELÉCTRICO PARA SISTEMA DE POSICIONAMIENTO DUAL DE ULTRAPRECISIÓN

ALEJANDRO MASANTE

Tesis de doctorado

Temas de Automática

Primera edición: Febrero 2025

Impreso en Argentina

Queda prohibida la reproducción total o parcial de esta tesis, su almacenamiento o transmisión por cualquier medio, ya sea electrónico, mecánico, fotocopiado o de cualquier otra índole, sin la autorización previa y por escrito del autor o de la institución a la que pertenece.

©2025 ALEJANDRO MASANTE

Hecho el depósito que marca la ley.

**MODELADO Y CONTROL DE ESTRUCTURA FLEXIBLE
ACCIONADA POR PIEZOELECTRICO PARA SISTEMA DE
POSICIONAMIENTO DUAL DE ULTRAPRECISIÓN**

Alejandro Emmanuel Masante

Los dispositivos de posicionamientos de ultraprecisión son una parte principal de los sistemas de fabricación y manipulación en áreas tales como nanotecnología, microfabricación, entre otras. Una manera efectiva de lograr desplazamientos con resoluciones submicrométricas se consigue mediante sistemas flexibles accionados por piezoeléctricos, los cuales resultan una solución compacta, capaces de generar elevadas velocidades de accionamiento y con una precisión de posicionado teórica ilimitada. A pesar de las ventajas mencionadas, estos sistemas presentan fenómenos vibratorios de alta frecuencia y no linealidades que pueden llegar a degradar significativamente el desempeño del sistema controlado. Adicionalmente, el rango de actuación de estos sistemas resulta limitado a varias decenas de micrómetros, teniéndose que optar por la combinación de algunas etapas de actuación para cumplir con tareas de ultraprecisión que requieran efectuar grandes recorridos con elevada resolución en todo el rango de actuación.

En esta tesis se persigue el objetivo de disminuir el error de posición de los mecanismos duales de actuación que involucran sistemas flexibles accionados por piezoeléctricos. Este objetivo se aborda a través del diseño de algoritmos de control, los cuales disponen de un compensador de la dinámica no medible de la histéresis presente en estos sistemas y de un coordinador de movimiento para prevenir la saturación de la etapa fina de actuación.

En este trabajo, en primer lugar se presenta un modelo con parámetros concentrados de los sistemas flexibles accionados por piezoeléctricos con amplificación de recorrido. Adicionalmente se detalla un procedimiento metodológico para el relevamiento de los parámetros del modelo considerado. En base a este modelo, se desarrolla un controlador con compensación de la histéresis mediante el diseño de una estrategia de control por modos deslizantes adaptativa, la cual mejora significativamente el desempeño del sistema respecto a otros controladores extraídos de la literatura. Posteriormente, este algoritmo de control con compensación de la histéresis es tenido en cuenta en el desarrollo de una ley de control robusta diseñada para comandar sistemas duales de posicionamiento con disposición tipo tándem, pensada para aplicaciones que requieran efectuar grandes desplazamientos con una elevada precisión de posicionado.

MODELING AND CONTROL OF PIEZOELECTRIC-DRIVEN FLEXIBLE STRUCTURE FOR DUAL ULTRA-PRECISION POSITIONING SYSTEM

Alejandro Emmanuel Masante

Ultra-precision positioning devices are a principal part of manufacturing and handling systems in areas such as nanotechnology, microfabrication, among others. An effective way to achieve displacements with sub-micrometer resolutions is through flexible systems driven by piezoelectrics, which offer a compact solution, capable of generating high actuation speeds and with positioning accuracy in practice limited only by the system's electronics. Despite the mentioned advantages, these systems exhibit high-frequency vibratory phenomena and nonlinearities that can significantly degrade the performance of the controlled system. Additionally, the range of action of these systems is limited to several tens of micrometers, requiring the combination of some stages of actuation to meet ultra-precision tasks that require making large travels with high resolution throughout the range of action.

This thesis aims to reduce the position error of dual-actuation mechanisms involving flexible systems driven by piezoelectric elements. This objective is addressed through the design of control algorithms, which incorporate a compensator for the unmeasurable dynamics of hysteresis present in these systems, along with a motion coordinator to prevent saturation of the fine actuation stage.

In this work, firstly, a lumped parameter model of flexible systems actuated by piezoelectrics with travel amplification is presented. Additionally, a methodological procedure for the survey of the parameters of the considered model is detailed. Based on this model, a controller with hysteresis compensation is developed through the design of an adaptive sliding mode control strategy, which significantly improves the system's performance compared to other controllers found in the literature. Subsequently, this hysteresis-compensated control algorithm is taken into account in the development of a robust control law designed to command dual positioning systems with a tandem arrangement, intended for applications requiring large displacements with high positioning accuracy.

Índice General

Resumen	I
Abstract	III
Nomenclatura	XIX
Glosario	XXVII
1. Introducción	1
1.1. Motivación y objetivos	1
1.2. Contribuciones de la Tesis	4
1.3. Organización de la Tesis	9
2. Modelado y control de sistemas accionados por piezoeléctricos	13
2.1. Introducción	13
2.2. Materiales piezoeléctricos	14
2.3. Características no lineales de los materiales piezoeléctricos:	
Fenómeno de histéresis y <i>creep</i>	16
2.3.1. Fenómeno de histéresis en los piezoeléctricos	16
2.3.2. Efecto <i>creep</i>	20
2.4. Aplicaciones de los piezoeléctricos	21
2.5. Sistemas de nanoposicionamiento accionados mediante piezo-	
eléctricos	22
2.6. Modelado de sistemas accionados por piezoeléctricos	25
2.6.1. Modelado de la histéresis	26
2.6.2. Modelado del <i>creep</i>	30

VI

2.7.	Estrategias de control para sistemas accionados por piezoeléctricos	30
2.7.1.	Supresión de la histéresis y el <i>creep</i> mediante control por carga eléctrica	31
2.7.2.	Supresión de la histéresis y el <i>creep</i> mediante inserto de capacitor en serie	32
2.7.3.	Control mediante compensación y realimentación de estados	32
2.8.	Control de sistemas duales para posicionamiento	36
2.9.	Control por modos deslizantes	38
2.9.1.	Aspectos generales referidos al diseño de algoritmos de control por modos deslizantes	39
2.9.2.	Control por modos deslizantes adaptativos	40
2.10.	Conclusiones	42
3.	Sistema experimental	43
3.1.	Introducción	43
3.2.	Posicionador nanométrico para etapa fina de movimiento	43
3.2.1.	Sistema mecánico de accionamiento	44
3.2.2.	Sistema de medición: Sensor capacitivo	45
3.3.	Posicionador para etapa gruesa de movimiento	45
3.3.1.	Sistema tornillo-tuerca de bolas recirculantes accionado por motor eléctrico	46
3.3.2.	Controlador de corriente	46
3.3.3.	Sistema de medición: <i>encoder</i> rotacional	47
3.4.	Sistemas de adquisición de datos	47
3.4.1.	Sistema de adquisición de datos para comandar únicamente la etapa fina de movimiento	47
3.4.2.	Sistema de adquisición de datos para comandar el sistema grueso y dual de posicionamiento	49
3.5.	Conclusiones	52
4.	Modelo de sistema flexible accionado por piezoeléctrico con ampli-	
	cación de recorrido mediante brazo palanca	53
4.1.	Introducción	53
4.2.	Modelo electromecánico de un grado de libertad con parámetros concentrados	54
4.2.1.	Modelado de la parte eléctrica del sistema	55
4.2.2.	Modelado de la parte mecánica del sistema	57

4.2.3.	Modelo electromecánico del sistema	58
4.2.4.	Modelo Bouc-Wen para describir la histéresis	61
4.3.	Modelo dinámico para identificación	62
4.4.	Metodología de identificación de los parámetros del modelo	63
4.4.1.	Metodología de identificación del modelo Bouc-Wen	64
4.4.2.	Metodología de identificación de la dinámica lineal del modelo	68
4.5.	Identificación del modelo dinámico del sistema experimental	69
4.5.1.	Identificación del modelo de histéresis Bouc-Wen	69
4.5.2.	Identificación de la dinámica vibracional	72
4.5.3.	Validación del modelo	73
4.6.	Conclusiones	73
5.	Estrategia SMC con estimación de la histéresis	75
5.1.	Introducción	75
5.2.	Controlador SMC adaptativo con estimación de la histéresis	76
5.3.	Modelo de sistema considerado para el diseño del controlador	78
5.4.	Estrategia SMC con estimación de la histéresis	79
5.5.	Análisis de estabilidad a lazo cerrado	83
5.6.	Consideraciones respecto a la sintonización del controlador	91
5.7.	Resultados	92
5.7.1.	Resultados de simulación	93
5.7.2.	Resultados experimentales	97
5.8.	Conclusiones	106
6.	Modelo de sistema dual para posicionamiento	109
6.1.	Introducción	109
6.2.	Configuración de sistema dual de posicionamiento considerado en esta tesis	110
6.3.	Modelo de la etapa gruesa y fina de posicionamiento	111
6.3.1.	Modelo de etapa gruesa de movimiento	111
6.3.2.	Modelo de Etapa fina de movimiento	112
6.4.	Análisis del acoplamiento mecánico e interferencia	113
6.5.	Modelo de los sistemas duales de posicionamiento para propósitos de control	117
6.6.	Identificación de los parámetros del modelo	118
6.6.1.	Identificación de los parámetros del sistema grueso	118
6.6.2.	Identificación de los parámetros del sistema fino	119

VIII

6.7. Conclusiones	120
7. Control de sistemas duales de posicionamiento	123
7.1. Introducción	123
7.2. Importancia de la Coordinación en sistema dual de posicionamiento	124
7.3. Controlador Maestro-Esclavo desacoplado con proyector sobre Espacio Nulo	125
7.3.1. Ley SMC propuesta con señales auxiliares de coordinación	128
7.3.2. Algoritmo para $\tau_0(t)$ referido a las señales auxiliares de coordinación	132
7.4. Análisis de estabilidad a lazo cerrado	134
7.5. Efecto de $\mathbf{u}_N(t)$ en la dinámica global del sistema	143
7.5.1. Incidencia de $\mathbf{u}_N(t)$ en la dinámica del espacio operacio- nal del sistema	144
7.5.2. Incidencia de $\mathbf{u}_N(t)$ en el espacio articular del sistema .	145
7.5.3. Independencia de la carga para resolución de redundancia	146
7.6. Resultados	146
7.6.1. Simulaciones	146
7.6.2. Pruebas experimentales	152
7.7. Conclusiones	160
8. Conclusiones	163
A. Preliminares Matemáticos sobre estabilidad de sistemas	167
B. Modelo de histéresis Bouc-Wen	173
B.1. Introducción	173
B.2. Descripción matemática del modelo Bouc-Wen	173
B.3. Influencia de los parámetros del modelo en la descripción de los ciclos de histéresis	174
B.4. Estabilidad BIBO del modelo Bouc-Wen	174
B.5. Convergencia asintótica de sistemas con histéresis contemplada con modelo Bouc-Wen	179
B.6. Pasividad del modelo Bouc-Wen en paralelo	185
B.7. Cambio de constante de modulación en modelo Bouc-Wen . . .	187
B.8. Independencia de la frecuencia	188
B.9. Modelo Bouc-Wen normalizado	188

C. Control por Modos Deslizantes	191
C.1. Introducción	191
C.2. Filosofía del algoritmo SMC	192
C.3. Diseño de Algoritmo SMC	192
C.3.1. Modo de deslizamiento	193
C.3.2. Modo de alcance	194
C.4. Construcción de algoritmo SMC	197
C.5. Diseño de algoritmo SMC para un sistema mecánico tipo masa-resorte amortiguado	199
D. Sistemas sobreactuados	203
D.1. Introducción	203
D.2. Dinámica general de manipuladores para posicionamiento	203
D.2.1. Dinámica de manipuladores redundantes	204
D.2.2. Incidencia del vector τ_0 en la dinámica del sistema	206
D.2.3. Criterio para elección de $\tau_0(t)$	207
D.3. Propiedades de la inversa generalizada $\mathbf{J}^{TG}$	208
D.3.1. Relación con cinemática diferencial inversa	208
D.3.2. Condición $\{n\}$ -inversa de $\mathbf{J}^{TG}$	211
D.3.3. Independencia de la inercia de la carga para la consistencia dinámica del sistema	211
Bibliografía	213

Índice de Figuras

1.	I
------------	---

Índice de Figuras	XI
--------------------------	-----------

2.1. Proceso de polarización de un material piezoeléctrico. (a) Los dominios (dipolos) están desordenados y la polarización global es nula. (b) Se aplica un campo eléctrico que alinea los dominios. (c) Se remueve el campo eléctrico y los dominios permanecen alineados (polarización remanente). Extraído de [Vázquez Carazo, 2000].	15
2.2. (a) Orientación molecular debido a la polarización del material antes del energizado; (b) y (c) Orientación del dominio de Weiss antes y después de alcanzar el límite máximo al aplicar un voltaje; (d) y (e) Orientación del dominio de Weiss cuando disminuye el voltaje aplicado. Extraído de [Liu et al., 2013a].	18
2.3. Relación entre voltaje aplicado y carga eléctrica generada en el material para un dominio de Weiss. Extraído de [Liu et al., 2013a].	19
2.4. Histéresis de un material piezoeléctrico en la relación entre voltaje (entrada) y posición (salida). Extraído de [Riepold et al., 2019].	19
2.5. Ciclos de histéresis de memoria no local de un piezoeléctrico. Extraído de [Xiong et al., 2015].	20
2.6. (a) Voltaje Aplicado en bornes del piezoeléctrico. (b) Posición del sistema en respuesta al escalón de voltaje aplicado. Extraído de [Zhang et al., 2013].	21

XII

2.7.	Respuesta escalonada de lazo abierto de un actuador piezoeléctrico. La diferencia d en la posición para un mismo valor de voltaje aplicado se debe a la presencia de la histéresis. Extraído de [Jung et al., 2000a].	22
2.8.	(a) Actuadores Piezoeléctricos tipo <i>stacks</i> de sección transversal rectangular (extraído de [Phy, 2016]). (b) Esquema eléctrico de un actuador piezoeléctrico tipo <i>stacks</i> (extraído de [Wang et al., 2019]).	23
2.9.	Sistemas de nanoposicionamiento accionados por piezoeléctricos tipo <i>flexure stage</i> de dos grados de libertad. (a) Configuración en serie. (b) Configuración en paralelo. Extraído de [Ru et al., 2016].	24
2.10.	(a) Modelo de sistema en Cascada. (b) Modelo de sistema en paralelo.	27
2.11.	Categoría de modelos comúnmente utilizados para representar los ciclos de histéresis de los piezoeléctricos. Extraído de [Ru et al., 2016].	28
2.12.	(a) Esquema de control <i>feedforward</i> . (b) Esquema de control <i>feedback</i>	34
2.13.	Esquemas de control habituales para los sistemas accionados por piezoeléctricos. (a) Compensador <i>feedforward</i> en cascada dentro del lazo realimentado. (b) Salida del compensador <i>feedforward</i> sumada a la señal de control obtenida del lazo cerrado. (c) Esquema de control <i>feedback</i> con compensación por realimentación de estados.	35
2.14.	Representación cualitativa del modo de alcance y deslizamiento de un algoritmo SMC. (a) SMC ideal, donde e expresa la señal error de la variable controlada. (b) Efecto del <i>chattering</i>	39
3.1.	Sistema de nanoposicionamiento experimental de un grado de libertad accionado por piezoeléctrico.	45
3.2.	Sistema tradicional de posicionamiento tipo tornillo sin fin y bolas recirculantes considerado como etapa gruesa de movimiento. Extraído de [Casquero et al., 2010].	46
3.3.	Sistema adquirente de datos Ueism 600 – 1G Cubo.	48
3.4.	Esquema de conexión y equipamiento utilizado.	49
3.5.	Sistema adquirente de datos DAP 5200a.	50
3.6.	Equipamiento para sistema dual de movimiento considerado en esta tesis.	51

4.1. Modelo físico de un posicionador nanométrico de estructura flexible accionado por piezoeléctrico con amplificación de recorrido mediante brazo palanca.	55
4.2. Modelo electromecánico de un posicionador nanométrico de estructura flexible accionado por piezoeléctrico, con amplificación de recorrido mediante brazo palanca. (a) Modelo eléctrico del sistema. (b) Modelo mecánico del sistema.	56
4.3. Modelo de sistema en diagrama de bloques correspondiente a las ecuaciones (4.15) y (4.16).	64
4.4. Identificación preliminar de los parámetros del modelo Bouc-Wen normalizado por medio de la metodología del <i>Paso I</i>	70
4.5. Ajuste con el modelo de histéresis Bouc-Wen estándar identificado.	71
4.6. Relación entre variable de histéresis y posición al considerar una entrada de tipo sinusoidal.	71
4.7. Comparación entre la respuesta en frecuencial del modelo lineal de segundo orden y la estimada a partir del análisis espectral de la señal obtenida.	72
4.8. Validación del modelo de sistema.	73
5.1. Gráfico de la función $\text{sat}(\hat{D}, s)$ utilizada en la ley de control propuesta (valor de ϕ arbitrario).	82
5.2. Esquema en diagrama de bloques del algoritmo SMC propuesto.	82
5.3. Representación gráfica de la región de convergencia en el plano $e - \dot{e}$ (plano de fase) al que convergen las trayectorias del sistema.	92
5.4. Región de convergencia de las trayectorias del sistema para el algoritmo de control propuesto. En naranja: evolución temporal de 0 s a 9 s; En rojo: evolución temporal de 9 s a 10 s.	94
5.5. (a) Respuesta temporal obtenida en simulación para el seguimiento de trayectoria. (b) Señales de error de posición.	95
5.6. (a) Señales de control obtenidas en simulación. (b) Derivada temporal de las señales de control.	96
5.7. Errores de estimación obtenidos en simulación.	96
5.8. Simulación al considerar el modelo de sistema nominal identificado y el modelo con parámetros Bouc-Wen modificados, donde la señal $x(t)$ corresponde a una señal $u(t)$ multifrecuencial de 1,5 Hz, 0,5 Hz, y 0,25 Hz.	98

XIV

5.9. Simulación de sistema controlado al considerar estado desconocido del sistema y variación paramétrica en modelo Bouc-Wen, considerando el término adaptativo a partir del instante de tiempo $t = 5$ s.	98
5.10. Prueba nominal a lazo cerrado.	101
5.11. Señal error de la prueba nominal.	101
5.12. Evolución temporal de las variables estimadas al considerar el problema de seguimiento de trayectoria para la prueba nominal.	102
5.13. Señal de error para la prueba con estado de histéresis inicial desconocido.	102
5.14. Señal error para prueba de carga desconocida.	103
5.15. Resultados experimentales para el problema de control de regulación de la posición.	104
5.16. Variables estimadas obtenidas experimentalmente al considerar el caso del problema de regulación de la posición.	105
5.17. (a) Regulación de la Posición. (b) Acción de control requerida para la regulación de la posición.	105
5.18. (a) Relación entre la variable de histéresis estimada y posición del sistema. (b) Evolución temporal de la variable $x(t)$ y $\hat{h}(t)$ para la señal de referencia $x_r(t)$ sinusoidal propuesta.	106
6.1. Representación de sistema dual de actuación para posicionamientos de ultraprecisión tipo tándem considerado en esta tesis.	110
6.2. Modelo dinámico simplificado de sistema dual de posicionamiento.	114
6.3. Señal de excitación utilizada para la identificación del modelo lineal de la etapa gruesa de movimiento.	119
6.4. Ajuste logrado con el modelo lineal de la etapa gruesa considerado.	120
7.1. Aprovechamiento de redundancia en sistema dual de accionamiento tipo tándem, donde x representa la posición respecto del marco inercial del objetivo de interés desplazado, q_1 la posición del sistema grueso respecto al marco inercial y q_2 la posición del sistema fino respecto al grueso.	125
7.2. Representación esquemática del controlador Maestro-Eslavo desacoplado con Proyección Ortogonal sobre Espacio Nulo del sistema.	126
7.3. Señal de referencia con grandes desplazamientos utilizada en simulación.	149

7.4. Error de posición del sistema para los diferentes controladores considerados.	149
7.5. Posición de la etapa fina de accionamiento obtenida en simulación.	150
7.6. Desempeño del algoritmo de control propuesto al considerar variaciones en la masa a ser desplazada.	151
7.7. Posición de la etapa fina de accionamiento al considerar el algoritmo de control propuesto con incertidumbre en la masa a ser desplazada.	152
7.8. Señal de referencia con grandes desplazamientos utilizada en prueba experimental.	154
7.9. (a) Señal de referencia con grandes desplazamientos utilizada en prueba experimental. (b) Errores de posicionado.	155
7.10. Detalle del error de posicionamiento para el algoritmo propuesto.	156
7.11. Error de posicionado de la etapa gruesa de movimiento para cada controlador considerado.	157
7.12. Posición de la etapa fina de accionamiento obtenida experimentalmente.	158
7.13. Acción de control de la etapa gruesa.	159
7.14. Variables estimadas involucradas en la ley de control de la etapa gruesa de movimiento.	159
7.15. Variables estimadas involucradas en la ley de control de la etapa fina de movimiento.	160
A.1. Ejemplo de función que pertenece a la región $[K_1, K_2]$	169
B.1. Forma de los ciclos de histéresis del modelo Bouc-Wen para distintos valores de A . Extraído de [Zablotskaya, 2020].	175
B.2. Forma de los ciclos de histéresis del modelo Bouc-Wen para distintos valores de n . Extraído de [Zablotskaya, 2020].	175
B.3. Forma de los ciclos de histéresis del modelo Bouc-Wen para distintos valores de γ . Extraído de [Zablotskaya, 2020].	176
B.4. Forma de los ciclos de histéresis del modelo Bouc-Wen para distintos valores de β . Extraído de [Zablotskaya, 2020].	176
B.5. Forma de los ciclos de histéresis del modelo Bouc-Wen para distintas relaciones entre β y γ . Extraído de [Zablotskaya, 2020].	177
B.6. Sistema mecánico de un grado de libertad con histéresis en fuerza restauradora.	180

XVI

B.7. Descripción equivalente del sistema dada por las ecuaciones (B.17)-(B.19).	184
C.1. Representación gráfica cualitativa del modo de alcance y deslizamiento de un algoritmo SMC, al considerar $s(\mathbf{e}) = e_2 + \lambda e_1$, con $\lambda > 0$	194
C.2. ilustración de sistema masa-resorte amortiguado a controlar, el cual se considera perturbado por $d(x(t), \dot{x}(t), t)$	200

Índice de Tablas

Índice de Tablas

XVII

5.1. Índices de desempeño de errores de seguimiento para ambos algoritmos SMC.	103
7.1. Índices de desempeño de errores de posición. G: Etapa Gruesa únicamente; G+F: Etapa Gruesa y Fina sin bloque de coordinación; G+F (Null): Etapa Gruesa y Fina con bloque de coordinación.	148
7.2. Índices de desempeño de errores de posición al considerar distintos valores de masa como carga a ser desplazada.	151
7.3. Índices de desempeño de errores de posición. G: Etapa Gruesa únicamente; G+F: Etapa Gruesa y Fina sin bloque de coordinación; G+F (Null): Etapa Gruesa y Fina con bloque de coordinación.	155
B.1. Clasificación de los modelos Bouc-Wen respecto a la condición de estabilidad BIBO.	177
B.2. Condición de estabilidad BIBO para el modelo Bouc-Wen de Clase I normalizado.	190

Nomenclatura

t	Variable referida a tiempo.
$x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t)$ y $\ddot{x}(t)$	Coordenadas de posición, velocidad, aceleración y jerk, respectivamente, con respecto al marco de referencia xyz de etapa simple de movimiento.
$x_i(t)$ y $\dot{x}_i(t)$ y $\ddot{x}_i(t)$	Posición, velocidad y aceleración de la etapa i , respectivamente, en la dirección del eje x .
$q_i(t)$	Variable posición articular de la etapa i .
$x_r(t), \dot{x}_r(t)$ y $\ddot{x}_r(t)$	Señal posición, velocidad y aceleración de referencia, respectivamente.
$e(t), \dot{e}(t)$ y $\ddot{e}(t)$	Error, derivada temporal primera y segunda del error de la variable posición controlada.
e_{rms}	Error cuadrático medio.
e_{max}	Error máximo absoluto.
n_p	Números de placas cerámicas constituyentes de un actuador piezoeléctrico.
d_{33}	Parámetro de acoplamiento piezoeléctrico.
C	Capacitancia del piezoeléctrico en ausencia de esfuerzos externos.
k_a	Rigidez del actuador piezoeléctrico en la dirección que ocurren las deformaciones.
κ	Factor de acoplamiento electromecánico de los materiales piezoeléctricos, definido como $\kappa^2 = (n_p d_{33})^2 k_a / C$.
C_a	Capacitancia eléctrica total equivalente del piezoeléctrico, definida como $C_a = C(1 - \kappa^2)$.
T_{em}	Constante de transformación del efecto piezoeléctrico, definida como $T_{em} = n_p d_{33} k_a$.

R_0	Resistencia eléctrica equivalente de salida de la fuente de amplificación de voltaje utilizada para energizar al actuador piezoeléctrico.
K_{amp}	Ganancia de amplificación de la fuente de voltaje utilizada para energizar al actuador piezoeléctrico.
c_f y k_f	Amortiguamiento viscoso y rigidez equivalente, respectivamente, del sistema flexible de guiado de la plataforma móvil del sistema accionado por piezoeléctrico.
k_θ	Rigidez rotacional del brazo palanca en su base del sistema flexible de accionamiento.
a	Distancia entre el punto de apoyo del brazo palanca y el punto de accionamiento del piezoeléctrico.
b	Distancia entre el punto de apoyo del actuador piezoeléctrico en el brazo palanca y el punto de interés sobre la plataforma móvil del sistema flexible.
r	Inversa de la relación de amplificación del sistema flexible tipo brazo palanca, definida como $r = a/(a + b)$.
J_{eq}	Momento de inercia equivalente del cuerpo rotado en el sistema flexible tipo brazo palanca.
m_{eq}	Masa equivalente a ser desplazada linealmente en el sistema de nanoposicionamiento accionado por piezoeléctrico.
k_{eq}	Rigidez equivalente del sistema flexible, definida como $k_{eq} = k_f + \frac{r^2 k_\theta}{a^2}$.
k_{fs}	Rigidez equivalente del sistema de nanoposicionamiento accionado por piezoeléctrico (posicionador nanométrico), definida como $k_{fs} = k_{eq} + r^2 k_a$.
m	Masa equivalente a ser movilizada en el sistema flexible accionado por piezoeléctrico, donde $m = m_{eq} + J_{eq}/(a + b)^2$.
ω_n	Frecuencia del modo de vibración del sistema definida como $\omega_n = \sqrt{k_{fs}/m}$.
f_n	Frecuencia natural del sistema referida a su primer modo de vibración calculada como $\omega_n/(2\pi)$.
ζ	Factor de amortiguamiento viscoso, definido como $\zeta = c_f / (2\sqrt{mk_{fs}})$.

$x_a(t)$	Elongación del actuador piezoelectrico.
$v_a(t)$	Caída de voltaje en el capacitor equivalente que modela la capacitancia del piezoelectrico.
$q(t)$ y $\dot{q}(t)$	Carga eléctrica y corriente circulante en el actuador piezoelectrico, respectivamente.
$q_a(t)$	Carga Eléctrica almacenada en el capacitor equivalente del actuador piezoelectrico.
$q_p(t)$	Carga inducida en el material piezoelectrico derivada de las deformaciones mecánicas del mismo.
$v_{\mathcal{H}}(t) = \mathcal{H}(q(t))$	Caída de voltaje en el actuador piezoelectrico debido al fenómeno de la histéresis.
$v_{in}(t)$	Voltaje aplicado a la entrada de la fuente de amplificación de tensión utilizada para energizar el actuador piezoelectrico.
$f_a(t)$	Fuerza aplicada sobre el actuador piezoelectrico.
$M_{\theta}(t)$	Momento producido por la rigidez rotacional de la articulación pivote del brazo palanca.
$F_p(t)$	Fuerza generada por el actuador piezoelectrico sobre el brazo palanca.
$R_b(t)$	Fuerza establecida en la unión entre la plataforma móvil a ser desplazada y el brazo palanca.
$\theta_p(t)$	Ángulo de rotación efectuado durante el accionamiento del sistema de nanoposicionamiento accionado mediante piezoelectrico.
$h(t)$	Variable asociada al fenómeno de histéresis descrita a partir del modelo considerado.
α, β y γ	Parámetros del modelo Bouc-Wen estándar utilizado para modelado y control.
A, α_w, n, D^{-1} y k_w	Parámetros del modelo Bouc-Wen estándar teórico.
$h_{n=1}(t)$	Variable de histéresis del modelo Bouc-Wen con parámetro de transición entre periodo elástico-plástico $n = 1$.
$\vartheta_H(t)$	Función error entre la histéresis $\mathcal{H}(q(t))$ del sistema y la considerada a partir de la variable $h(t)$.
$p(t)$	Término de perturbaciones.
h_0 y h_1	Constantes definidas a partir de los parámetros del modelo de histéresis Bouc-Wen estándar.

XXII

K_u y K_T	Constantes de amplificación de la señal de voltaje aplico en bornes del actuador piezoeléctrico, donde $K_T = \omega_n^2 K_u$.
ρ y σ_N	Parámetros del modelo Bouc-Wen normalizado.
$h_N(t)$	Variable del modelo Bouc-Wen normalizado.
k_x y k_N	Constantes auxiliares utilizadas en el proceso de identificación de los parámetros del modelo Bouc-Wen.
$\mathbf{r}_{\text{BW}}$, φ_{BW} , Θ_{BW} y $\theta_{\text{BW}}(i)$	Cantidades vecto-matriciales utilizadas en el proceso de identificación de los parámetros del modelo Bouc-Wen normalizado.
$d(t)$, d_s y $d_d(t)$	Término de perturbaciones generales, término de perturbaciones estáticas y dinámicas, respectivamente, donde $d(t) = \omega_n p(t)/k$ tal que $d(t) = d_s + d_d(t)$.
$u(t)$ y $u_i(t)$	Acción de control sobre sistema de movimiento simple y acción de control del sistema i .
$\bar{H}$ y $\bar{D}$	Cota superior del fenómeno de histéresis contemplado por el modelo Bouc-Wen y cota superior de las perturbaciones dinámicas incidentes en el sistema, respectivamente.
$\hat{D}(t)$, $\hat{d}_s(t)$ y $\hat{h}(t)$	Estimación de las perturbaciones dinámicas, de las perturbaciones estáticas y de la histéresis, respectivamente.
$\tilde{D}(t)$, $\tilde{d}_s(t)$ y $\tilde{h}(t)$	Error de estimación de las perturbaciones dinámicas, de las perturbaciones estáticas y de la histéresis, respectivamente.
σ_i	Ganancia del término estabilizante del algoritmo modificación- σ .
ϕ y ϕ_i	Parámetro de relajación interviniente en la función saturación del algoritmo SMC.
η_i	Velocidad de adaptación de los parámetros en las estimaciones.
ς	Ganancia que multiplica a la variable de histéresis Bouc-Wen en el modelo dinámico del sistema.
$s(t)$	Variable superficie de deslizamiento.
k_p	Parámetro de diseño del algoritmo SMC asociado con la velocidad de alcance a la superficie $s(t) = 0$.

λ y λ_k	Parámetros de diseño del algoritmo SMC asociados con la velocidad de deslizamiento sobre la superficie $s(t)$.
V y $\dot{V}$	Función (Candidata) de Lyapunov y su derivada temporal, respectivamente, utilizadas en el análisis de estabilidad del sistema.
$\xi_i, \mu_i, \alpha_{V_i}, \beta_{V_i}, \varphi_i, \theta$ y $\tilde{\theta}$	Variables auxiliares utilizadas durante el proceso de análisis de estabilidad por Lyapunov.
$\Lambda, \delta, \mathbf{Q}$ y $\mathbf{r}(t)$	Variables utilizadas en demostración de estabilidad por Lyapunov, dependientes de parámetros tanto del sistema como del algoritmo de control.
Ψ y ε	Cota superior de la variable superficie de deslizamiento y del error de posición, respectivamente, en estado estacionario.
ϱ y D_m	Parámetros del algoritmo SMC convencional utilizado para comparación en pruebas experimentales, referido a la saturación de la estimación de las perturbaciones cuasiestáticas y a la ganancia del término robusto, respectivamente.
J_c	Inercia combinada del motor, el tornillo y el acoplamiento en sistema grueso de movimiento.
C_θ y C_x	Coeficiente de fricción viscoso rotacional y lineal, respectivamente.
$T_r(t)$	Par de reacción aplicado por el carro a ser desplazado en sistema grueso de movimiento.
$T_m(t)$	Par motor del sistema grueso de movimiento.
$\theta(t), \dot{\theta}(t)$ y $\ddot{\theta}(t)$	Coordenada angular, velocidad angular y aceleración angular del sistema tornillo sin fin y bolas recirculantes.
M	Masa del carro de sistema grueso de movimiento.
$F_r(t)$	Reacción al par resistente aplicado por el carro al tornillo en sistema grueso de movimiento.
$F_f(t)$	Fuerza de fricción presente en sistema grueso de movimiento durante desplazamientos lineales.
$F_{p_c}(t)$	Fuerza perturbadora presente en sistema grueso durante el movimiento lineal.
$F_{f_s}(t)$	término de fricción que contempla la transición entre el estado estático y dinámico (efecto Striebeck).

XXIV

$F_{f_v}(t)$	Fricción viscosa en desplazamiento lineal del sistema grueso de movimiento, tal que $F_{f_v}(t) = C_x \dot{x}_1(t)$.
ρ_r	Paso del tornillo en sistema grueso de movimiento.
J_e	Inercia equivalente, dada por $J_e = J_c + \rho_r^2 M$.
C_e	Coefficiente de fricción viscoso equivalente, dado por $C_e = C_\theta + \rho_r^2 C_x$.
$\varepsilon_\Delta(t), \dot{\varepsilon}_\Delta(t)$ y $\ddot{\varepsilon}_\Delta(t)$	Posición, velocidad y aceleración relativa, respectivamente, entre ambos subsistemas de actuación en sistema dual de accionamiento.
$\bar{x}(t)$ y $\ddot{x}(t)$	Posición y aceleración, respectivamente, en la Coordenada x del centro de mansa del sistema dual de posicionamiento tipo tándem.
$f_i(t)$	Fuerza generalizada actuante en el sistema i .
K_c	Ganancia de conversión del controlador de torque del sistema grueso de movimiento que relaciona entrada de voltaje $u_1(t)$ y torque $T_m(t)$, tal que $T_m(t) = K_c u_1(t)$.
m_i, c_i y k_i	Masa, Fricción viscosa y rigidez equivalente del sistema i .
J	Matriz Jacobiana de la cinemática del sistema.
J ^{T^G}	Matriz inversa generalizada de J ^T .
M, C, K, B y G _{nl}	Matriz de inercia, de fricción viscosa, rigidez, ganancia de la acción de control y ganancia del fenómeno no lineal contemplado en el modelo de sistema, respectivamente.
q (t), q̇ (t) y q̈ (t)	Vector de coordenadas articulares, velocidades articulares y aceleración articulares, respectivamente.
u (t), u_C (t) y u_N (t)	Vector acción de control general, acción de control de término robusto y acción de control de Espacio Nulo, tal que u (t) = u_C (t) + u_N (t).
p _{nl} (t), p (t), p_s y p_d (t)	Vector de no linealidades contempladas en el modelo de sistema, perturbaciones generales, perturbaciones estáticas y perturbaciones dinámicas, tal que p (t) = p_s + p_d (t).
$q_{2\min}$ y $q_{2\max}$	Valor mínimo y máximo, respectivamente, del rango operativo de la etapa fina de movimiento.
$\bar{q}_2$	Valor medio del rango de actuación del sistema fino, tal que $\bar{q}_2 = \frac{q_{2\min} + q_{2\max}}{2}$.

$\mathbf{K}_p, \mathbf{\Lambda}_p, \mathbf{\Lambda}_i$ y $\mathbf{K}_N$	Matrices de ganancia del algoritmo SMC para el control del sistema dual de posicionamiento.
$\hat{\mathbf{\Gamma}}(t), \hat{\mathbf{D}}(t), \hat{\mathbf{p}}_s(t)$ y $\hat{\mathbf{p}}_{nl}(t)$	Matrices con parámetros adaptativos o términos estimados en algoritmo SMC destinado para el control del sistema dual de posicionamiento.
σ_i y η_i	Matriz de ganancias estabilizantes referidas al algoritmo modificación- σ y de coeficientes asociados a la velocidad de adaptación, respectivamente.
$L_N(q_2)$ y ∇L_N	Funcional de costo y gradiente del funcional de costo L_N , respectivamente, utilizado en el algoritmo de coordinación del sistema dual de posicionamiento.
$\tau_0(t)$	Vector de señales auxiliares referido a la coordinación de movimiento del sistema dual de posicionamiento.
$z(t)$	Variable que expresa el estado medio de deformación de los elementos de contacto en el modelo de fricción LuGre.
$\sigma_{0_z}, \sigma_{1_z}, F_c, F_s, v_s$ y ϵ	Parámetros del modelo de fricción LuGre, los cuales representan la rigidez de la cerda, coeficiente de amortiguación de la cerdas, fricción Coulombiana, fricción estática, velocidad de Stribeck y potencia interviniente en el modelo, respectivamente.

Glosario

Existe una serie de términos que no forman parte del idioma español, pero que dada su extensa utilización a nivel nacional e internacional respecto de sus equivalentes en español, cuando los hubiera, serán utilizados en esta tesis en su forma original. Por ello, a continuación se brinda un listado de estos términos, así como algunos detalles sobre los mismos tal como se los debe interpretar en el contexto de esta tesis.

- *SMC*: Sigla de control por modos deslizantes (en inglés *Sliding Mode Control*), siendo esta una estrategia de control propia de la Teoría de Control Robusto.
- *Chattering*: Fenómeno caracterizado por conmutaciones rápidas de la acción de control, observado en controladores por modos deslizantes (*SMC*).
- *Feedback*: Estrategia de control que involucra información pasada obtenida a partir de sensores o de la estimación de los estados del sistema, la cual intenta corregir los errores en las variables controladas para el instante de tiempo actual.
- *Feedforward*: Estrategia de control que se centra en el futuro y tiene el objetivo de anticiparse a lo que puede suceder para generar una acción anticipada para una eventual corrección.
- *Encoder*: Sensor de posición, generalmente óptico, que brinda una señal dependiente del movimiento producido.
- *Delay*: Retardo de tiempo, generalmente expresado en cantidades de muestra en el contexto de sistemas discretizados en el tiempo.

XXVIII

- *Stack*: En el contexto de esta tesis, se refiere al tipo de actuadores piezoeléctrico constituido por el apilamiento en serie de n_p placas de este material conectadas eléctricamente entre sí en paralelo.
- *Flexure stage*: Sistema flexible con determinada rigidez, en general de composición monolítica, que permite el guiado de un área de trabajo al producirse el accionamiento del actuador, el cual en el contexto de esta tesis es un piezoeléctrico.
- *Creep*: En el contexto de los actuadores piezoeléctricos, hace referencia a un fenómeno no lineal caracterizado por la variación lenta de la posición luego de aplicar un voltaje constante en bornes de estos dispositivos.
- *Driver*: Software o componente que actúa como intermediario entre un sistema de control y un dispositivo físico o equipo.

Para evaluar el rendimiento tanto de los modelos contemplados como de los sistemas controlados, se ha utilizado el error de posición cuadrático medio (*RMS* por sus siglas en inglés de *Root Mean Square*), simbolizado mediante e_{rms} , y el error máximo absoluto, expresado por medio de e_{max} , definidos como

$$e_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N e^2(k)}$$

y

$$e_{\text{max}} = \max_{1 \leq k \leq N} \{|e(k)|\},$$

donde N expresa el número de muestras consideradas para el cómputo de los índices señalados.

1.1. Motivación y objetivos

El desarrollo de nuevas áreas de la ciencia y la tecnología requieren de sistemas que permitan efectuar posicionamientos de muy alta precisión, como es el caso de la microscopía [Rana et al., 2014], nanomanipulación [Griffiths et al., 2020], micro fabricación [Korobova, 2017], metrología de precisión [Bottero et al., 2016], manipulación biológica [Xu, 2018], biotecnología y aplicaciones biomédicas [Chircov and Grumezescu, 2022], entre otras.

Una manera efectiva de realizar desplazamientos submicrométricos se consigue a partir de la deformación elástica de un mecanismo flexible de rigidez conocida. Este principio simple permite evitar uniones o acoples deslizantes, eliminando de esta manera la fricción, el desgaste y los problemas de juego mecánico, garantizando una mayor precisión de guiado [Smith, 1994]. Estos mecanismos flexibles son generalmente accionados por piezoeléctricos [Ru et al., 2016], los cuales se caracterizan por disponer de una gran densidad de fuerza de acción y de la capacidad de desarrollar elevadas velocidades de accionamiento con una resolución de posicionamiento teórica infinita. A pesar de las ventajas mencionadas, estos sistemas presentan no linealidades que degradan su desempeño, tales como la histéresis [Gan and Zhang, 2019], y la fluencia (*creep* en inglés) [Devasia et al., 2007], que es la variación lenta de la posición luego de aplicar un voltaje constante en bornes del piezoeléctrico. Por su parte,

la histéresis es un fenómeno que se encuentra presente en la relación entre voltaje aplicado y carga eléctrica generada, en donde este fenómeno no lineal repercute en la relación entre voltaje aplicado y desplazamiento en todo el rango de actuación de estos sistemas, pudiendo llegar a degradar significativamente el desempeño del controlador si no es debidamente contemplado durante el diseño de la etapa de control. Otro inconveniente que presentan estos sistemas es el fenómeno vibratorio de alta frecuencia asociado con el fenómeno de resonancia mecánica [Aphale et al., 2008], puesto en evidencia en aplicaciones que solicitan desarrollar elevadas velocidades de accionamiento. Resulta oportuno señalar que, el recorrido útil de este tipo de sistemas depende de la elongación máxima capaz de desarrollar el actuador piezoeléctrico y de la rigidez del sistema flexible en la dirección de actuación, quedando acotada su utilización para aplicaciones que requieren efectuar desplazamientos máximos de algunas decenas de micrómetros.

Con el propósito de ofrecer mayores recorridos con una elevada precisión en todo el rango de actuación en aplicaciones de escaneo [Butler, 2011], procesos de fabricación con máquinas herramientas [Elfizy et al., 2005], entre otras, se ha recurrido a la utilización de sistemas duales de accionamiento, los cuales se componen de dos subsistemas de actuación, grueso y fino, respectivamente, con la configuración típica en serie tipo tándem, los cuales proporcionan movimientos a lo largo de un eje común de movimiento [Xu, 2012]. La esencia de los sistemas duales radica en combinar el accionamiento de dos actuadores, pudiendo presentar diferentes principios de actuación, para que en forma cooperada puedan complementarse entre sí, aprovechando de esta manera los beneficios que proporcionan cada uno de ellos para cumplir con el objetivo de control de posición deseado. En los sistemas duales de posicionamiento, el actuador del sistema grueso proporciona un amplio rango de movimiento con un tiempo de respuesta moderado y una resolución de posicionamiento limitada. Como ejemplos de este tipo de subsistema de actuación se pueden mencionar los de tornillo y bolas recirculantes accionados por servomotores de corriente continua, motores de bobina móvil (*Voice Coil Motor* en inglés), motores lineales con principio de accionamiento por fuerzas de Lorentz, entre otros. El mayor inconveniente que presentan estos subsistemas de actuación radica en su precisión, la cual resulta limitada por la presencia de no linealidades, tales como la fricción y el juego mecánico derivado de la interacción entre las partes móviles de estos sistemas, las cuales resultan fuertemente notorias en torno a la velocidad cero de movimiento. Debido a las características mencionadas, los piezoeléctricos resultan ideales para ser utilizados como actuadores del

subsistema fino de movimiento, a partir de los cuales se compensan los errores de posicionamiento generados durante el accionamiento de la etapa gruesa de movimiento.

En los sistemas duales de posicionamiento se controla una única variable de interés, considerada como la posición de un punto sobre el sistema, a través de una entrada doble de actuación que proporciona movimiento sobre un único eje de movimiento. Este hecho presenta cierto interés desde el punto de vista del control puesto que existe una redundancia en la actuación, pudiéndose encontrar distintas señales para el accionamiento de ambos actuadores por medio de las cuales se alcanza la misma posición final para el punto de interés sobre el sistema. Teniendo en cuenta que el rango de desplazamiento de los actuadores piezoeléctricos resulta muy inferior al de la etapa gruesa de movimiento, el controlador del sistema dual se debe diseñar de manera tal de garantizar una señal de control que permita aprovechar las bondades de cada etapa de actuación evitando la saturación de la etapa fina de movimiento.

A partir de lo señalado, el diseño de controladores para posicionadores accionados por piezoeléctricos resulta de gran importancia para cumplir con posicionamientos de alta precisión en diversas aplicaciones. El diseño de estos controladores se han abordado a partir de un amplio espectro de metodologías y propuestas algorítmicas que buscan mejorar el desempeño del sistema a lazo cerrado atendiendo a los distintos fenómenos inherentes de estos sistemas, siendo la histéresis de los piezoeléctricos uno de los que más ha captado la atención de los investigadores en estos últimos años. En este sentido, el principal objetivo de esta tesis se centra en el diseño de una estrategia de control robusta para ser aplicada en sistemas de posicionamiento que involucren una etapa de accionamiento mediante piezoeléctrico, la cual permita compensar de manera conveniente el fenómeno no medible de la histéresis presente en estos sistemas y que resulte de fácil implementación. Por su parte, se busca que la propuesta algorítmica desarrollada para estos sistemas pueda ser utilizada en forma directa en algoritmos de control de sistemas duales de posicionamiento, sin requerir de una modificación en la estructura algorítmica del compensador de histéresis desarrollado. Adicionalmente, en el controlador de los sistemas duales de ultraprecisión, contemplar el rango de actuación de la etapa fina de movimiento accionada por piezoeléctrico para prevenir su saturación.

En lo referido al control de sistemas de nanoposicionamiento accionados por piezoeléctricos, se puede observar una tendencia reciente en la utilización de leyes de control robustas adaptativas basadas en modelo, con resultados favorables en aplicaciones de elevada precisión de posicionado. Por ello, como

objetivo específico de esta tesis, se plantea profundizar en el modelado y proceso de identificación de los sistemas de nanoposicionamiento de estructura flexible con amplificación de recorrido mediante brazo palanca accionados por piezoeléctricos, de manera tal que el modelo contemple la dinámica más relevante de estos sistemas y pueda ser utilizado para el diseño de controladores robustos. En particular, dado que el fenómeno de histéresis de estos sistemas resulta no medible, se pretende desarrollar un observador de este fenómeno no lineal dentro de un algoritmo de control por modo deslizantes adaptativo, de manera tal de ofrecer un compensador de dicho fenómeno el cual resulte fácilmente implementable en aplicaciones de tiempo real. En este sentido, se considerará como hipótesis de trabajo que un algoritmo de control por modo deslizante adaptativo con compensación de la histéresis mediante una regla de estimación utilizando la variable de deslizamiento, es capaz de garantizar un desempeño adecuado en aplicaciones de posicionamiento de alta precisión que involucran una etapa de movimiento accionada por piezoeléctrico. Por su parte, se pretende diseñar un algoritmo de control para los sistemas duales de actuación, el cual permita incorporar de manera directa y sin modificaciones el compensador de histéresis previamente señalado. Esto último permitiría abordar el diseño y sintonización del controlador de forma separada aplicable sobre cada etapa de movimiento, en donde eventualmente solo se requiera efectuar una sintonización fina de los parámetros de ambos algoritmos cuando se consideran como parte del controlador del sistema dual de movimiento. Adicionalmente, en el algoritmo propuesto, establecer señales auxiliares de coordinación entre ambos subsistemas de actuación encargadas de prevenir la saturación de la etapa fina de movimiento.

1.2. Contribuciones de la Tesis

En esta tesis, se realizaron contribuciones verificadas experimentalmente en un sistema flexible accionado por piezoeléctrico de un grado de libertad de tipo experimental, diseñado por el equipo de trabajo del Laboratorio de Mecatrónica Aplicada de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de La Pampa.

Entre las contribuciones de la tesis se pueden considerar: (1) la obtención de un modelo electromecánico detallado de los sistemas flexible con amplificación de recorrido mediante brazo palanca, establecido por medio de parámetros concentrados, el cual permite efectuar simulaciones con una precisión submicrométrica a partir de unos pocos parámetros a ser identificados. Este modelo no solo profundiza en el nivel de detalle respecto a los encontrados en la literatura

en lo que se refiere a la interpretación de los parámetros que intervienen en el mismo, sino que mantiene suficiente simplicidad para poder utilizarlo en el diseño de estrategias de control aplicable sobre estos sistemas. (2) Se ha propuesto un procedimiento metodológico que permite relevar los parámetros del modelo y que facilita la búsqueda mediante algoritmos de ajuste por iteración, favoreciendo de esta manera el proceso de identificación. (3) Se ha diseñado un algoritmo de control por modo deslizantes adaptativo aplicable para comandar sistemas accionados por piezoeléctricos, el cual puede ser utilizado tanto para atender problemas de regulación de la posición como de seguimiento de trayectorias. Cabe señalar que, el algoritmo de control propuesto no requiere del conocimiento de una cota superior de las perturbaciones, consiguiendo contrarrestar satisfactoriamente el fenómeno no medible de la histéresis mediante un observador de este fenómeno. En este punto, resulto oportuno destacar que el algoritmo de control propuesto es capaz de ofrecer un mejor desempeño que otros controladores extraídos de la literatura, según los resultados obtenidos en las pruebas realizadas. (4) Se exponen de forma detallada las consideraciones que permiten considerar a un sistema dual de posicionamiento de manera desacoplada, permitiendo de esta manera despreciar el fenómeno de interferencia entre ambos subsistemas de actuación y simplificar el modelo de sistema considerado para el diseño del algoritmo de control. (5) Se ha diseñado una ley de control robusta por modo deslizante adaptativa, aplicable sobre los sistemas duales de posicionamiento con etapa fina accionada mediante piezoeléctrico, la cual permite sintonizar cada uno de los algoritmos de control de forma independiente. En más detalles, el algoritmo de control desarrollado permite seleccionar distintos parámetros para los controladores que se han considerado para cada etapa de actuación fina y gruesa, respectivamente, favoreciendo de esta manera la sintonización de los controladores, donde la incorporación del compensador de histéresis desarrollado no requiere de ninguna modificación en lo que respecta a su algoritmo. Este algoritmo de control propuesto, contempla además señales auxiliares encargadas de prevenir la saturación de la etapa fina de movimiento, las cuales no interfieren con el objetivo de control referido al control de la posición del sistema, quedando únicamente relacionadas con la tarea de coordinación de movimientos entre ambos subsistemas de actuación.

Por su parte, se detallan modificaciones que se pueden aplicar sobre el algoritmo de control propuesto con el objetivo de mejorar el desempeño del sistema controlado al considerar dinámicas de mayor orden del sistema e incertidumbres paramétricas. Adicionalmente, se menciona una propuesta algorítmica tendiente a mejorar la precisión del sistema dual a lazo cerrado,

considerando la incorporación de un compensador de la fricción mediante algoritmos de estimación indicados en la literatura.

Durante el trabajo de la tesis se desarrolló un conjunto de códigos en diagramas de bloques en Matlab-Simulink y lenguaje C, que permite un mayor control y versatilidad en la experimentación sobre los sistemas utilizados en el Laboratorio de Mecatrónica Aplicada de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de La Pampa. Estos códigos de programación fueron utilizados para la ejecución de simulaciones y pruebas experimentales presentadas en esta tesis.

A lo largo del desarrollo de esta tesis se lograron las siguientes publicaciones:

Revistas Indexadas

- **Alejandro E. Masante**, Rogelio L. Hecker y Miguel E. Peña. Sliding Mode Control with Continuous Switching Function and Adaptive Compensation of Hysteresis and Disturbances for a Piezoelectric Flexure-Stage. *International Journal of Dynamics and Control*. Springer. 2024. <https://doi.org/10.1007/s40435-024-01537-x>.

Partes de libros

- Fernando J. Villegas, **Alejandro E. Masante**, Rogelio L. Hecker y Marcelo G. Flores. Modeling of a Piezoelectric Based Nanopositioning Stage. *Multibody Mechatronic Systems*. Springer. págs. 257-264. ISBN: 978-3-030-60371-7. 2020.

Congresos Internacionales

- **Alejandro E. Masante**, Fernando J. Villegas y Rogelio L. Hecker. Algoritmo de Control Robusto Para Comandar un Sistema Dual de Posicionamiento con Etapa Fina Accionada por Piezoeléctrico. Poster. 3^{er} Congreso Internacional de Mecatrónica, Control e Inteligencia Artificial (III CIMCIA). Cuautitlán Izcalli, Estado de México. Noviembre 2024.
- Rogelio L. Hecker, Marcelo G. Flores, **Alejandro E. Masante**, Lucas E. Lamas. Desarrollo de un sistema de micro posicionamiento accionado por piezoeléctrico y con brazo de palanca. XI Congreso Internacional de Ingeniería Mecánica, Mecatrónica y Automatización (XI CIMM). Cartagena de Indias, Colombia. Abril 2023.

- **Alejandro E. Masante**, Rogelio L. Hecker y Marcelo G. Flores. Control por modo deslizante para un sistema de nanoposicionamiento de estructura flexible accionado por piezoeléctrico. Poster. 1^{er} *Congreso Internacional de Mecatrónica, Control e Inteligencia Artificial (I CIMCIA)*. Cuautitlán Izcalli, Estado de México. Noviembre 2022.
- **Alejandro E. Masante**, Fernando J. Villegas, Rogelio L. Hecker y Marcelo G. Flores. Análisis dinámico de un posicionador flexible accionado por un actuador piezoeléctrico. *XIV Congreso Iberoamericano de Ingeniería Mecánica*. Cartagena de Indias, Colombia. Noviembre 2019.

Congresos Nacionales

- **Alejandro E. Masante**, Fernando J. Villegas, Rogelio L. Hecker y Miguel E. Peña. Adaptive Sliding Mode Control with a PID Surface to Control a Nanopositioning System Actuated by Piezoelectric. *Congreso VII IEEE ARGENCON - Área Temática de Automatización, Control y Robótica*. San Nicolás de los Arroyos, Buenos Aires, Argentina. Septiembre 2024.
- **Alejandro E. Masante**, Rogelio L. Hecker y Miguel E. Peña. Diseño de un algoritmo de control por modos deslizantes para un sistema de nanoposicionamiento tipo flexure-stage accionado por piezoeléctrico. *VIII Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica y III Congreso Argentino de Ingeniería Ferroviaria (VIII CAIM - III CAIFE)*. Ciudad de Santa Fe, Santa Fe, Argentina. Septiembre 2023.
- Marcelo G. Flores, Lucas E. Lamas, **Alejandro E. Masante**, Juan E. Isasti, Rogelio L. Hecker. Impacto de simplificaciones de modelado en la predicción del desempeño de posicionadores nanométricos. *VIII Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica y III Congreso Argentino de Ingeniería Ferroviaria (VIII CAIM - III CAIFE)*. Ciudad de Santa Fe, Santa Fe, Argentina. Septiembre 2023.
- **Alejandro E. Masante**, Rogelio L. Hecker y Miguel E. Peña. Diseño de un controlador PID con compensación feedforward de la histéresis, para un posicionador nanométrico tipo flexure-stage accionado por piezoeléctrico. *VII Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica y II Congreso Argentino de Ingeniería Ferroviaria (VII CAIM - II CAIFE)*. San Nicolás de los Arroyos, Buenos Aires, Argentina. Septiembre 2021.

- Marcelo G. Flores, **Alejandro E. Masante**, Lucas E. Lamas, Fernando J. Villegas, Rogelio L. Hecker. Análisis dinámico de un posicionador nanométrico accionado por un piezoeléctrico. *Congreso Sobre Métodos Numéricos y sus Aplicaciones - ENIEF*. Ciudad de Santa Fe, Santa Fe, Argentina. 2019.
- **Alejandro E. Masante**, Pablo Ramirez, Federico R. Masch, Augusto Sardá, Rogelio L. Hecker, Marcelo G. Análisis dinámico de un posicionador nanométrico de estructura flexible mediante pruebas impulsivas y simulación. *XII Congreso Argentino de Mecánica Computacional (MECOM)*. San Miguel de Tucumán, Tucumán, Argentina. 2018.
- Fernando J. Villegas, **Alejandro E. Masante**, Rogelio Hecker, Cleomar Schürer y Nancy Brambilla. Control de posicionamiento de alta precisión de una estructura flexible accionada por un piezoeléctrico. *VI Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica y I Congreso Argentino de Ingeniería Ferroviaria (VI CAIM - I CAIFE)*. San Miguel de Tucumán, Tucumán, Argentina. 2018.

Jornadas

- **Alejandro E. Masante**, Marcelo G. Flores, Rogelio L. Hecker, Lucas E. Lamas, Francisco Ratkovich y Fernando J. Villegas. Desarrollo Mecatrónico de Sistemas Flexibles para la Ingeniería de Precisión: Posicionador Dual de Resolución Nanométrica. Resumen de trabajo de investigación. *III Jornada de C. y Tec. VI Jornada Interinst. Fac. de Ciencias Vet.- Fac de Ing. UNLPam*. General Pico, La Pampa, Argentina. Noviembre 2024.
- Marcelo G. Flores, Lucas E. Lamas, **Alejandro E. Masante** y Rogelio L. Hecker. Posicionador Dual de Alta Resolución. Resumen de trabajo de investigación. *XLI Reunión Académico Científica del Foro Docente del Área Mecánica de las Ingenierías (FoDAMI)*. General Pacheco, Buenos Aires, Argentina. Octubre 2024.
- **Alejandro E. Masante**, Rogelio L. Hecker, Marcelo G. Flores, Fernando J. Villegas, Lucas E. Lamas. Control de sistema dual de posicionamiento para la ingeniería de precisión. Resumen de trabajo de investigación. *Jornada de Ciencia y Técnica UNLPam*. General Pico, La Pampa, Argentina. Noviembre 2023.

- Federico R. Masch, **Alejandro E. Masante**, Fernando J. Villegas, Lucas E. Lamas, Facundo Allochis, Francisco Ratkovich, Marcelo G. Flores, Rogelio L. Hecker. Uso de materiales piezoeléctricos en ingeniería de precisión y en cosecha de energía. Resumen de trabajo de investigación. *II Jornada de C. y Tec. V Jornada Interinst. Fac. de Ciencias Vet.- Fac de Ing. UNLPam.* General Pico, La Pampa, Argentina. Noviembre 2022.

A lo largo del desarrollo de esta tesis, se lograron los siguientes reconocimientos y distinciones:

- **SEGUNDO LUGAR** con el cartel “*Algoritmo de Control Robusto Para Comandar un Sistema Dual de Posicionamiento con Etapa Fina Accionada por Piezoeléctrico*”, presentado en el 3^{er} Congreso Internacional de Mecatrónica, Control e Inteligencia Artificial (III CIMCIA). Cuautitlán Izcalli, Estado de México, México. Noviembre 2024.
- Trabajo **DESTACADO** titulado “*Diseño de un algoritmo de control por modos deslizantes para un sistema de nanoposicionamiento tipo flexure-stage accionado por piezoeléctrico*”, presentado en el área temática Mecatrónica y Automatización en Congreso VIII CAIM - III CAIFE. Ciudad de Santa Fe, Santa Fe, Argentina. Septiembre 2023.
- **TERCER LUGAR** con el cartel “*Control por modo deslizante para un sistema de nanoposicionamiento de estructura flexible accionado por piezoeléctrico*”, presentado en el 1^{er} Congreso Internacional de Mecatrónica, Control e Inteligencia Artificial (I CIMCIA). Cuautitlán Izcalli, Estado de México, México. Noviembre 2022.
- Trabajo **DESTACADO** titulado “*Diseño de un controlador PID con compensación feedforward de la histéresis, para un posicionador nanométrico tipo flexure-stage accionado por piezoeléctrico*”, presentado en el área temática Mecatrónica y Automatización en Congreso VII CAIM / II CAIFE. San Nicolás de los Arroyos, Buenos Aires, Argentina. Septiembre 2021.

1.3. Organización de la Tesis

Esta tesis se organiza en 8 Capítulos y 4 Apéndices. En el Capítulo 1 se expone una introducción general de los sistemas de nanoposicionamiento para la

ultra precisión y la problemática actual desde el punto de vista científico referido al control de estos sistemas. Respecto al trabajo de investigación desarrollado, en este Capítulo se presenta la motivación y los objetivos, donde se mencionan los trabajos publicados durante el desarrollo de esta tesis. En el Capítulo 2 se presenta el estado del arte actual referido al modelado y control de los sistemas de nanoposicionamiento accionados por piezoeléctricos. En el Capítulo 3 se describe el sistema experimental sobre el cual se llevaron a cabo las pruebas experimentales presentadas en esta tesis. Basado en el tipo de sistema de nanoposicionamiento tratado en este trabajo, en el Capítulo 4 se presenta el modelo electromecánico considerado en esta tesis para el diseño del algoritmo de control propuesto para comandar este tipo de sistemas. Allí, también se describe el procedimiento seguido para identificar los parámetros del modelo dinámico contemplado en esta tesis. En el Capítulo 5 se presenta el algoritmo de control por modos deslizantes adaptativo propuesto en esta tesis, el cual consta de un compensador del fenómeno no medible de la histéresis presente en los sistemas accionados por piezoeléctrico. Allí se presenta la prueba de estabilidad del sistema a lazo cerrado utilizando técnicas de Lyapunov. Adicionalmente, en este Capítulo se exhiben tanto simulaciones como pruebas experimentales comparativas de la ley de control propuesta contra algoritmos extraído de la literatura, teniendo en cuenta el sistema experimental descrito en el Capítulo 3. En el Capítulo 6 se detalla la configuración de accionamiento de los sistemas duales de posicionamiento contemplados en esta tesis. En particular, en este Capítulo se presentan las consideraciones sobre el modelado de estos sistemas que permiten contemplar de forma desacoplada las dinámicas de ambas etapas de actuación, gruesa y fina, respectivamente, en el modelo general del sistema adoptado. En el Capítulo 7 se presenta el algoritmo de control diseñado para comandar los sistemas duales de posicionamiento, establecido a partir de una ley de control por modo deslizante con coordinación de movimiento mediante Proyector sobre Espacio Nulo del sistema, donde se desarrolla la prueba de estabilidad del sistema a lazo cerrado mediante técnicas de Lyapunov. Para verificar el desempeño del algoritmo de control propuesto, en este Capítulo se exhiben tanto simulaciones como pruebas experimentales al considerar el sistema dual de posicionamiento descrito en el Capítulo 3. En el Capítulo 8 se presentan las conclusiones de la tesis.

Finalmente, en el Apéndice A se detallan cuestiones matemáticas referidas al análisis de estabilidad de sistemas, requeridas en el Apéndice B. Por su parte, en el Apéndice B se describen las propiedades más relevantes del modelo de histéresis Bouc-Wen utilizado en el desarrollo de este trabajo. En el Apéndice

C se expone la filosofía de diseño tomada en cuenta para la construcción de los algoritmos SMC considerados en esta tesis. Finalmente, en el Apéndice **D** se describen cuestiones relacionadas con el control de sistemas sobreactuados mediante algoritmo de Proyección sobre Espacio Nulo, las cuales son tomadas en cuenta para mejorar la coordinación entre los subsistemas de actuación que forman parte del sistema dual de posicionamiento.

Modelado y control de sistemas accionados por piezoeléctricos

2.1. Introducción

En el campo de la industria y la investigación existen aplicaciones que requieren posicionamientos extremadamente precisos con resoluciones en el orden de los nanómetros. Una manera efectiva de realizar pequeños desplazamientos con resoluciones submicrométricas se logra por medio de sistemas accionados mediante piezoeléctricos. Los actuadores piezoeléctricos se caracterizan por tener una elevada densidad de fuerza de acción y la capacidad de generar desplazamientos con bajas deformaciones (0, 1 % de su longitud), donde la resolución de posicionamiento teórica de los mismos es infinita, quedando esta limitada por la electrónica del lazo de control. Luego, se diseñan mecanismos que aprovechan las deformaciones de los piezoeléctricos para generar desplazamientos muy precisos de un área de interés en estos dispositivos.

En este Capítulo se presenta una descripción general de los sistemas de nanoposicionamiento accionados mediante piezoeléctricos, donde se hace especial énfasis en los sistemas de estructura monolítica flexibles accionadas mediante piezoeléctricos tipo multicapas apiladas (*stacks* en inglés). Este Capítulo se ha estructurado de la siguiente manera: en la Sección 2.2 y Sección 2.3 se presentan las características más relevantes de los materiales piezoeléctricos para el desarrollo de esta tesis. En la Sección 2.4 se exponen

aplicaciones de estos materiales en la ingeniería, haciendo especial énfasis en su aplicación como actuadores en sistemas de nanoposicionamiento. Seguidamente, se continua con la Sección 2.5 donde se describen los tipos más comunes de sistemas de nanoposicionamiento accionados por piezoeléctricos que se encuentran en la actualidad, presentando una descripción detallada de las configuraciones tipo flexibles (*flexure stage* en inglés) contempladas en esta tesis. A continuación, en la Sección 2.6 se describe el estado del arte referido al modelado de los sistemas accionados por piezoeléctricos. En la Sección 2.7 se detallan las estrategias de control habituales utilizadas para comandar a estos sistemas, en tanto que en la Sección 2.8 se describen las arquitecturas de control normalmente utilizadas para comandar los sistemas duales de posicionamiento con etapa fina accionada mediante piezoeléctrico. En la Sección 2.9 se tratan cuestiones afines a los algoritmos de control por modos deslizantes que se encuentran en la literatura actual diseñadas para comandar sistemas que involucran etapas de movimiento accionadas por piezoeléctricos, siendo este tipo de algoritmos los que se utilizan en esta tesis para el diseño de los controladores propuestos. Finalmente, en la Sección 2.10 se presentan las conclusiones de este Capítulo.

2.2. Materiales piezoeléctricos

El efecto piezoeléctrico es un fenómeno físico presente en algunos materiales que les permite generar cargas eléctricas en respuesta a esfuerzos mecánicos (efecto directo), o bien, deformarse cuando son energizados eléctricamente (efecto inverso). En otras palabras, los piezoeléctricos son materiales que poseen la capacidad de convertir energía mecánica en eléctrica y viceversa [Rupitsch, 2019]. Por su parte, las propiedades de los piezoeléctricos dependen fuertemente de la temperatura [Sukesh et al., 2015], en donde además se observa que el efecto piezoeléctrico es un fenómeno anisotrópico, es decir, varía en función de la dirección en la que se producen las tensiones-deformaciones mecánicas en estos materiales [Jalili, 2009].

Existen diversos tipos de piezoeléctricos que abarcan desde los naturales, cuyas propiedades son inherentes al propio material en su forma natural como cristal, hasta piezoeléctricos artificiales que adquieren sus propiedades como tales mediante tratamientos termoeléctricos, como son las cerámicas y polímeros piezoeléctricos. Dentro del grupo de materiales piezoeléctricos concebidos en laboratorio, los más usuales en la industria son el Titanato

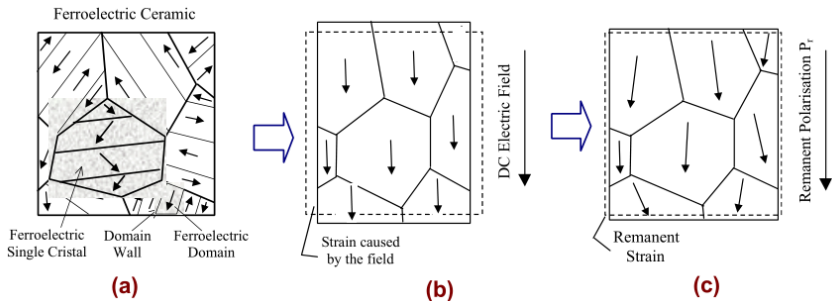


Figura 2.1: Proceso de polarización de un material piezoeléctrico. (a) Los dominios (dipolos) están desordenados y la polarización global es nula. (b) Se aplica un campo eléctrico que alinea los dominios. (c) Se remueve el campo eléctrico y los dominios permanecen alineados (polarización remanente). Extraído de [Vázquez Carazo, 2000].

de Bario ($BaOTiO_2$), el Zirconato de Plomo ($PbZrO_3$) y el Titanato de Plomo ($PbTiO_3$). A la combinación de estos dos últimos, el Zirconato Titanato de Plomo ($PbZrTiO_3$), comúnmente se los denomina cerámicas PZT. En la actualidad, los compuestos PZT son uno de los más utilizados en sistemas de actuación mediante piezoeléctricos, donde sus propiedades pueden ajustarse a través de la relación entre el Circonato y el Titanato utilizados en la composición de estos materiales.

Respecto al proceso de fabricación de las cerámicas piezoeléctricas, se puede señalar que al momento del sintetizado, por debajo de la temperatura de Curie (aproximadamente 300 °C), estos materiales presentan una estructura cristalina tetragonal muy cercana a la cúbica, dando como resultado un dipolo eléctrico microscópico en el material [Jalili, 2009]. Estos dipolos forman regiones de alineación local entre ellos, llamadas dominios de Weiss. Aunque dentro de un dominio todos los dipolos están alineados, los dominios de Weiss vecinos que constituyen al material suelen estar alineados en direcciones aleatorias como se muestra cualitativamente en la Figura 2.1.(a). Debido a la distribución aleatoria de los dominios de Weiss, el material no puede exhibir polarización neta a nivel macroscópico. Sin embargo, cuando los materiales piezoeléctricos se exponen a un campo eléctrico intenso a una temperatura muy cercana a la de Curie, los dipolos tienden a alinearse en la dirección del campo

eléctrico aplicado, dando origen a un dipolo eléctrico distinto de cero a escala macroscópica, como se exhibe en la Figura 2.1.(b). Seguidamente, como parte del proceso de fabricación, estos materiales se enfrían manteniendo el campo eléctrico externo aplicado, para finalmente eliminarlo una vez alcanzada la temperatura ambiente. Como resultado del proceso de fabricación termoelectrónico señalado, los dipolos no pueden volver a su posición original y dan lugar a lo que se denomina una polarización remanente en el material. Esto ocasiona una deformación permanente en el material, volviéndolo anisotrópico, con propiedades piezoeléctricas, y con dominios de Weiss con una dirección de orientación preferencial como se exhibe en la Figura 2.1.(c), donde el material posee la capacidad de expandirse cuando se somete a un campo eléctrico o de producir cargas eléctricas libres cuando se somete a deformaciones mecánicas.

2.3. Características no lineales de los materiales piezoeléctricos: Fenómeno de histéresis y *creep*

Para activar mecánicamente un piezoeléctrico, es necesario proporcionarle energía eléctrica. Una forma de energizar un piezoeléctrico se logra aplicando una diferencia de potencial en los bornes del dispositivo. Sin embargo, experimentalmente se observa que, cuando el piezoeléctrico es energizado mediante voltaje, este actúa como un capacitor no lineal que cambia su capacitancia incluso cuando la tensión eléctrica aplicada permanece constante. Como resultado, se evidencian dos fenómenos no lineales entre la tensión eléctrica aplicada y deformación: la histéresis y el *creep*.

2.3.1. Fenómeno de histéresis en los piezoeléctricos

Experimentalmente se ha demostrado que en los materiales piezoeléctricos, la histéresis se halla entre la tensión eléctrica aplicada y la carga eléctrica generada en el material, pudiéndose considerar como lineal la relación que existe entre carga eléctrica y deformación [Goldfarb and Celanovic, 1997a]. El fenómeno de la histéresis presente en estos materiales se explica teniendo en cuenta que, incluso después de la polarización en el proceso de fabricación llevado a cabo en laboratorio, los dominios de Weiss que conforman el material piezoeléctrico no están perfectamente alineados, tal como se expresa cualitativamente en la Figura 2.2.(a). Esto hace que al aplicar un campo eléctrico en el material, los dominios de Weiss cambien su orientación para alinearse con el campo eléctrico aplicado,

produciéndose una deformación mecánica del material como se ilustra en la Figura 2.2.(b). Durante el proceso de alineación del dominio con el campo, se producen cargas eléctricas en el material. Por su parte, el cambio en la orientación de cada dominio está limitado por cierto valor de voltaje, por lo que después de que cada dominio se alinea con el campo eléctrico, un aumento en la intensidad de éste solo produce la generación de cargas eléctricas, como se muestra en la Figura 2.2.(c). Luego, si el campo eléctrico cambia su dirección, cada dominio experimenta los mismos efectos pero en un proceso inverso como se muestra en la Figura 2.2.(d) y Figura 2.2.(e), en donde primero ocurre una disminución de la carga eléctrica superficial y luego sucede un cambio en la orientación del dominio de Weiss con la subsiguiente disminución de la carga eléctrica restante.

Atendiendo a cuestiones energéticas puestas de manifiesto, es de esperar que durante el proceso de orientación de los dipolos, parte de la energía entregada al material sea utilizada para generar la rotación de los dipolos y otra fracción para la generación de cargas eléctricas libres en el material. Cuando no ocurre el giro del dipolo, el material dispone de una cantidad superior de energía exclusivamente para modificar la cantidad de cargas eléctricas libres en el material. Cuando se analiza la carga eléctrica generada en el material en función de la tensión eléctrica aplicada, se observa que la tasa de cambio en la generación de cargas durante el giro del dipolo es menor que cuando el dominio ha alcanzado su valor límite en su orientación. Esto se representa en la Figura 2.3 para un único dominio de Weiss, donde u_s se refiere al valor de tensión eléctrica a partir del cual el dominio alcanza su orientación máxima. Luego, teniendo en cuenta que estos materiales están constituidos por múltiples dominios de Weiss, el aporte de todos ellos en conjunto hace que los piezoelectricos presenten un ciclo de histéresis entre voltaje aplicado y elongación como el que se exhibe en la Figura 2.4.

Como principal característica de éste fenómeno presente en los piezoelectricos, se puede señalar que es una no linealidad multivaluada, lo cual significa que, para un mismo valor de voltaje aplicado, no puede asegurarse cuál es el estado de deformación del material sin conocer la historia pasada del mismo respecto a su deformación, tal y como se observa en la Figura 2.4. En más detalles sobre esta cuestión, en la Figura 2.5 se exhiben los ciclos de histéresis de un material piezoelectrico al considerar un voltaje aplicado tal que obliga al sistema cambiar su sentido de deformación en distintos valores de posición, en donde puede observarse la relación entre los ciclos de menor y el de mayor amplitud, los cuales resultan típicos de un sistema con histéresis de memoria no local [Xiong et al., 2015]. Esto último, está asociado con el hecho de que la deformación futura no sólo depende de los valores de la excitación futura y la defor-

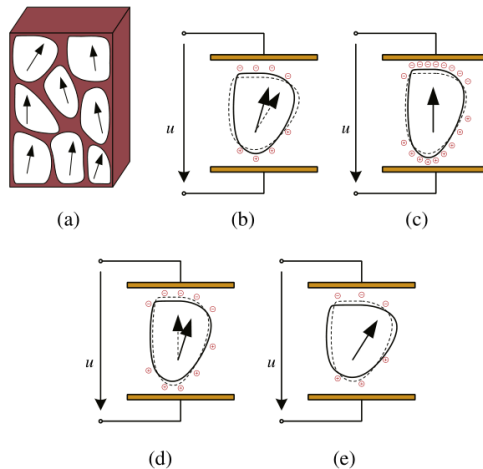


Figura 2.2: (a) Orientación molecular debido a la polarización del material antes del energizado; (b) y (c) Orientación del dominio de Weiss antes y después de alcanzar el límite máximo al aplicar un voltaje; (d) y (e) Orientación del dominio de Weiss cuando disminuye el voltaje aplicado. Extraído de [Liu et al., 2013a].

mación actual, sino que además depende de valores pasados correspondientes a los valores extremos de la excitación aplicada [Hosovsky et al., 2018; Lampaert, 2003; Lampaert and Swevers, 2001]. En general en estos materiales, la amplitud del ciclo mayor de histéresis puede ser de hasta el 15 % de la máxima elongación capaz de producir el mismo, donde por lo general este valor es ofrecido por el fabricante como cota superior para un mismo modelo. Por su parte, los ciclos de histéresis de estos materiales presentan cierta asimetría entre la rama ascendente y descendente, los cuales a su vez varían con la frecuencia del voltaje aplicado [Gu and Zhu, 2011; Nie et al., 2022] ocasionando amplitudes en el ciclo mayor de hasta 35 % de la elongación máxima del actuador. Otra característica importante de señalar es que, los ciclos de histéresis de los piezoeléctricos depende de la temperatura ambiente, pudiéndose evidenciar cambios significativos en la orientación y amplitud de los mismos al variar la temperatura del entorno de operación de estos materiales [Al Janaideh et al., 2020].

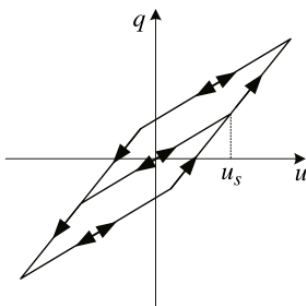


Figura 2.3: Relación entre voltaje aplicado y carga eléctrica generada en el material para un dominio de Weiss. Extraído de [Liu et al., 2013a].

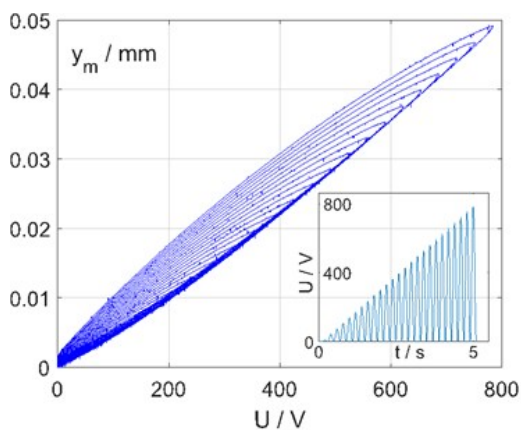


Figura 2.4: Histéresis de un material piezoelectrico en la relación entre voltaje (entrada) y posición (salida). Extraído de [Riepold et al., 2019].

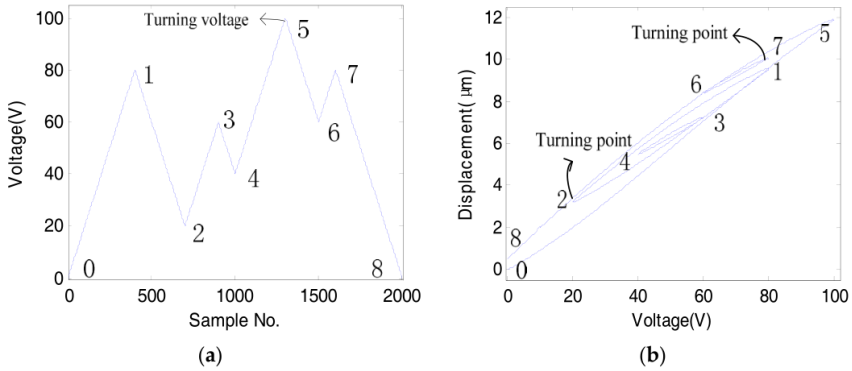


Figura 2.5: Ciclos de histéresis de memoria no local de un piezoeléctrico. Extraído de [Xiong et al., 2015].

2.3.2. Efecto *creep*

El efecto *creep* en los piezoeléctricos se manifiesta como una deformación lenta en la dirección del campo eléctrico generado en el material, luego de aplicar una tensión eléctrica constante entre sus bornes. Este fenómeno ocurre debido a que, cuando se aplica un voltaje a estos materiales, los dominios de Weiss aumentan su alineación con la dirección del campo eléctrico generado de manera proporcional con el nivel del voltaje suministrado, pero con una acción retardada en el tiempo. El resultado es un cambio en las dimensiones del material piezoeléctrico (expansión o contracción) luego de transcurrido un tiempo a pesar de mantenerse constante el nivel de voltaje aplicado. En la Figura 2.6 se muestra el efecto *creep* en un sistema accionado por piezoeléctrico al aplicar un escalón de voltaje. Como se puede apreciar de la Figura 2.6, después de un breve periodo de tiempo en el que resulta notoria una respuesta oscilatoria debido a la dinámica de alta frecuencia del sistema, comienza a evidenciarse una variación lenta de la posición debido al efecto *creep* aquí señalado. Este efecto se encuentra presente en estos materiales para cualquier nivel de tensión eléctrica aplicado, en donde la concavidad de la variación lenta del perfil de deformación debido a este fenómeno depende del valor de voltaje actual aplicado y de su valor pasado utilizado para energizar a este tipo de dispositivos, como se muestra en la Figura 2.7.

En la Figura 2.7 puede apreciarse la incidencia del efecto *creep*, la

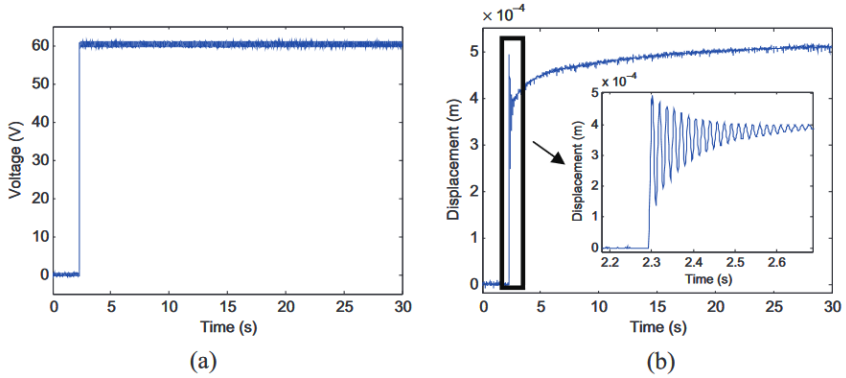


Figura 2.6: (a) Voltaje Aplicado en bornes del piezoeléctrico. (b) Posición del sistema en respuesta al escalón de voltaje aplicado. Extraído de [Zhang et al., 2013].

histéresis y la dinámica vibracional de alta frecuencia, presente en los sistemas que involucran el accionamiento de un piezoeléctrico al considerar escalones de tensión eléctrica con valores idénticos en ambos periodos de prueba correspondientes al ascenso y descenso en el nivel de voltaje aplicado.

2.4. Aplicaciones de los piezoeléctricos

En la actualidad, el efecto piezoeléctrico, tanto directo como inverso, es utilizado en múltiples tecnologías en diversos ámbitos de la ciencia y la tecnología, como es el caso de la biomedicina, la industria automotriz, la nanotecnología, entre otros. En cuanto a sus aplicaciones, se pueden distinguir tres grupos de dispositivos piezoeléctricos: generadores [Kim et al., 2011], sensores [Kim et al., 2021] y actuadores [Ru et al., 2016]. Es importante destacar que, un mismo elemento piezoeléctrico puede desempeñar cualquiera de estos roles dependiendo de la aplicación y la configuración electrónica del circuito al cual se encuentren conectado.

En particular, los actuadores piezoeléctricos son dispositivos que al recibir una señal o estímulo externo de origen eléctrico, producen algún tipo de esfuerzo mecánico en los sistemas que se encuentran alojados, pudiéndose generar de esta manera algún tipo de movimiento. La principal ventaja de los actuadores

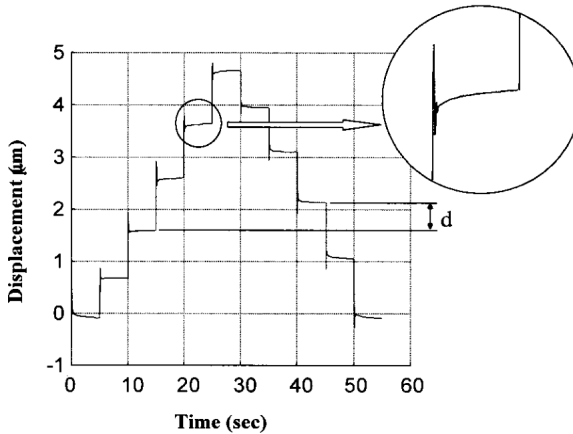


Figura 2.7: Respuesta escalonada de lazo abierto de un actuador piezoeléctrico. La diferencia d en la posición para un mismo valor de voltaje aplicado se debe a la presencia de la histéresis. Extraído de [Jung et al., 2000a].

piezoeléctricos respecto a otros mecanismos de accionamiento reside en su capacidad de realizar movimientos muy precisos, sin el requerimiento de partes móviles o deslizantes, eliminando de esta manera el problema de la fricción, el desgaste y el juego mecánico. Además, resultan compactos en su diseño lo que permite su implementación en diversos tipos de dispositivos utilizados como sistemas de posicionamiento.

2.5. Sistemas de nanoposicionamiento accionados mediante piezoeléctricos

En la actualidad existe una gran variedad de configuraciones y diseños de sistemas de nanoposicionamiento accionados por piezoeléctricos, como es el caso de aquellos actuados a partir de tubos piezoeléctricos [Moheimani, 2008], los de estructura monolítica flexible [Kenton and Leang, 2011; Yong et al., 2012], los tipo vigas (*Benders* en inglés) [Fleming and Yong, 2014], los de tipo adherencia-deslizamiento (*Stick-Slip* en inglés) [Merry et al., 2009; Rakotondrabe et al., 2009], entre otros [Wang et al., 2019]. Comercialmente,

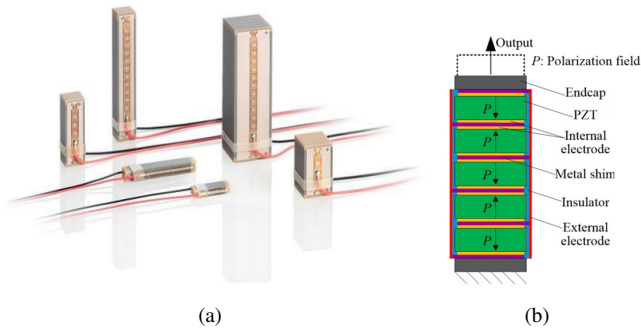


Figura 2.8: (a) Actuadores Piezoeléctricos tipo *stacks* de sección transversal rectangular (extraído de [Phy, 2016]). (b) Esquema eléctrico de un actuador piezoeléctrico tipo *stacks* (extraído de [Wang et al., 2019]).

para una misma configuración o modo de actuación, pueden encontrarse distintos tipos de actuadores piezoeléctricos los cuales varían en sus dimensiones, densidad de fuerza de acción, deformación máxima, morfología, entre otras características [Phy, 2016]. En la Figura 2.8.(a) se muestran ejemplos de actuadores multicapas o *stacks* de sección transversal rectangular, considerados para el desarrollo de esta tesis. Estos actuadores se caracterizan por disponer de n_p placas cerámicas de material piezoeléctrico apiladas en serie y conectadas eléctricamente en paralelo. Al energizar el actuador a través de sus terminales eléctricos, éste se deforma en la dirección de polarización del material como se exhibe en la Figura 2.8.(b).

Para aprovechar las deformaciones de estos actuadores y producir desplazamientos, generalmente se opta por la utilización de estructuras deformables tipo *flexure stage*, llegándose a utilizar en varios microscopios de fuerza atómica comerciales, entre otras aplicaciones [Fleming et al., 2010; Kenton and Leang, 2011; Yong and Moheimani, 2015]. Esencialmente, los sistemas tipo *flexure stage* permiten una construcción monolítica compacta del sistema de guiado de una zona o plataforma de interés mediante deformaciones elásticas inducidas en el sistema por el actuador. Para aumentar el bajo desplazamiento de los piezoeléctricos, se han propuesto distintos mecanismos de amplificación de movimiento tales como la romboidal o puente y sus variantes [Shao et al., 2016; Tian et al., 2009], siendo el brazo de palanca uno de los más difundidos [Tang and Li, 2012;

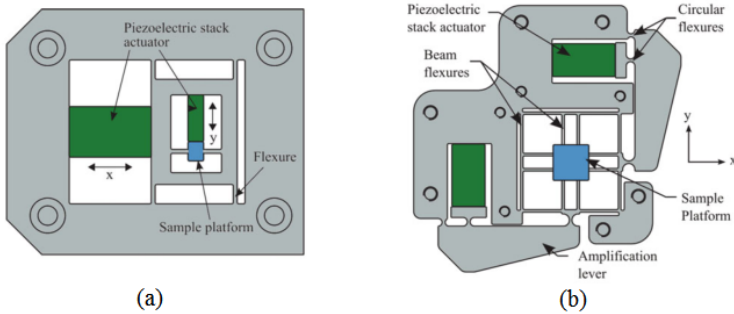


Figura 2.9: Sistemas de nanoposicionamiento accionados por piezoeléctricos tipo *flexure stage* de dos grados de libertad. (a) Configuración en serie. (b) Configuración en paralelo. Extraído de [Ru et al., 2016].

Yong et al., 2008]. Dada su amplia difusión en el estado del arte actual, la configuración de accionamiento mediante piezoeléctrico con amplificación de recorrido por brazo palanca ha sido la considerada para el desarrollo de esta tesis.

Comercialmente, existe una gran variedad de diseños de sistemas de nanoposicionamiento basados en flexión accionados mediante piezoeléctricos, que van desde uno hasta seis grados de libertad. Al considerar nanoposicionadores guiados por flexión de dos o más grados de libertad, se pueden hallar dos tipos de configuraciones con modos de actuación diferentes: de estructura en serie ó paralela. En los sistemas con diseño en modo serie de actuación, se combinan varios mecanismos de un grado de libertad, quedando uno anidado dentro del otro como se muestra en la Figura 2.9.(a) para un sistema de dos grados de libertad. Como se puede apreciar de esta configuración, la masa a desplazar por los actuadores no resulta de igual valor. Por su parte, el modo en paralelo implica el uso de actuadores que están solidarios a una única plataforma móvil, como se ilustra en la Figura 2.9.(b) al considerar un sistema de dos grados de libertad. Luego, durante el accionamiento en una de las direcciones en la disposición en paralelo, se establecen flexiones mecánicas en el actuador asociado a la otra dirección de movimiento, poniéndose de manifiesto el fenómeno de interferencia mecánica en este tipo de configuración.

2.6. Modelado de sistemas accionados por piezoeléctricos

Los dispositivos piezoeléctricos funcionan a través de un fenómeno de acoplamiento entre propiedades eléctricas y mecánicas que ocurren en el material, en donde esfuerzos mecánicos sobre estos materiales producen cargas eléctricas, y viceversa. La descripción más famosa del fenómeno piezoeléctrico fue inicialmente publicada por el comité de normas de la *IEEE Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control Society*, las cuales son conocidas como las ecuaciones constitutivas linealizadas utilizadas para describir el comportamiento de estos materiales. Para el caso en el que se considera un dispositivo piezoeléctrico de n_p placas y asumiendo que las propiedades eléctricas y mecánicas están uniformemente distribuidas a lo largo de todo el material y se consideran desplazamientos paralelos a la dirección de polarización, las ecuaciones constitutivas que relacionan el dominio eléctrico y mecánico de estos dispositivos pueden expresarse como [Preumont et al., 2006]

$$q(t) = C(1 - \kappa^2)v_a(t) + n_p d_{33} k_a x_a(t) \quad (2.1)$$

$$f_a(t) = -n_p d_{33} k_a v_a(t) + k_a x_a(t), \quad (2.2)$$

donde $x_a(t)$ expresa la elongación del piezoeléctrico, $q(t)$ la carga total almacenada en el material, $v_a(t)$ la tensión eléctrica en bornes y $f_a(t)$ la fuerza aplicada sobre el piezoeléctrico. El parámetro C es la capacitancia del piezoeléctrico en ausencia de esfuerzo externo ($f_a = 0$), k_a la rigidez del actuador cuando el voltaje en bornes es nulo ($v_a = 0$) y d_{33} es el parámetro de acoplamiento piezoeléctrico, donde el subíndice “33” se refiere a una convención universalmente aceptada la cual indica que la dirección del campo eléctrico aplicado coincide con la dirección de polarización del material. El parámetro κ es el factor de acoplamiento electromecánico, el cual es una medida de la eficiencia de la conversión de la energía mecánica en eléctrica y viceversa, el cual viene dado por $\kappa^2 = (n_p d_{33})^2 k_a / C$ [Preumont et al., 2006].

Sin embargo, las ecuaciones (2.1) y (2.2) no describen los fenómenos no lineales que se manifiestan en estos materiales, tales como la histéresis y el *creep*. Además, estas ecuaciones no predicen el fenómeno de resonancia mecánica propio de los sistemas mecánicos. En este sentido, en las últimas décadas ha surgido un enorme interés en la obtención de modelos matemáticos que sean capaces de describir con precisión el comportamiento de los sistemas accionados mediante piezoeléctricos. En este sentido, Goldfarb y Celanovic

[Goldfarb and Celanovic, 1997a] fueron los primeros en proponer un modelo electromecánico de los actuadores piezoeléctricos, el cual contempla de manera conjunta las ecuaciones constitutivas de estos materiales dadas por las ecuaciones (2.1) y (2.2), la dinámica vibracional de alta frecuencia y el efecto no lineal de la histéresis. Para incluir el fenómeno de la histéresis, en la descripción eléctrica se introdujo una impedancia la cual emula el fenómeno físico de polarización y generación de cargas eléctricas en el material (ver Sección 2.3.1).

Teniendo en cuenta que los actuadores piezoeléctricos generalmente se energizan a través de una fuente de amplificación de voltaje, en [Gu et al., 2012b] se presenta un modelo más general referido a un sistema de nanoposicionamiento accionado por piezoeléctrico accionado por voltaje, en el cual se contempla la interacción que existe entre la capacitancia equivalente del actuador y la resistencia de salida del amplificador de tensión. Este modelo, basado en el propuesto por Goldfarb y Celanovic [Goldfarb and Celanovic, 1997a] para representar al actuador piezoeléctrico tanto en el dominio eléctrico como mecánico, es el más difundido y el que habitualmente se utiliza para describir la dinámica de los sistemas accionados mediante piezoeléctricos. Sobre la base del modelo propuesto en [Gu et al., 2012b], se han contemplado distintos algoritmos para representar la histéresis entre voltaje aplicado y desplazamiento en los sistemas accionados mediante piezoeléctricos.

2.6.1. Modelado de la histéresis

Como se detalla en la Sección 2.3.1, experimentalmente la histéresis en los piezoeléctricos se manifiesta en el dominio eléctrico en la relación que existe entre voltaje y carga eléctrica generada. Luego, atendiendo a que en estos materiales la carga eléctrica total $q(t)$ generada queda determinada tanto por la tensión eléctrica aplicada como por las deformaciones mecánicas producidas en el material, en la literatura se hallan dos paradigmas referidos al tratamiento de la histéresis de manera simplificada: el modelo en cascada, mostrado en la Figura 2.10.(a), y el paralelo, exhibido en la Figura 2.10.(b) [Huang et al., 2019; Liu et al., 2016; Riccardi et al., 2013].

En el modelo en cascada, la histéresis se considera como una relación no lineal entre el voltaje de entrada y la fuerza mecánica generada por el actuador piezoeléctrico, la cual degrada la relación lineal entre el voltaje de entrada y la posición del sistema únicamente a partir del nivel de voltaje aplicado [Gu et al., 2014]. Bajo este paradigma referido al tratamiento de la histéresis, el modelo se puede representar como un diagrama en bloques mediante una descripción

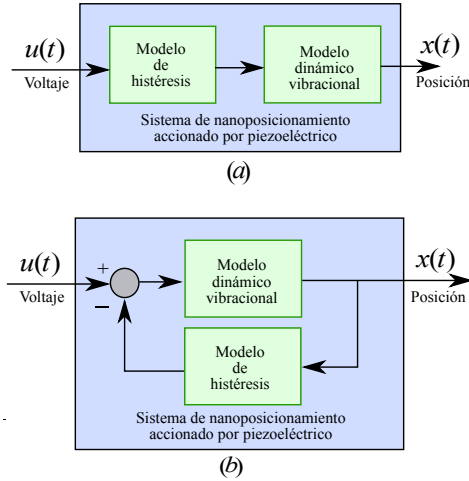


Figura 2.10: (a) Modelo de sistema en Cascada. (b) Modelo de sistema en paralelo.

lineal asociada con la dinámica de alta frecuencia del sistema precedida por el descriptor de la histéresis. Por su parte, el modelo en paralelo considera que el fenómeno de la histéresis afecta a la relación lineal que existe entre la posición y la tensión eléctrica aplicada a la entrada del sistema, considerándose como un fenómeno no lineal dependiente de la posición que modifica el nivel de voltaje aplicado [Liu et al., 2022; Zhang, 2020; Zhang and Yan, 2018b, 2019; Zhang et al., 2020, 2021].

En lo que respecta al modelado de histéresis, en la literatura se hallan diferentes desarrollos los cuales se pueden clasificar en dos categorías: modelos basados en la física y modelos fenomenológicos. En la Figura 2.11 se muestran algunos modelos pertenecientes a estas categorías, comúnmente utilizados para representar este fenómeno no lineal de los sistemas actuados mediante piezoeléctricos.

Los modelos basados en la física se fundamentan en los primeros principios de los fenómenos físicos. Uno de estos modelos más difundidos es el Jiles-Atherton [Jiles and Atherton, 1986; Rosenbaum et al., 2010], originalmente propuesto para describir la histéresis en los materiales ferromagnéticos. Basándose en estos desarrollos, Smith y Ounaies [Smith and Ounaies, 2000] propusieron un

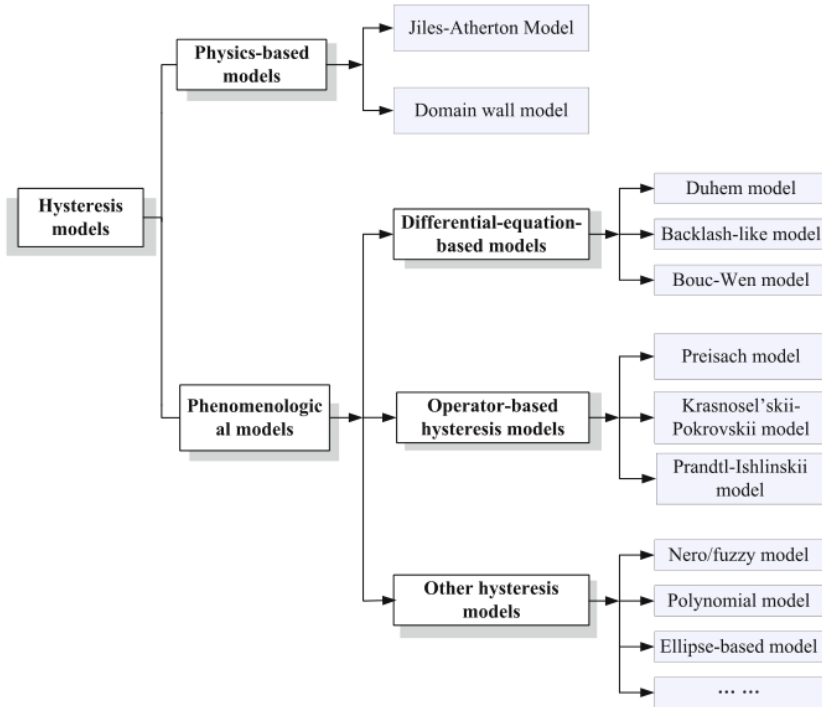


Figura 2.11: Categoría de modelos comúnmente utilizados para representar los ciclos de histéresis de los piezoeléctricos. Extraído de [Ru et al., 2016].

modelo en el cual contemplan el comportamiento de los dominios de Weiss en los materiales piezoeléctricos, formulando la descripción matemática del fenómeno por medio de una ecuación diferencial ordinaria. Aunque los modelos basados en la física ofrecen una descripción precisa y detallada del fenómeno en cuestión, en general son complejos de sintetizar como controladores, lo que dificulta su aplicación práctica para tareas de control en tiempo real. En contraste, los modelos fenomenológicos se utilizan para producir comportamientos similares a los fenómenos reales sin necesidad de una descripción detallada del fenómeno físico que se está representando. En términos matemáticos, los modelos fenomenológicos de histéresis comúnmente utilizados para describir esta no linealidad de los piezoeléctricos se establecen a partir de descriptores expresados mediante operadores, ecuaciones diferenciales, u otro tipo de algoritmos.

Los modelos basados en operadores utilizan algún tipo de ponderación o peso en las variables del modelo junto con operadores del tipo relé-saturación para la descripción del fenómeno de la histéresis. Dentro de esta categoría, se encuentra el modelo Preisach (P) [Macki et al., 1993] basado en el operador relé junto con funciones de densidad, el modelo Krasnosel'skii-Pokrovskii (K-P) [Wang et al., 2007] usado principalmente para modelar y compensar histéresis en aplicaciones con materiales que presenten algún tipo de memoria local, y el modelo Prandtl-Ishlinskii (P-I) [Macki et al., 1993] propuesto originalmente para modelar ciclos de histéresis simétricos en materiales elastoplásticos.

Los modelos fenomenológicos establecidos como ecuaciones diferenciales permiten representar el fenómeno de la histéresis a partir de una variable de estado adicional en la descripción dinámica general del sistema, obteniéndose de esta manera un descriptor de histéresis formulado bajo una estructura matemática compacta. Dentro de esta clasificación, se encuentra el modelo Duhem, el cual fue originalmente desarrollado para describir ciclos de histéresis en materiales ferromagnéticos y posteriormente adaptado para representar este fenómeno en actuadores piezoeléctricos [Yi et al., 2009]. Otro modelo bajo el concepto de ecuación diferencial ampliamente utilizado tanto para el modelado como el diseño de controladores es el modelo Bouc-Wen [Ikhouane and Rodellar, 2007]. La principal ventaja que ofrece el modelo Bouc-Wen radica en que presenta pocos parámetros a ser identificados, a partir de los cuales se garantiza que el modelo pueda representar ciertas propiedades inherentes de estos sistemas, tales como la condición de BIBO estabilidad y de disipancia energética, volviéndolo atractivo para el diseño de controladores. Cabe señalar que el modelo Bouc-Wen exhibe discrepancias de bajo orden para describir el fenómeno de histéresis de los piezoeléctricos. Teniendo en cuenta lo expresado en la Sección 2.3.1

respecto a las características del fenómeno de histéresis de los piezoeléctricos, las discrepancias del modelo Bouc-Wen están asociadas con el hecho de que el mismo resulta simétrico, independiente de la frecuencia de la señal de excitación y de memoria local [Chen et al., 2018; Zablotskaya, 2020].

Por lo expuesto previamente en esta Sección, para el modelado de los sistemas de nanoposicionamiento accionados por piezoeléctricos, en esta tesis se ha optado por el modelo Bouc-Wen, el cual para mayores detalles puede consultarse el Apéndice B. Posteriormente, a los efectos de mejorar su capacidad de representar los ciclos de histéresis de estos sistemas, en esta tesis se considera la variable descriptora de la histéresis de este modelo bajo una regla adaptativa en el diseño del controlador.

2.6.2. Modelado del *creep*

Varios modelos se han propuesto para contemplar el fenómeno del *creep*, siendo uno de ellos la descripción aproximada de este fenómeno a partir de funciones logarítmicas [Jung et al., 2000b; Liu et al., 2013b; Salapaka et al., 2002]. Si bien es posible lograr un buen ajuste de los datos experimentales por medio de los modelos logarítmicos, en la práctica no suelen utilizarse en el diseño del controlador o compensador puesto que son modelos no acotados en el tiempo.

Con el objetivo de obtener una descripción simple de este fenómeno y que resulte estable en el tiempo, comúnmente se suele utilizar un modelo lineal como el presentado en [Croft et al., 2001]. Este modelo se ha establecido a partir de la conexión en serie de N elementos elastoplásticos representados mediante amortiguadores y resortes, conectados entre ellos en paralelo. Una ventaja de este modelo radica en que luego puede ser incorporado al modelo lineal del sistema referido a la dinámica vibracional del sistema, facilitando el diseño de la etapa de control aplicable sobre estos sistemas.

2.7. Estrategias de control para sistemas accionados por piezoeléctricos

El desempeño de los sistemas de nanoposicionamiento accionados por piezoeléctricos resulta degradado por la presencia de no linealidades, tales como la histéresis y el *creep*; por el efecto vibratorio de la dinámica vibracional de alta frecuencia propia de los sistemas mecánicos flexibles, y por la incidencia de eventuales esfuerzos externos que puedan incidir sobre el sistema. Por lo

tanto, debe disponerse de una etapa de control a partir de la cual se establezcan señales de accionamiento que permitan llevar la posición del sistema al valor de referencia deseado. En este sentido, en la literatura pueden encontrarse diversas estrategias para comandar a estos sistemas, las cuales se describen a continuación.

2.7.1. Supresión de la histéresis y el *creep* mediante control por carga eléctrica

Atendiendo a la relación lineal entre carga eléctrica y posición en estos sistemas, se han desarrollado dispositivos electrónicos que consiguen accionar estos dispositivos a través de fuentes de carga eléctrica [Fleming and Leang, 2008; Main et al., 1995]. Por medio de esta metodología de energizado, a partir del suministro de cargas eléctricas se consigue mitigar significativamente tanto la histéresis como el *creep*. Esto se logra debido a que la regulación de la carga eléctrica no modifica considerablemente la capacitancia del actuador, produciendo de esta manera una reducción significativa de estos fenómenos no lineales. Sin embargo, esta metodología de accionamiento presenta algunos inconvenientes, como la necesidad de calibrar la ganancia de la fuente de corriente para cada piezoeléctrico a ser energizado, además de imponer una reducción significativa en el ancho de banda del sistema. Esto último hace que se requieran ciertas consideraciones en el diseño de la fuente de cargas eléctricas a los efectos de garantizar un correcto desempeño en aplicaciones de alta frecuencia, lo que encarece su diseño en comparación con los amplificadores de voltaje. Adicionalmente, en estos dispositivos de energizado deben considerarse protecciones adecuadas debido a que poseen lazos de control electrónicos similares a los de una fuente de corriente, a partir de los cuales se suministra energía a una impedancia con naturaleza predominantemente capacitiva, como son los piezoeléctricos.

Por lo expuesto en el párrafo anterior, a los efectos de considerar un sistema de energizado de tipo comercial y que resulte práctico sin requerir de dispositivos adicionales para energizar adecuadamente un piezoeléctrico, en esta tesis se considera la utilización de fuentes amplificadoras de voltaje para comandar los dispositivos accionados mediante este tipo de actuadores.

2.7.2. Supresión de la histéresis y el *creep* mediante inserto de capacitor en serie

Como se ha mencionado, el accionamiento de los actuadores piezoeléctricos mediante voltaje pone de manifiesto fenómenos no lineales tales como la histéresis y el *creep* (ver Sección 2.3), los cuales se perciben entre el voltaje aplicado y la posición del punto de interés considerado sobre el sistema. Esto ha llevado al desarrollo de investigaciones que tratan sobre metodologías de energizado, a partir de las cuales se consigue disminuir la presencia de estas no linealidades sin requerir de algún tipo de realimentación sensorial referida a los desplazamientos [Minase et al., 2010]. En este sentido, en 1988 Kaizuka y Siu [Kaizuka and Siu, 1988] propusieron una forma sencilla de reducir la histéresis y el *creep* en los actuadores piezoeléctricos a partir de un circuito eléctrico que considera un capacitor conectado en serie con el piezoeléctrico. En más detalles, teniendo en cuenta que el piezoeléctrico se comporta como un capacitor no lineal [Goldfarb and Celanovic, 1997b], en el circuito eléctrico propuesto el condensador anexo actúa como un regulador de la carga eléctrica, reduciendo la sensibilidad entre carga eléctrica y capacitancia del actuador. A pesar de la ventaja aquí señalada de este método de accionamiento, esta metodología no se ha difundido en aplicaciones prácticas dado que la inserción de un capacitor eléctrico en serie con el actuador piezoeléctrico divide el voltaje aplicado entre el capacitor y el actuador, lo que reduce el voltaje efectivo aplicado en los bornes del piezoeléctrico, reduciendo el desplazamiento máximo del sistema que se está energizando. Por lo tanto, esta metodología no es usada en esta tesis, contemplándose en su lugar el diseño de estrategias de control basadas en la dinámica del sistema resultante al aplicar mediante una fuente de voltaje un nivel de tensión eléctrica en forma directa en bornes del piezoeléctrico.

2.7.3. Control mediante compensación y realimentación de estados

A pesar de que el accionamiento de los actuadores piezoeléctricos mediante voltaje en forma directa impone el desafío de lidiar con la presencia de no linealidades, por lo expuesto en la Sección 2.7.1 y Sección 2.7.2, en la actualidad esta metodología de energizado sigue siendo la más difundida. Para contrarrestar las no linealidades y otros fenómenos que puedan incidir sobre estos sistemas, se recurre al diseño de una etapa de control basada en el conocimiento de parte de la dinámica del sistema en cuestión que se desea controlar. En la literatura,

pueden encontrarse una gran variedad de estrategias de control diseñadas para comandar a este tipo de sistemas mediante voltaje, siendo algunas de ellas leyes de control pre-alimentadas (*feedforward* en inglés) ó realimentadas (*feedback* en inglés) como se muestra en los diagramas de bloques de la Figura 2.12.

A los efectos de lograr un mayor margen de estabilidad del sistema a lazo cerrado, usualmente en la literatura existente se suele contemplar el diseño de controladores *feedback* con el agregado de algún tipo de compensador para contrarrestar ciertas dinámicas indeseables presentes en los sistemas. Para el diseño de este tipo de controladores combinados, se suele optar por los esquemas de control que se exhiben en la Figura 2.13 [Esbrook et al., 2012; Tang and Li, 2015; Xu and Tan, 2016]. Generalmente, para las arquitecturas de control combinadas exhibidas en la Figura 2.13.(a) y Figura 2.13.(b), el compensador tipo *feedforward* se diseña para contrarrestar el efecto de la histéresis, la dinámica vibracional de alta frecuencia, o ambos fenómenos de manera simultánea dentro de un mismo esquema de compensación [Leang et al., 2009], contemplando el modelo de sistema bajo el paradigma en cascada (ver Sección 2.6.1). Normalmente, se prioriza compensar la histéresis para posteriormente diseñar el controlador *feedback* atendiendo a la dinámica resultante, asumida como lineal la parte vibracional, considerado el efecto *creep* como parte del término de las perturbaciones. Por su parte, para el esquema de control combinado de la Figura 2.13.(c), se consideran los estados del sistema para el desarrollo del compensador, como puede ser para el caso en que se desea compensar la histéresis de los sistemas accionados por piezoeléctricos, modelados bajo el paradigma en paralelo (ver Sección 2.6.1) [Zhang and Yan, 2019; Zhang et al., 2021]. Cabe señalar que, la arquitectura de control de la Figura 2.13.(c) aplicada sobre los sistemas físicos considerados en esta tesis, asegura propiedades de continuidad sobre las variables utilizadas para el diseño de los compensadores basados en modelo. Este aspecto resulta beneficioso, por ejemplo, para el modelo de histéresis Bouc-Wen contemplado bajo el paradigma en paralelo (ver Sección 2.6.1), el cual requiere que la señal de posición del sistema, utilizada como entrada de la variable de histéresis del modelo Bouc-Wen, resulte con primera derivada continua para asegurar la estabilidad de este modelo (ver Sección B.4 del Apéndice B), utilizado como parte del controlador.

Por lo expuesto anteriormente en esta Sección, y teniendo en cuenta lo expresado en la Sección 2.6.1 respecto a los motivos de elección del modelo de histéresis Bouc-Wen bajo el paradigma en paralelo, para el diseño del controlador de los sistemas accionados por piezoeléctricos, en esta tesis se considera la arquitectura de control realimentada de la Figura 2.13.(c), donde el compensador

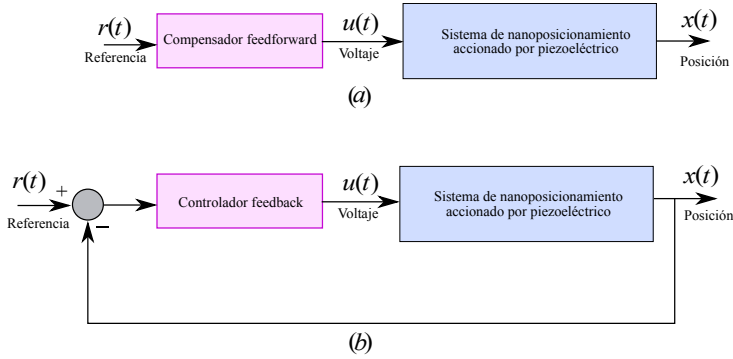


Figura 2.12: (a) Esquema de control *feedforward*. (b) Esquema de control *feedback*.

de la histéresis se establece teniendo en cuenta las ideas de diseño expuestas en la siguiente Sección.

Compensación de la histéresis

En la literatura se distinguen tres enfoques para la compensación de la histéresis, establecidos a partir de los modelos señalados en la Sección 2.6.1. El primer enfoque, consiste en construir un compensador utilizando el modelo inverso analítico del descriptor de la histéresis usado para modelar el sistema, el cual resulta apto solo para algunos tipo de modelos detallados en la Sección 2.6.1, como es el caso del modelo P, P-I y P-K. Bajo este enfoque, se debe señalar que, la ventaja principal del modelo P-I sobre los modelos P y K-P radica en que el primero presenta una inversa analítica exacta [Krejci and Kuhnen, 2001], mientras que para los dos últimos aquí señalados se han desarrollado inversas aproximadas [Galinaitis, 1999; Venkataraman et al., 2001], adoptándose métodos numéricos iterativos para la implementación de los compensadores [Visone, 2008].

El segundo enfoque está basado en el diseño del compensador a partir de un modelo de histéresis tal que produzca ciclos simétricos a los del sistema respecto a la recta de pendiente unitaria que pasa por el origen de coordenadas en el plano $(u(t), x(t))$, siendo $u(t)$ el voltaje aplicado y $x(t)$ la posición del sistema. En más detalles, en esta metodología se realiza un pre-procesamiento

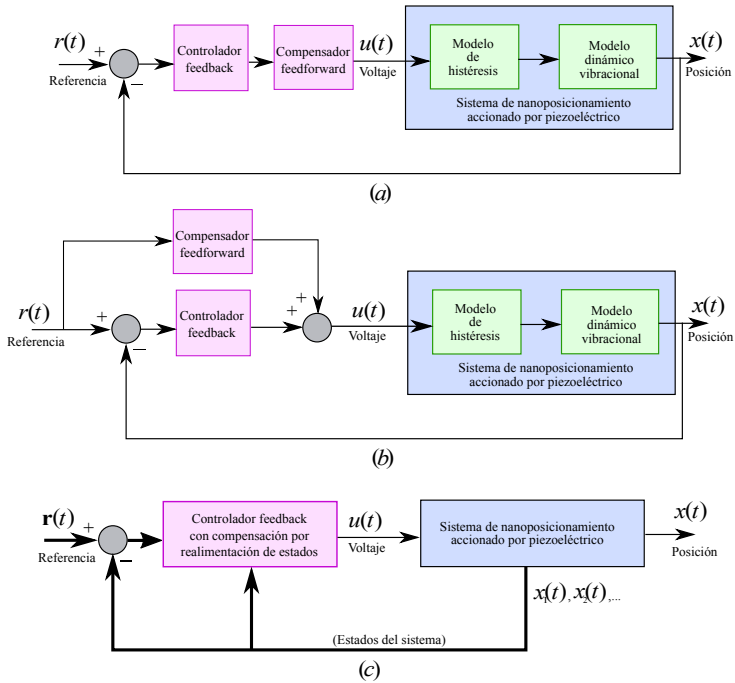


Figura 2.13: Esquemas de control habituales para los sistemas accionados por piezoeléctricos. (a) Compensador *feedforward* en cascada dentro del lazo realimentado. (b) Salida del compensador *feedforward* sumada a la señal de control obtenida del lazo cerrado. (c) Esquema de control *feedback* con compensación por realimentación de estados.

de los datos referidos a posición y voltaje aplicado, y se ajustan los parámetros del compensador de manera tal de lograr ciclos de histéresis contrarios a los del sistema [Gu et al., 2012a]. Luego, este modelo se utiliza como bloque de entrada del sistema para modificar la señal de control referida a voltaje, de modo que la relación entre lo que se considera la entrada y la salida del sistema compensado resulte lo más cercana posible a la recta de pendiente unitaria del plano $(u(t), x(t))$. Atendiendo a esta metodología, se han desarrollado compensadores utilizando el modelo P [Croft et al., 2001] y P-I [Gu and Zhu, 2013], entre otros. Sin embargo, se debe tener en cuenta que este enfoque de diseño solo proporciona una compensación aproximada, puesto que el compensador se diseña a partir de ciclos de histéresis virtuales generados a partir del pre-procesamiento de los datos de entrada-salida del sistema.

El tercer enfoque utiliza directamente el modelo de histéresis desarrollado, sin requerir del cálculo de una inversa analítica del mismo o de la modificación de los datos experimentales para su identificación. En más detalles, este enfoque de compensación proporciona al sistema una entrada tal que permita cancelar la histéresis a partir de una suma algebraica, en donde debe considerarse un retardo (*delay* en inglés) de una muestra en el compensador desarrollado cuando el mismo se considera desde un modelo de sistema con histéresis en cascada (ver Sección 2.6.1), no siendo necesaria esta consideración para el modelo en paralelo. Cabe señalar que, este tercer enfoque de diseño del compensador de histéresis resulta válido sólo para algunos modelos de histéresis mencionados en este trabajo, como es el caso del P-I [Rakotondrabe, 2012] y Bouc-Wen [Rakotondrabe, 2010]. Por este motivo y por lo expuesto en la Sección 2.6.1 respecto a la elección del modelo Bouc-Wen en paralelo en la descripción dinámica de los sistemas accionados por piezoeléctricos, para el diseño del controlador presentado en esta tesis, se ha optado por este tercer enfoque para la construcción del compensador de histéresis de estos dispositivos.

2.8. Control de sistemas duales para posicionamiento

Debido a su escaso recorrido, los sistemas actuados por piezoeléctricos quedan limitados a aplicaciones que demanden recorridos de algunas decenas de micrómetros. Para aquellas aplicaciones donde se requiere posicionamientos de gran precisión en un amplio rango de actuación que puede llegar a varios milímetros, se recurre a la combinación de dos (o más) sistemas de movimiento,

uno tradicional a partir del cual se consiguen movimientos de largo alcance y precisión limitada, y otro con alta resolución en el posicionado y reducido alcance, generalmente accionado mediante piezoeléctrico. Este tipo de sistemas constituidos por dos subsistemas de actuación, fino y grueso, respectivamente, generalmente se los denomina como sistemas duales de posicionamiento. En particular, en el contexto de esta tesis se referirá a los sistemas duales dispuestos tipo tándem para propiciar movimientos lineales sobre un mismo eje de movimiento.

Teniendo en cuenta la información sensorial disponible, un sistema dual de posicionamiento puede considerarse como un sistema de múltiples entradas y una única salida (MISO, por sus siglas en inglés de *Multiple Input-Single Output*) o como un sistema de múltiples entradas y múltiples salidas (MIMO, por sus siglas en inglés de *Multiple Input-Multiple Output*). Por lo tanto, es común diseñar un controlador para un sistema dual empleando técnicas de control para sistemas MIMO dentro del tópico de control H_2 [Nagamune et al., 2006], Control Predictivo [Neelakantan et al., 2008], entre otros. Por su parte, la estrategia de control predictivo resulta atractiva para el control de estos sistemas puesto que pueden incorporarse las restricciones del sistema durante el proceso de optimización llevado a cabo en cada instante de muestreo, contemplándose de esta manera las limitaciones físicas de los subsistemas de movimientos tales como rango máximo de desplazamiento, velocidades máximas, entre otros factores.

Aunque la estrategia de control MIMO es capaz de contemplar el comportamiento de interferencia que puede llegar a existir entre ambos subsistemas de posicionamiento, generalmente produce un controlador que puede llegar a impedir su implementación práctica en tiempo real, debido a que se obtienen controladores de muy alto orden. Por lo tanto, se han propuesto algunos enfoques para trabajar con este tipo de sistemas MIMO mediante el uso de esquemas de control de única entrada y salida (SISO, por sus siglas en inglés de *Single-Input Single-Output*) como el método de control en paralelo [Guo et al., 1999], mediante filtro complementarios [Mitrovic et al., 2020], la arquitectura Maestro-Esclavo [Chen et al., 2008], y el enfoque Maestro-Esclavo desacoplada [Hredzak et al., 2005], donde esta última ha sido una de las más difundidas para el control de este tipo de sistemas sobreactuados [Elfizy et al., 2005; Liu et al., 2009; Xu, 2012; Yamaguchi et al., 2013]. En esencia, esta arquitectura de control establece dos lazos realimentados, uno para comandar la etapa gruesa y el otro para el accionamiento de la etapa fina de movimiento, disponiéndose de esta manera de dos controladores. En esta arquitectura de control, la señal de referencia de posición

se suministra como entrada al lazo de control del sistema grueso de movimiento, mientras que el error de posición de este es suministrado como señal de referencia para el controlador de la etapa fina de movimiento. La principal ventaja de esta arquitectura radica en que los lazos de control de cada subsistema de actuación pueden establecerse en forma independiente. Con lo cual, los dos controladores se pueden diseñar de manera desacoplada, bajo distintos enfoques algorítmicos o bien, bajo estructuras algorítmicas similares pero con parámetros independientes entre ellos. En particular, para el diseño de los controladores suele recurrirse a técnicas y algoritmos propios de la teoría de Control Robusto a los efectos de poder garantizar un correcto desempeño ante eventuales incertidumbre estructurales o paramétricas del sistema.

2.9. Control por modos deslizantes

Una de las estrategias de control dentro del paradigma de Control Robusto que ha llamado la atención de los investigadores estos últimos años se denomina control por modos deslizantes (SMC, por sus siglas en inglés de *Sliding Mode Control*) [Xu and Tan, 2016]. La principal ventaja de estos algoritmos radica en la baja sensibilidad a las variaciones de los parámetros del sistema, incertidumbres en el modelo y perturbaciones, dotando al sistema controlado de suficiente robustez sin requerir de un modelado detallado del sistema. Por su parte, este tipo de controladores permite concentrar la dinámica del error de la variable que se está controlando en una única variable, denominada superficie de deslizamiento, facilitando en ciertos aspectos el diseño del algoritmo de control.

El nombre de control por modos deslizantes proviene del hecho de que, en estas estrategias de control, los estados del sistema son forzados a evolucionar sobre un subespacio del espacio de estados, el cual se denomina superficie de deslizante. El diseño de un algoritmo SMC involucra tres pasos: el modelado del sistema, la definición de la superficie de deslizamiento $s(t)$ y la selección de una lógica de conmutación, la cual asegure que las trayectorias del sistema se dirijan hacia la superficie de deslizamiento $s(t) = 0$ y alcancen a la misma en un tiempo finito (situación ideal), para luego permitir que las mismas se muevan (deslicen) sobre dicha superficie. En este sentido, las leyes SMC tienen en cuenta dos etapas: la primera relacionada con lo que se conoce como modo de alcance a la superficie de deslizamiento desde cualquier punto en el espacio de estados, y la segunda referida al modo de deslizamiento, la cual obliga a las trayectorias del sistema a deslizarse sobre la superficie definida. Las ideas relacionadas al modo

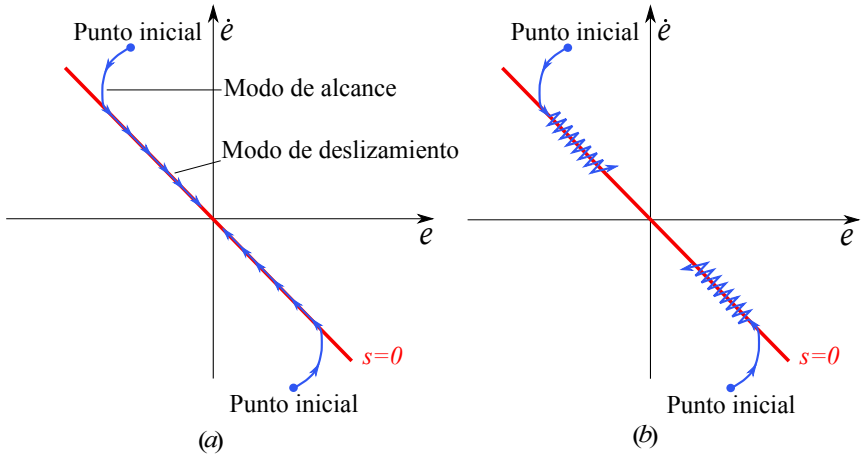


Figura 2.14: Representación cualitativa del modo de alcance y deslizamiento de un algoritmo SMC. (a) SMC ideal, donde e expresa la señal error de la variable controlada. (b) Efecto del *chattering*.

de alcance y deslizamiento sobre la superficie se representan cualitativamente en la Figura 2.14.(a) para un sistema de segundo orden, donde la superficie $s(t) = 0$ se muestra como un atractor de las trayectorias de la dinámica del error del sistema tal que conduce a las mismas hacia el origen de coordenadas, haciendo que el error de la variable controlada tienda a cero. Para detalles técnicos referidos al modo de alcance y de deslizamiento, y aspectos generales asociados con la filosofía de diseño de estos algoritmos de control, puede consultarse el Apéndice C.

2.9.1. Aspectos generales referidos al diseño de algoritmos de control por modos deslizantes

En cuanto al diseño de la superficie de deslizamiento en los algoritmos SMC, en la literatura pueden encontrarse algoritmos que incluyen superficies lineales, siendo las más difundidas las de tipo Proporcional-Derivativa (PD) como la que se muestra en la Figura 2.14, y Proporcional-Integral-Derivativa (PID) [Eker and Akınal, 2008]. Cabe señalar que, este tipo de superficies lineales solo pueden garantizar la convergencia asintótica del error hacia cero. En más detalles

sobre esta cuestión, el diseño del algoritmo SMC teórico ideal garantiza que las trayectorias del sistema alcancen la superficie de deslizamiento $s(t) = 0$ en un tiempo finito. Luego, bajo un correcto diseño de estos algoritmos, las superficies de deslizamiento lineales conducen asintóticamente las trayectorias del sistema hacia el origen de coordenadas, garantizando de esta manera una convergencia global de las trayectorias del sistema a cero en un tiempo infinito. Para superar esta limitación, en la literatura pueden encontrarse diseños de superficies de deslizamiento no lineales que aseguran una convergencia del error a cero en un tiempo finito [Yu et al., 2020].

Por su parte, en el diseño de los algoritmos SMC convencionales, se requiere del conocimiento de una cota superior de las perturbaciones del sistema, la cual puede resultar imposible de conocerse con exactitud. Generalmente, este valor límite se sobrestima a los efectos de asegurar la estabilidad del sistema controlado a partir de estos algoritmos, lo que puede provocar un rendimiento deficiente debido a la presencia de vibraciones de alta frecuencia en la señal de control ocasionadas por la función discontinua tipo signo utilizada en este tipo de algoritmos, conocido comúnmente como efecto *chattering*, exhibido en la Figura 2.14.(b). El *chattering* surge por la imposibilidad en realizar accionamientos de muy alta velocidad requeridas en estos algoritmos (con velocidad de conmutación teórica infinita), debido principalmente a la presencia de retardos de tiempo introducidos por el sistema de muestreo durante la adquisición de datos, y limitaciones en el ancho de banda de los sistemas reales usados para la actuación. El *chattering* es un fenómeno que no solo puede degradar la precisión del sistema controlado, sino que además puede degradar la vida útil del sistema. Luego, a mayor ganancia de conmutación, el efecto vibratorio asociado al *chattering* resulta mucho más notorio puesto que el algoritmo de control posee un término robusto mucho más agresivo, haciendo que este fenómeno pueda agravar aún más la inestabilidad del sistema.

2.9.2. Control por modos deslizantes adaptativos

En los algoritmos SMC, una forma de garantizar la estabilidad del sistema y reducir el fenómeno vibratorio del *chattering* se consigue a partir de la incorporación de leyes adaptativas en la ley de control. En este sentido, por un lado se diseña una regla de autoajuste de la ganancia de conmutación del término robusto a los efectos de disponer de un valor moderado para la misma y que permita garantizar la estabilidad del sistema [Plestan et al., 2010a]. Por otro lado, con el propósito de reducir el término de las perturbaciones, en el estado del arte

actual se encuentran trabajos que se centran en el diseño de reglas adaptativas para la estimación de parámetros, así como de observadores para dinámicas no lineales presentes en estos sistemas [Li and Xu, 2009].

En los sistemas accionados mediante piezoelectricos, el fenómeno de histéresis surge de la relación entre el voltaje aplicado y la carga eléctrica generada (ver Sección 2.3.1). Sin embargo, esta dinámica es inaccesible en la práctica, ya que en la mayoría de los sistemas comerciales de nanoposicionamiento solo se dispone de la información sensorial relacionada con la posición del sistema. Por su parte, la histéresis de los piezoelectricos es dependiente de la frecuencia de la señal de excitación y de la temperatura, presentando características asimétricas en las ramas de un mismo ciclo y de memoria no local, tal como se ha señalado en la Sección 2.3.1. Por lo tanto, los modelos con memoria local, simétricos y que resultan independientes de la frecuencia, no pueden describir de manera adecuada este fenómeno no lineal. Para superar estas limitaciones, Zhang *et al.* [Chen and Yang, 2021; Yan and Zhang, 2018; Zhang and Yan, 2018a, 2019; Zhang et al., 2020, 2021] han propuesto observadores de histéresis por medio de leyes SMC adaptativas. Con estos desarrollos, se busca introducir en la ley de control un término que pueda presentar ciertas discrepancias con respecto al comportamiento real de los ciclos de histéresis del sistema y posea la capacidad de compensar adecuadamente esta dinámica mediante una regla de corrección para la estimación. En este sentido, por medio de estos desarrollos se intenta reducir la incidencia de las perturbaciones asociadas con el error de modelado de la histéresis, permitiendo de esta manera el uso de una ganancia de conmutación de menor valor en el término robusto de la ley SMC, disminuyendo el efecto del *chattering*. Luego, esta cota superior se estima a partir de una regla adaptativa impuesta sobre la ganancia del término robusto.

Para suprimir de manera efectiva el fenómeno del *chattering*, en aplicaciones de tiempo real se recurre a sustituir la función signo utilizada en el término robusto de los algoritmos SMC por una función de conmutación continua. Algunas funciones de conmutación suaves comúnmente utilizadas son tipo saturación, sigmoideal o tangente hiperbólica, entre otro tipo de funciones. En [Zhang et al., 2021] los autores han expresado esta consideración, sin embargo, la prueba de estabilidad del sistema controlado a partir de los desarrollos SMC con compensador de histéresis adaptativos previamente citados se han establecido solamente para el caso ideal en el que se utiliza la función signo en el término robusto, sin presentar un análisis de estabilidad riguroso si en su lugar se utiliza alguna función de conmutación continua. En este punto, resulta oportuno señalar que una función de conmutación continua en el término robusto no puede

garantizar que la superficie de deslizamiento resulte igual a cero en un tiempo finito. Luego, teniendo en cuenta que las reglas adaptativas y de estimación propuestas en los trabajos señalados involucran la integración de la variable superficie de deslizamiento en el cómputo de las estimaciones, es necesario realizar modificaciones en las reglas adaptativas señaladas con el propósito de asegurar que tanto las variables estimadas como la controlada permanezcan acotadas en el tiempo. Esta observación resulta crucial a los efectos de garantizar la estabilidad global del sistema controlado en lo que respecta a aplicaciones de tiempo real.

En base al estado del arte presentado, en esta tesis se expone una modificación del algoritmo de control SMC con compensación de la histéresis adaptativo señalado en [Zhang et al., 2020], en donde se utiliza una función de conmutación continua en el término robusto para mitigar los efectos indeseados del *chattering*, garantizando la estabilidad global del sistema y un correcto desempeño del sistema a lazo cerrado.

2.10. Conclusiones

En este Capítulo se ha presentado el estado del arte referido al modelado y control de los sistemas de nanoposicionamiento accionados por piezoeléctrico para la ingeniería de precisión. Como se ha expuesto, el desempeño de estos sistemas es afectado por la presencia de no linealidades propias de los actuadores piezoeléctricos, tales como la histéresis y el *creep*, de la configuración de accionamiento del sistema mecánico, eventuales variaciones en las condiciones operativa de estos sistemas y la presencia de esfuerzos externos que puedan incidir sobre los mismos.

En vista de las observaciones realizadas, en los próximos Capítulos se abordarán cuestiones que tienen que ver con el modelo y control de este tipo de sistemas, con especial atención en la compensación del fenómeno no medible de la histéresis presente en estos sistemas a través del diseño de un observador en un algoritmo SMC adaptativo. Dado que se pretende desarrollar una estrategia de control de fácil implementación, en esta tesis se considera un modelo detallado pero a la vez lo suficientemente simple para su síntesis en el algoritmo establecido y su posterior sintonización en aplicaciones de tiempo real.

CAPÍTULO 3

Sistema experimental

3.1. Introducción

En este Capítulo se detalla el sistema experimental utilizado durante el desarrollo de esta tesis. Todo el equipamiento descrito se encuentra en el Laboratorio de Mecatrónica Aplicada de la Facultad de Ingeniería de Universidad Nacional de La Pampa (FI-UNLPam).

3.2. Posicionador nanométrico para etapa fina de movimiento

En esta Sección se presenta el equipamiento referido al sistema de nanoposicionamiento de estructura flexible accionado por un piezoeléctrico contemplado en esta tesis, el cual ha sido diseñado y ensamblado por parte del equipo de trabajo del Laboratorio de Mecatrónica Aplicada de la FI-UNLPam. Cabe señalar que el mismo se ha diseñado teniendo en cuenta aspectos mecánicos y de ensamble ampliamente difundidos en la literatura, con características muy similares a dispositivos que pueden adquirirse comercialmente. Para cuestiones referidas al diseño de la estructura flexible de este posicionador, puede consultarse [Flores et al., [2018](#)].

3.2.1. Sistema mecánico de accionamiento

Para el desarrollo de pruebas experimentales, se dispone de un sistema flexible accionado por piezoeléctrico con amplificación de recorrido, de un grado de libertad, el cual se exhibe en la Figura 3.1. El sistema elástico que guía el movimiento del área central es del tipo doble viga plegada, con baja rigidez en la dirección del movimiento y alta en las restantes, lo cual permite que el eje principal de movimiento coincida con la dirección de actuación del piezoeléctrico. El material de la estructura flexible de este dispositivo es Aluminio 7075 con módulo de elasticidad $E = 72$ GPa, presentando un espesor de 10 mm. Por su parte, el actuador piezoeléctrico utilizado en este dispositivo es de la marca ThorLab modelo PK4FYC2 [Tho, 2021], de tipo *stack* de área transversal rectangular, el cual posee una capacitancia nominal de $3,5 \mu\text{F}$. La hoja de datos indica que este actuador posee una rigidez equivalente de $k_a = 26$ N/ μm en la dirección de actuación, una fuerza máxima en condiciones de bloqueo de $F_p = 666$ N y un desplazamiento nominal en vacío de $25,6 \mu\text{m}$ para un voltaje de alimentación de 100 V.

Como puede apreciarse de la Figura 3.1, el actuador piezoeléctrico se encuentra alojado en el mismo sistema flexible de manera tal que uno de sus extremos se encuentra solidario al brazo de palanca a través de una superficie con un vínculo flexible del tipo muesca circular, y el otro extremo se encuentra vinculado a la base de la estructura. Dado que, para aplicaciones dinámicas se debe ajustar una precarga externa, la misma se logra con una deformación previa del sistema flexible a través de un tornillo dispuesto para tal fin, a partir del cual se modifica la posición de la base que sirve como apoyo del actuador piezoeléctrico. Cabe señalar que, el recorrido útil del sistema resulta de $48 \mu\text{m}$ para un voltaje de entrada de 100 V.

Para energizar al actuador piezoeléctrico, se dispone de una fuente amplificadora de voltaje modelo E-617.001 de la firma PI [Phy, 2010], la cual ofrece un rango de entrada de -2 V a 12 V y una salida de -20 V a 120 V (ganancia de amplificación $\times 10$). El ancho de banda de este sistema de alimentación, operando en vacío, resulta de $3,5$ kHz. Atendiendo a los datos del fabricante, el ancho de banda del sistema de energizado resulta inversamente proporcional a la capacitancia del actuador piezoeléctrico que se conecta a su salida, siendo de aproximadamente $1,2$ kHz al considerar el actuador piezoeléctrico del sistema experimental señalado en este trabajo [Phy, 2010].

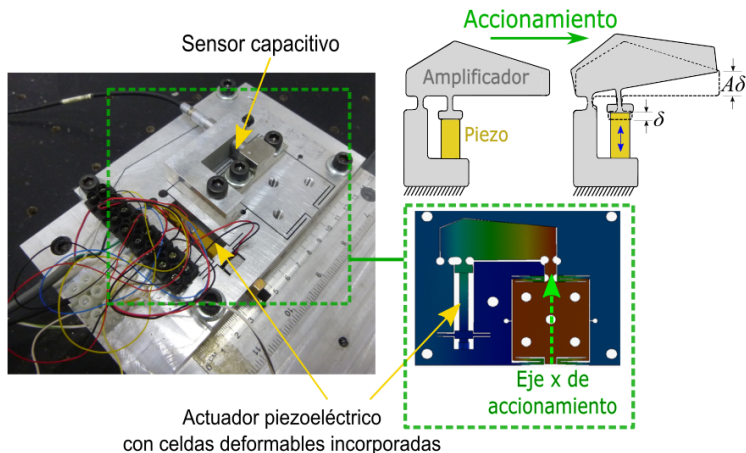


Figura 3.1: Sistema de nanoposicionamiento experimental de un grado de libertad accionado por piezoeléctrico.

3.2.2. Sistema de medición: Sensor capacitivo

Para la medición de la posición, el sistema mostrado en la Figura 3.1 dispone de un sensor capacitivo de placa axial móvil y su correspondiente módulo acondicionador de señal modelo E-852 PI [Phi, 2009], a partir del cual se consigue medir desplazamientos máximos de hasta $50 \mu\text{m}$, con un nivel de ruido de $6,5 \text{ nm (rms)}$, y un ancho de banda máximo de 10 kHz . El módulo acondicionador de señal ofrece un selector para el rango de la señal de voltaje de salida, disponiéndose de las opciones $\pm 10 \text{ V}$, $\pm 5 \text{ V}$ y de 0 V a $+10 \text{ V}$. Además, este módulo ofrece la posibilidad de seleccionar entre dos filtros pasa bajo para el acondicionamiento de la señal de salida, con frecuencia de corte a 3 kHz y 300 Hz , respectivamente, a los efectos de aminorar la señal de ruido en la medición para aplicaciones que no demandan elevadas velocidades de accionamiento.

3.3. Posicionador para etapa gruesa de movimiento

En esta sección se detalla el sistema experimental utilizado como etapa gruesa de movimiento considerado para las pruebas de control de posicionamiento de un sistema dual de accionamiento. Para detalles de la configuración de

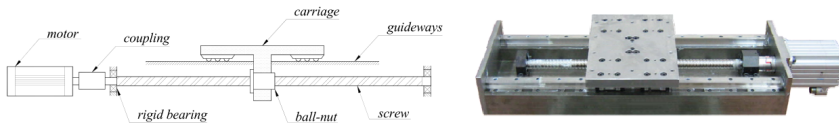


Figura 3.2: Sistema tradicional de posicionamiento tipo tornillo sin fin y bolas recirculantes considerado como etapa gruesa de movimiento. Extraído de [Casquero et al., 2010].

accionamiento de este sistema, puede consultarse [Casquero et al., 2010].

3.3.1. Sistema tornillo-tuerca de bolas recirculantes accionado por motor eléctrico

El sistema experimental considerado como etapa gruesa de movimiento consiste en un posicionador lineal basado en un mecanismo de tornillo y bolas recirculantes, el cual se exhibe en la Figura 3.2. Este se compone de un tornillo cuyo paso es de 10 mm/rev, que gira respecto de una base por medio de rodamientos ubicados en sus extremos. En la parte inferior del carro se encuentra unido de manera rígida el soporte para la tuerca, la cual se encuentra pretensada a los efectos de reducir el juego mecánico. El carro en movimiento está guiado por dos guías lineales de bolas recirculantes ubicadas en sus laterales, las cuales soportan las cargas a las que se encuentra sometida la plataforma móvil. Por medio de estas guías laterales se consigue garantizar que la plataforma móvil del sistema se mueva en línea recta en forma paralela al eje de accionamiento. En uno de los extremos del eje de accionamiento se encuentra el acoplamiento mecánico que une el tornillo con el servomotor tipo Brushless modelo MTR-100-3S Festo [Fes, 2000a], a partir del cual se generan los movimientos. Este actuador posee un torque nominal de 3,53 Nm y una velocidad máxima de 3600 rpm.

3.3.2. Controlador de corriente

Tal como sucede en configuraciones típicas de la industria, la salida del sistema de adquisición utilizada por los controladores propuestos en esta tesis, no actúa directamente sobre los bobinados del motor, sino que aplica una referencia al propio lazo de corriente del motor. Este lazo de corriente es gobernado por un

controlador propio del sistema [Fes, 2000b,c,d]. Internamente la regulación de corriente se efectúa mediante un lazo de control PI actuando sobre el inversor que funciona en modo de fuente de tensión, con una frecuencia de conmutación de 4 kHz. La entrada de referencia al controlador de corriente se hace mediante una entrada analógica de tensión diferencial en el intervalo de ± 5 V. Esta es una entrada digitalizada de 12 bits (4,88 mV de resolución) y con un periodo de muestreo de 500 μ s. Al funcionar en modo control de corriente, la señal resultante pasa por un filtro de primer orden con una constante de tiempo configurable (por defecto 2 ms) antes de enviarse como referencia al controlador PI del lazo de corriente. Cabe señalar que este controlador de corriente es una solución comercial cerrada, lo cual impone ciertas limitaciones a las posibilidades de un control que se base en este dispositivo, restringiendo la frecuencia máxima de muestreo de la señal de referencia a 2 kHz.

3.3.3. Sistema de medición: *encoder* rotacional

Para la estimación de la posición del sistema, el servomotor dispone de un codificador (*encoder* en inglés) rotacional de la firma Heidenhain modelo ERN 1070 – 3600 [Hei, 2011, 2015]. Este sensor de posición es de tipo óptico incremental que posee salida sinusoidal formada por señales de tensión diferencial, a partir del cual se consigue una resolución de movimiento lineal de aproximadamente 0,139 μ m. Dado que la salida emulada del *encoder* rotacional tiene niveles de tensión RS422, mientras que la placa para lectura de *encoders* utilizada en esta tesis requiere niveles de tensión TTL, la salida del *encoder* ingresa previamente a un adaptador de niveles de tensión RS422 a TTL. Finalmente las señales TTL de salida ingresan al primer canal de la placa de expansión para lectura de *encoders* en cuadratura.

3.4. Sistemas de adquisición de datos

3.4.1. Sistema de adquisición de datos para comandar únicamente la etapa fina de movimiento

Para la realización de gran parte de las pruebas experimentales llevadas a cabo en esta tesis, se utilizó el sistema Ueism 600 – 1G de la empresa United Electronics Industries [Uni, 2013a,b], el cual se muestra en la Figura 3.3. El mismo presenta la ventaja de que convierte un módulo de adquisición



Figura 3.3: Sistema adquirente de datos Ueism 600 – 1G Cubo.

en un destino que puede ejecutar modelos de Simulink de lectura/escritura de sus entradas o salidas físicas. El host del software del Ueism usa el Real-time Workshop de Simulink para convertir su modelo a código C y luego compilarlo en un archivo ejecutable, el cual se ejecuta directamente en el hardware del Cubo Ueism, disponiéndose de una frecuencia máxima de muestreo de 10 kHz. El procesador del Cubo es un Power PC, el cual ejecuta un sistema operativo Linux contenido en la memoria *flash* junto con los controladores para cada una de las tarjetas de entrada/salida. La conexión a la PC puede realizarse mediante un cable de red haciendo una red privada local o mediante una conexión RS232, habiéndose optado por la primera opción para el desarrollo de las pruebas experimentales referidas exclusivamente al control de la etapa fina de movimiento señaladas en esta tesis. Este sistema de adquisición cuenta con una placa para lectura analógica modelo DNA-AI-201 – 100 [Uni, 2009a], la cual ofrece 24 entradas para una conexión simple y 12 entradas para una conexión en modo diferencial de 16 bits de resolución cada una con un rango de entrada de ± 15 V ajustable. Por su parte, se dispone de una placa para salida analógica modelo DNA-AO-308 [Uni, 2009b], con 8 salidas de 16 bits de resolución cada una con un rango de ± 10 V.

En la Figura 3.4 se muestra un esquema unifilar del conexionado utilizado

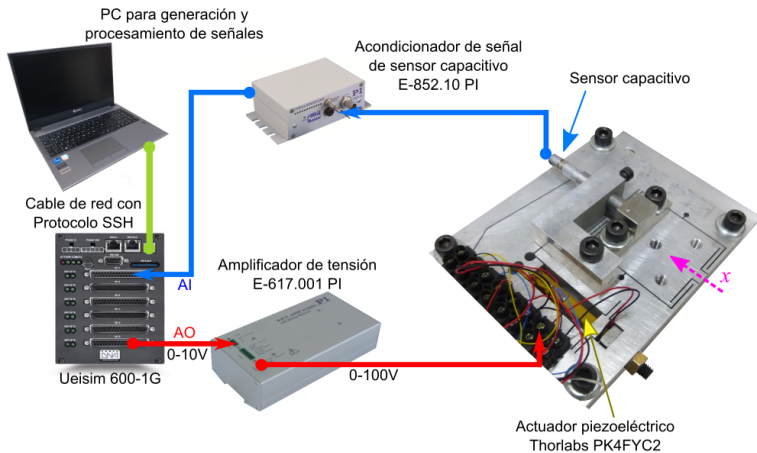


Figura 3.4: Esquema de conexionado y equipamiento utilizado.

en el desarrollo de la mayor parte de las pruebas experimentales desarrolladas en esta tesis para el accionamiento únicamente de la etapa fina de movimiento.

3.4.2. Sistema de adquisición de datos para comandar el sistema grueso y dual de posicionamiento

Para cuestiones que tienen que ver con el accionamiento del sistema grueso de movimiento y el control del sistema dual de posicionamiento, se ha utilizado una placa de adquisición de datos Microstar Labs modelo DAP 5200a [Mic, 2006] con las siguientes características:

- CPU propio AMD K6-III + de 400 MHz
- 32 MB de RAM
- Transferencia de datos a la PC de hasta 1666 ks/s
- Velocidad máxima de muestreo de 800 kHz
- 16 entradas analógicas de 14 bits de resolución con rangos de entrada configurables a $\pm 2,5$ V, ± 5 V, 0 V-5 V y ± 10 V

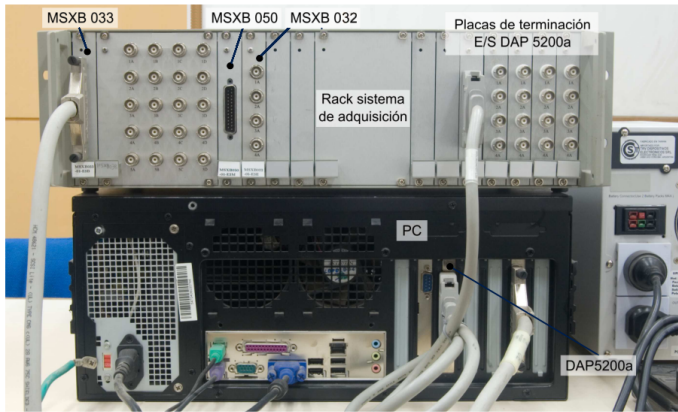


Figura 3.5: Sistema adquisidor de datos DAP 5200a.

- 2 salidas analógicas con una resolución de 12 bits con rangos de salida configurables a $\pm 2,5$ V, ± 5 V, 0 V-5 V, 0 V-10 V y ± 10 V
- 16 entradas digitales
- 16 salidas digitales.

Se cuenta además con un Rack industrial donde se alojan las placas para proveer conexiones de señales discretas tanto de entrada como de salida. Este sistema cuenta con una placa MSXB 035, la cual brinda la posibilidad de colocar hasta 21 placas de expansión digitales, conectado a la placa DAP5200a a través de una placa de interfaz de expansión digital MSXB 033. En particular, las placas de expansión que serán utilizadas son una placa de expansión de salida analógica MSXB 032 [Mic, 2005] utilizada para comandar al piezoeléctrico y una placa de expansión para *encoders* en cuadratura MSXB 050 [Mic, 2004]. Esta última es capaz de leer hasta 4 pares de señales TTL con frecuencias de hasta 1 MHz codificadas en cuadratura y posee contadores con una resolución de 16 bits que pueden reiniciarse mediante entradas externas. La placa de adquisición DAP5200a está colocada en un slot PCI de una PC Intel Pentium 4 de 3 GHz con 1 GB de RAM, con Windows XP Profesional SP2 como sistema operativo. En la Figura 3.5 se muestra la PC utilizada así como las placas mencionadas del sistema de adquisición.

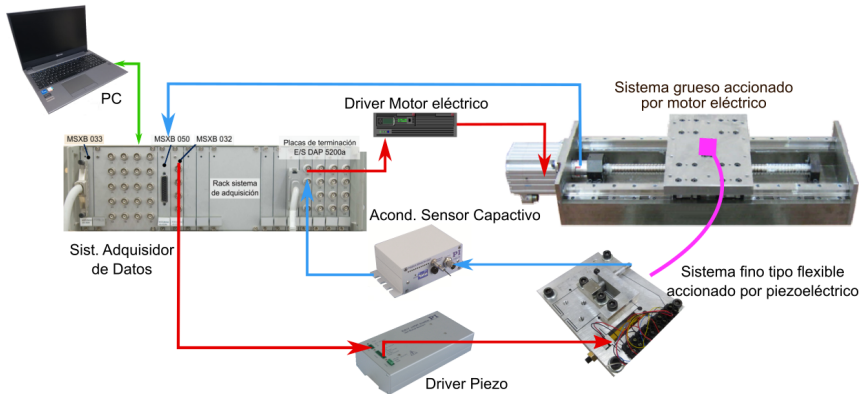


Figura 3.6: Equipamiento para sistema dual de movimiento considerado en esta tesis.

El software utilizado para implementar el control es el compilador Borland C++ 5,5, junto con el paquete de herramientas Daptools Professional de Microstar Labs. En particular, de este paquete de software se utilizó la librería DAPIO32 [Mic, 2002], que provee las rutinas necesarias para la comunicación con la placa DAP5200a usadas en la implementación del software de interfaz de usuario, el servidor DAPCell que es a su vez requerido por las rutinas de comunicación provistas en la librería DAPIO32, y las librerías del Developer's Toolkit for DAPL, que permiten implementar el software de control que corre en la placa DAP5200a.

En la Figura 3.6 se muestra un esquema unifilar del conexionado utilizado para el desarrollo de las pruebas experimentales realizadas en esta tesis para el accionamiento del sistema dual de movimiento. Cabe señalar que, mediante el programa desarrollado en lenguaje C se ha establecido un menú de opciones que permite comandar únicamente la etapa gruesa de movimiento o ambas en simultáneo. Respecto a la opción de accionamiento de ambas etapas de actuación en simultáneo, se ha establecido una frecuencia de muestreo de 8 kHz. Luego, para cumplir con los requisitos de la frecuencia de actualización de la señal del driver del motor eléctrico a 2 kHz, en el código desarrollado sobre la base de 8 kHz se considera la actualización de la salida para el accionamiento de la etapa gruesa de movimiento cada 4 ciclos de salida.

3.5. Conclusiones

En este Capítulo se presentó el sistema experimental que se ha utilizado durante el desarrollo de esta tesis. Si bien el sistema accionado por piezoeléctrico resulta un prototipo experimental, el mismo dispone de especificaciones y configuraciones en su diseño similares a las consideradas en dispositivos para posicionamientos de alta precisión comerciales, lo cual hace que resulte relevante a los propósitos y alcances de esta tesis. Por su parte, el sistema de tornillo y bolas recirculantes accionado por el motor tipo Brushless es una solución relativamente accesible y ampliamente utilizada en sistemas convencionales de posicionamiento. En más detalles, el sistema convencional de posicionamiento considerado resulta oportuno para evaluar desempeños de estrategias de control referidas a sistemas duales de accionamiento debido a que el mismo presupone una limitación en la resolución de su posicionado por cuestiones inherentes a su funcionamiento, derivados principalmente a problemas relacionados a la fricción propia de estos sistemas con piezas móviles y/o deslizantes.

CAPÍTULO 4

Modelo de sistema flexible accionado por piezoeléctrico con amplificación de recorrido mediante brazo palanca

4.1. Introducción

En este Capítulo se describe el modelo del sistema de nanoposicionamiento de estructura flexible, accionado por piezoeléctrico y con amplificación de movimiento mediante un brazo de palanca, considerado en esta tesis. Con el propósito de disponer de un modelo sencillo apto para el diseño de controladores, la descripción dinámica se establece a partir de un modelo con parámetros concentrados, el cual contempla los fenómenos más relevantes de estos sistemas y que pueden degradar significativamente el desempeño del sistema controlado, tales como la histéresis y la dinámica de alta frecuencia asociada con el primer modo de vibración del sistema. Para describir el fenómeno de histéresis, se ha recurrido al modelo Bouc-Wen dispuesto en paralelo dentro de la descripción dinámica del sistema. A lo largo de este Capítulo, se detallará las principales características del modelo considerado, en donde oportunamente se expondrá sus ventajas y limitaciones. Adicionalmente, en este Capítulo se expone el procedimiento de identificación paramétrica adoptado para relevar los parámetros del modelo de sistema, el cual contempla el algoritmo propuesto en [Zhu and Lu, 2011] utilizado para inicializar los valores en el proceso de búsqueda por

iteración descrito en [Xu and Tan, 2016].

El resto de este Capítulo se continúa de la siguiente manera: en la Sección 4.2 se presenta el modelo electromecánico de los sistemas flexibles accionados por piezoeléctricos considerado en esta tesis. Seguidamente, en la Sección 4.3 se expone el modelo dinámico del sistema considerado para el proceso de identificación. Luego, en la Sección 4.4 se presenta la metodología de identificación paramétrica adoptada en esta tesis. Por su parte, la metodología de identificación propuesta para el modelo de histéresis Bouc-Wen se presenta en la Sección 4.4.1. Luego, en la Sección 4.5 se presenta los resultados de identificación de los parámetros del modelo considerado para el sistema experimental descrito en el Capítulo 3. Finalmente, en la Sección 4.6 se exponen las conclusiones de este Capítulo.

4.2. Modelo electromecánico de un grado de libertad con parámetros concentrados

Para el desarrollo del modelo de sistema contemplado en esta tesis, se considera como modelo físico el posicionador de estructura flexible con movimiento unidimensional accionado por piezoeléctrico que se muestra en la Figura 4.1. Cabe señalar que, este tipo de configuración de accionamiento con brazo de palanca y doble viga plegada para el guiado del área objetivo a ser desplazada, resulta ampliamente utilizada en sistemas de nanoposicionamiento, como puede consultarse en [Ru et al., 2016]. Adicionalmente, el sistema físico de accionamiento mostrado en la Figura 4.1 se corresponde con el sistema experimental considerado en esta tesis, detallado en la Sección 3.2.

En el estado del arte de la literatura actual, el modelo electromecánico de este tipo de sistemas con movimiento unidimensional, generalmente se representa a partir de un esquema con parámetros concentrados [Gu et al., 2014], en el cual se contempla tanto la dinámica eléctrica como mecánica de estos dispositivos. En este sentido, para el modelado de los mecanismos accionados por piezoeléctricos con amplificación de recorrido mediante brazo palanca, en esta tesis se considera el modelo esquemático que se muestra en la Figura 4.2. Este modelo, basado en el esquema propuesto en [Gu et al., 2014], contempla las ecuaciones constitutivas (2.1) y (2.2) de los materiales piezoeléctricos como se detalla más adelante en este Capítulo, permitiendo incorporar el fenómeno de la histéresis en el dominio eléctrico relacionando de manera no lineal la carga eléctrica total del sistema con el voltaje aplicado en bornes del piezoeléctrico (ver Sección 2.3.1).

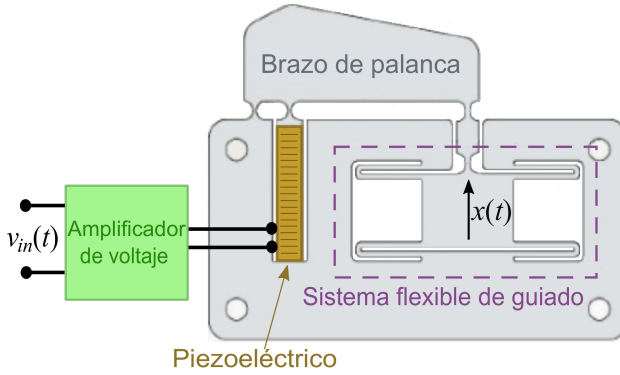


Figura 4.1: Modelo físico de un posicionador nanométrico de estructura flexible accionado por piezoeléctrico con amplificación de recorrido mediante brazo palanca.

En el esquema de la Figura 4.2, la base del actuador piezoeléctrico se considera rígidamente empotrada, simplificando el estudio dinámico a un sistema sencillo de tipo masa resorte. Sobre este modelo simplificado, la variable de interés del sistema se considera como $x(t)$, siendo esta la posición de la masa equivalente a ser desplazada. Se hace saber que el modelo de la Figura 4.2 contempla la descripción dinámica de un mecanismo de accionamiento con amplificación de recorrido mediante brazo palanca, como es el caso del sistema experimental considerado en esta tesis (ver Sección 3.2.1).

4.2.1. Modelado de la parte eléctrica del sistema

En el modelo de sistema considerado, la dinámica eléctrica se contempla a partir del circuito eléctrico equivalente que se exhibe en la Figura 4.2.(a). En el esquema eléctrico presentado, el dispositivo encargado de energizar al piezoeléctrico (amplificador de tensión eléctrica) se contempla a partir de una ganancia $K_{amp} > 0$ con una resistencia equivalente R_0 en su salida. En lo referido al modelo eléctrico del piezoeléctrico, por un lado se considera la capacitancia eléctrica total equivalente del actuador por medio de $C_a = C(1 - \kappa^2)$, siendo C el capacitor equivalente establecido a partir de las n_p placas piezoeléctricas conectadas eléctricamente en paralelo entre ellas, y κ el

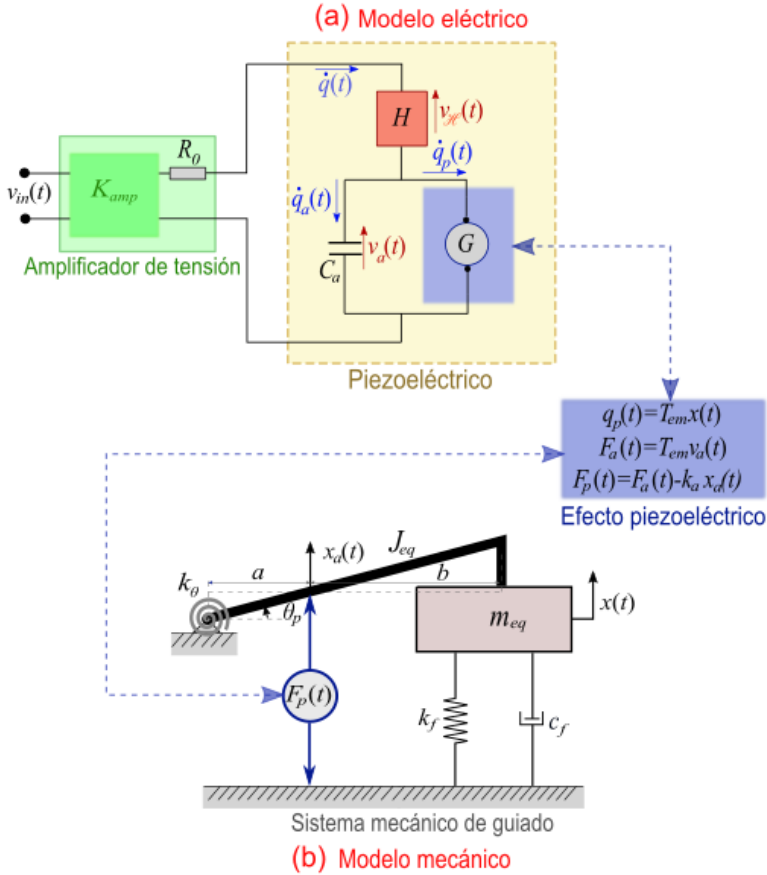


Figura 4.2: Modelo electromecánico de un posicionador nanométrico de estructura flexible accionado por piezoeléctrico, con amplificación de recorrido mediante brazo palanca. (a) Modelo eléctrico del sistema. (b) Modelo mecánico del sistema.

factor de acoplamiento electromecánico del piezoeléctrico, interviniente en la ecuación constitutiva (2.1). Luego, la caída de tensión que se produce en dicho capacitor viene dada por $v_a(t) = C_a q_a(t)$, donde la variable $q_a(t)$ representa la carga eléctrica almacenada en el mismo. El acoplamiento electromecánico asociado con el efecto piezoeléctrico se contempla por medio de la constante de transformación $T_{em} = n_p d_{33} k_a > 0$, la cual produce en el material la carga eléctrica $q_p(t)$ a partir de las deformaciones mecánicas producidas en el piezoeléctrico. Luego, teniendo en cuenta las cantidades eléctricas previamente señaladas, se consigue expresar la carga eléctrica total del sistema como

$$\begin{aligned} q(t) &= q_a(t) + q_p(t) \\ &= C_a v_a(t) + T_{em} x_a(t), \end{aligned} \quad (4.1)$$

donde $x_a(t)$ representa la deformación del actuador piezoeléctrico. Cabe señalar que, con la definición de C_a y T_{em} establecida, resulta $q(t) = C(1 - \kappa^2)v_a(t) + n_p d_{33} k_a x_a(t)$, lo cual se condice con la ecuación constitutiva (2.1) que relaciona la carga eléctrica total con el voltaje aplicado y la deformación mecánica del actuador piezoeléctrico, producida en la dirección de polarización del material.

Por su parte, el bloque H de la Figura 4.2.(a) asociado al fenómeno de histéresis presente en los piezoeléctricos, emula una impedancia tal que modifica el voltaje aplicado en bornes del piezoeléctrico en la cantidad $v_{\mathcal{H}}(t) = \mathcal{H}(q(t))$. Luego, al plantear la sumatoria de caídas de voltajes en el circuito eléctrico equivalente se obtiene

$$R_0 \dot{q}(t) + \mathcal{H}(q(t)) + v_a(t) = K_{amp} v_{in}(t). \quad (4.2)$$

Despejando la variable $v_a(t)$ de la ecuación (4.1) y reemplazándola en la ecuación (4.2), luego de algunas operaciones algebraicas, se consigue expresar la dinámica eléctrica del sistema como

$$R_0 C_a \dot{q}(t) + q(t) - T_{em} x_a(t) = C_a K_{amp} \left[v_{in}(t) - \frac{\mathcal{H}(q(t))}{K_{amp}} \right]. \quad (4.3)$$

4.2.2. Modelado de la parte mecánica del sistema

En lo que respecta al modelo mecánico del sistema exhibido en la Figura 4.2.(b), los parámetros c_f y k_f contemplan el amortiguamiento viscoso y la rigidez equivalente del sistema flexible de guiado, respectivamente, k_θ la rigidez rotacional del brazo palanca en su base y k_a la rigidez del actuador piezoeléctrico

en la dirección que ocurren los desplazamientos. La masa desplazada se ha considerado como m_{eq} , la cual contempla la masa de la plataforma móvil y la correspondiente a una parte de los vínculos flexibles, además de la masa del objeto de interés a ser movilizado. Para el modelo mecánico con amplificación de recorrido mostrado en la Figura 4.2.(b), la relación de amplificación de movimiento resulta $(a + b)/a$, siendo a la distancia entre el punto de apoyo del brazo palanca y el punto de accionamiento del piezoeléctrico y b la distancia entre este último y el punto de interés sobre el sistema. Luego, apelando a la sumatoria de momentos respecto al eje transversal que pasa por el punto de apoyo del brazo palanca se consigue expresar

$$J_{eq}\ddot{\theta}_p(t) = aF_p(t) - (a + b)R_b(t) - M_\theta(t), \quad (4.4)$$

siendo $\theta_p(t)$ y J_{eq} el ángulo de rotación y el momento de inercia equivalente del brazo palanca, respectivamente, $F_p(t)$ la fuerza generada por el actuador piezoeléctrico sobre el brazo palanca, $R_b(t)$ la fuerza establecida en la unión entre la plataforma móvil y el brazo palanca, y $M_\theta(t)$ el momento producido por la rigidez rotacional de la articulación pivote. Por su parte, la rigidez rotacional viene dada por $M_\theta(t) = k_\theta\theta_p(t)$, verificándose para ángulos pequeños la relación $\theta_p(t) \approx x(t)/(a + b)$. Luego, la fuerza aplicada sobre la plataforma móvil puede expresarse como

$$R_b(t) - c_f\dot{x}(t) - k_fx(t) = m_{eq}\ddot{x}(t). \quad (4.5)$$

Combinando las ecuaciones (4.5) y (4.4), luego de algunas operaciones algebraicas se consigue escribir

$$\left(m_{eq} + \frac{J_{eq}}{(a + b)^2}\right)\ddot{x}(t) + c_f\dot{x}(t) + \left(k_f + \frac{k_\theta}{(a + b)^2}\right)x(t) = \left(\frac{a}{a + b}\right)F_p(t). \quad (4.6)$$

Denominando $m = m_{eq} + J_{eq}/(a + b)^2$, $k_{eq} = k_f + \frac{r^2 k_\theta}{a^2}$, con $r = a/(a + b)$, la ecuación (4.6) puede escribirse como

$$m\ddot{x}(t) + c_f\dot{x}(t) + k_{eq}x(t) = rF_p(t). \quad (4.7)$$

4.2.3. Modelo electromecánico del sistema

Teniendo en cuenta que el accionamiento del sistema se produce por la fuerza que ocasiona el actuador piezoeléctrico durante su accionamiento, de la

ecuación constitutiva (2.2) y del principio de acción y reacción se deduce que $F_p(t) = -f_a(t) = F_a(t) - k_a x_a(t)$, siendo $x_a(t) = a/(a+b)x(t) = rx(t)$ la elongación del piezoelectrico y $F_a(t) = (n_p d_{33} k_a) v_a(t)$ la fuerza ocasionada por el energizado del sistema. Luego, denominando como $k_{fs} = k_{eq} + r^2 k_a$ y $T_{em} = n_p d_{33} k_a$ (ver Figura 4.2), la ecuación (4.7) se puede expresar como

$$m\ddot{x}(t) + c_f \dot{x}(t) + k_{fs} x(t) = r T_{em} v_a(t). \quad (4.8)$$

Ahora, de la ecuación (4.1) se tiene que

$$v_a(t) = \frac{1}{C_a} q(t) - \frac{T_{em}}{C_a} x_a(t) = \frac{1}{C_a} q(t) - \frac{r T_{em}}{C_a} x(t), \quad (4.9)$$

donde al combinar la ecuación (4.8) con la ecuación (4.9), se consigue escribir

$$m\ddot{x}(t) + c_f \dot{x}(t) + \left(k_{fs} + \frac{r^2 T_{em}^2}{C_a} \right) x(t) = \frac{r T_{em}}{C_a} q(t). \quad (4.10)$$

Luego, la descripción dinámica de un sistema de nanoposicionamiento de un grado de libertad de tipo flexible accionado por piezoelectrico con amplificación de recorrido mediante brazo palanca, energizado mediante voltaje y bajo el supuesto de que la base de apoyo del piezoelectrico se encuentra rígidamente empotrada, puede expresarse mediante las ecuaciones dinámicas

$$\begin{cases} R_0 C_a \dot{q}(t) + q(t) - r T_{em} x(t) = C_a K_{amp} \left[v_{in}(t) - \frac{\mathcal{H}(q(t))}{K_{amp}} \right] \\ m\ddot{x}(t) + c_f \dot{x}(t) + \left(k_{fs} + \frac{r^2 T_{em}^2}{C_a} \right) x(t) = \frac{r T_{em}}{C_a} q(t). \end{cases} \quad (4.11)$$

Del modelo dinámico del sistema establecido a partir de la ecuación (4.11), se observa que la segunda ecuación relaciona la variable carga eléctrica $q(t)$ con posición $x(t)$ de forma lineal, de manera tal que no interviene el fenómeno de la histéresis $\mathcal{H}(q(t))$, como experimentalmente ocurre en lo que respecta al accionamiento de estos sistemas (ver Sección 2.3.1).

Ahora, al considerar como entrada $v_{in}(t)$ (tensión eléctrica) y variable de salida $x(t)$ (posición), al combinar las ecuaciones (4.11) se consigue describir la dinámica general del sistema mediante la ecuación diferencial de tercer orden dada por

$$\begin{aligned} (m R_0 C_a) \ddot{x}(t) + (c_f R_0 C_a + m) \dot{x}(t) + \left(c_f + (k_{fs} C_a + r^2 T_{em}^2) R_0 \right) x(t) \\ + k_{fs} x(t) = (K_{amp} r T_{em}) v_{in}(t) - r T_{em} \mathcal{H}(q(t)). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Cabe señalar que en muchos trabajos relacionados con el modelado de este tipo de sistemas, se asume $R_0 \approx 0$, tal y como se expresa por ejemplo en [Gu et al., 2014]. Bajo este supuesto, se considera una fuente de voltaje ideal tal que el resistor ubicado a la salida del amplificador de voltaje resulta despreciable. Esta suposición es válida cuando se verifica que la dinámica eléctrica resulta mucho más rápida que la dinámica vibracional correspondiente a la parte mecánica del sistema experimental que se está modelando.

Notar que, la histéresis $\mathcal{H}(q(t))$ representa una dinámica interna del sistema contemplada en el dominio eléctrico según la ecuación (4.2), la cual es función de la carga eléctrica $q(t)$ del piezoeléctrico. De la ecuación (4.1), se deduce que $q(t) = C_a v_a(t) + (T_{emr})x(t)$, donde $v_a(t)$ es función del voltaje de entrada $v_{in}(t)$ por lo expresado en la ecuación (4.2). Luego, resulta evidente que $\mathcal{H}(q(t))$ depende de la posición del sistema $x(t)$ y del voltaje $v_{in}(t)$ aplicado a la entrada del sistema. En la práctica, no se conoce el valor de la carga eléctrica del sistema puesto que se alimenta mediante voltaje y solamente se mide posición. Adicionalmente, en los catálogos de los piezoeléctricos se especifica cierto grado de incertidumbre tanto de la capacitancia como de la constante de acoplamiento electromecánico de estos materiales, lo cual dificulta el cálculo de la carga eléctrica de forma sencilla y confiable a partir de la ecuación (4.2). Por estos motivos, en la literatura existente se adoptan algunas consideraciones a los efectos de contemplar de manera simplificada este fenómeno no medible presente en estos sistemas a partir de alguna de las dos señales físicas medibles que se relacionan con la histéresis, $v_{in}(t)$ ó $x(t)$, respectivamente. En este sentido, para representar la histéresis de estos dispositivos se suele adoptar la simplificación de considerar esta no linealidad bajo el paradigma de modelado en cascada ó en paralelo expresados en la Sección 2.6.1, donde el primer enfoque asume que $\mathcal{H}(q(t)) = f_v(v_{in}(t))$, es decir, $\mathcal{H}$ es función únicamente del voltaje de entrada, mientras que el segundo establece $\mathcal{H}(q(t)) = f_x(x(t))$, es decir, considera que $\mathcal{H}$ es función de la posición del sistema. Sin embargo, cualquiera de estos dos paradigmas de modelado de la histéresis, serie o paralelo, respectivamente, no resultan en una descripción completa del fenómeno no lineal en cuestión, dado que, por lo expuesto anteriormente, la variable $\mathcal{H}$ depende en simultáneo tanto del voltaje de entrada aplicado $v_{in}(t)$ como de la posición $x(t)$ del sistema.

Teniendo en cuenta que, el modelo de histéresis Bouc-Wen contemplado en esta tesis y detallado en la Sección siguiente, requiere que la señal excitadora de dicho modelo sea con primera derivada continua en el tiempo, en esta tesis se contempla el modelo en paralelo de este fenómeno, donde la propia dinámica del

sistema garantiza esta condición en la variable posición. Teniendo en cuenta esta consideración, en lo que sigue se considerará $\mathcal{H}(q(t)) = h(x(t)) + \vartheta_H(t)$, es decir, se contempla a la histéresis como la suma de dos términos: $h(x(t)) = f_x(x(t))$ asociado con la representación de este fenómeno bajo el paradigma de modelado en paralelo; y $\vartheta_H(t)$ una función desconocida que modifica $h(t)$ de manera tal de que resulta la variable $\mathcal{H}(q(t))$ contemplada en el modelo de sistema. En otras palabras, se considera el modelo de histéresis mediante la suma de un modelo simplificado, expresado bajo una estructura algorítmica en la práctica realizable, más un término $\vartheta_H(t)$ que contempla las discrepancias del modelo considerado para representar a este fenómeno no lineal en cuestión.

Bajo la consideración establecida previamente en esta Sección respecto al modelado de la histéresis y al valor de la resistencia de salida de la fuente de voltaje, la descripción dinámica de los sistemas tratados en esta tesis, accionados mediante tensión eléctrica, puede expresarse de manera simplificada como

$$m\ddot{x}(t) + c_f\dot{x}(t) + k_{fs}x(t) = (K_{amp}rT_{em})v_{in}(t) - rT_{em}h(x(t)) + p(t), \quad (4.13)$$

donde $p(t)$ es un término que contempla dinámicas no modeladas, tales como aquellas de mayor orden (modos de vibración de mayor frecuencia y dinámica eléctrica); el efecto *creep* (ver Sección 2.3.2), errores de modelado ocasionados por simplificaciones consideradas; dinámicas mal contempladas derivadas de eventuales incertidumbres en los parámetros del modelo o de simplificaciones establecidas; como así también la presencia de eventuales perturbaciones externas que puedan incidir sobre el sistema.

4.2.4. Modelo Bouc-Wen para describir la histéresis

Para describir los ciclos de histéresis de los sistemas accionados por piezoeléctricos, en el marco de esta tesis se optó por utilizar el modelo Bouc-Wen descrito en el Apéndice B. La elección de este modelo se basa en lo expuesto en la Sección 2.6.1, donde se señala como principal ventaja su estructura matemática compacta y fácilmente manipulable, constituida de unos pocos parámetros a ser identificados. La estabilidad del modelo Bouc-Wen bajo el paradigma de incidencia en paralelo en la descripción dinámica del sistema expresada en la ecuación (4.13), se detalla en la Sección B.5 del Apéndice B.

La ecuación (B.2) del Apéndice B se refiere a la variable de histéresis de este modelo. Luego, para representar la histéresis de los piezoeléctricos, en la literatura existente [Rakotondrabe, 2010] comúnmente se establece el valor

$n = 1$ para el parámetro dado como potencia en la ecuación (B.2), relacionado con la suavidad de las transiciones entre el comportamiento elástico y plástico de este modelo. Atendiendo a este valor para la potencia n de la ecuación diferencial del modelo Bouc-Wen señalada en la ecuación (B.2) y teniendo en cuenta la descripción bajo el paradigma en paralelo, el fenómeno de histéresis se contempla en esta tesis como

$$\dot{h}_{n=1}(t) = D^{-1} (A\dot{x}(t) - \beta' |\dot{x}(t)| h_{n=1}(t) - \gamma' \dot{x}(t) |h_{n=1}(t)|), \quad (4.14)$$

siendo $D^{-1} > 0$, $A > 0$, $\beta' > 0$ y $|\gamma'| < \beta'$ parámetros a ser identificados, donde A interviene principalmente en el ancho y orientación de los ciclos de histéresis, mientras que β' y γ' gobiernan la morfología de las ramas de los mismos (ver Sección B.3 del Apéndice B). Luego, por el Teorema B.1 del Apéndice B, los parámetros restringidos a los valores señalados hacen que el modelo Bouc-Wen pertenezca a la Clase I de la Tabla B.1 indicada en el Apéndice B, la cual garantiza que la variable $h_{n=1}(t)$ cumple con la condición de BIBO estabilidad para cualquier $h_{n=1}(0) \in \mathbb{R}$ y para toda señal $x(t) \in C^1$, verificándose que $|h_{n=1}(t)| \leq \max\{|h_{n=1}(0)|, h_*\}$ para todo $t \in [0, \infty)$, siendo $h_* = A/(\beta' + \gamma')$. Además, con los parámetros restringidos a los valores señalados, por el Teorema B.3 del Apéndice B se tiene que el modelo Bouc-Wen de la ecuación (4.16) es pasivo. Asimismo, es relevante destacar que según [Ikhouane et al., 2007; Ismail et al., 2009], la Clase I, entre todas las clases enumeradas en la Tabla B.1 del Apéndice B, se distingue por ser la única que, además de exhibir estabilidad BIBO y ser pasiva, se ajusta a los principios de las leyes termodinámicas.

4.3. Modelo dinámico para identificación

Para lo que sigue, se define como $\zeta = c_f / (2\sqrt{mk_{fs}})$ y $\omega_n = \sqrt{k_{fs}/m}$, donde c_f es el coeficiente de fricción viscosa del sistema de guiado, k_{fs} la rigidez equivalente del posicionador en la dirección de movimiento y m la masa total a ser desplazada (ver Sección 4.2.2 y Sección 4.2.3). Luego, teniendo en cuenta la ecuación dinámica de segundo orden (4.13) y la descripción del fenómeno de histéresis a través del modelo Bouc-Wen dado por la ecuación (4.14), la dinámica general de los sistemas de nanoposicionamiento de estructura flexible accionados mediante piezoeléctricos, en el contexto de esta tesis se expresa como

$$\ddot{x}(t) + 2\zeta\omega_n\dot{x}(t) + \omega_n^2x(t) = \omega_n^2K_uu(t) - \omega_n^2h(t) + d(t) \quad (4.15)$$

$$\dot{h}(t) = \alpha \dot{x}(t) - \beta |\dot{x}(t)| h(t) - \gamma \dot{x}(t) |h(t)|, \quad (4.16)$$

donde la variable $x(t)$ representa la posición, $u(t) = v_{in}(t)$ el voltaje de entrada, $d(t) = \omega_n^2 p(t)/k_{fs}$ las perturbaciones y $h(t) = rT_{em}h_{n=1}(t)/k_{fs}$ la histéresis, siendo $K_u = K_{amp}rT_{em}/k_{fs}$. Por su parte, teniendo en cuenta el Lema B.1 del Apéndice B, se deduce que $\alpha = rT_{em}D^{-1}A/k$, $\beta = D^{-1}\beta'$ y $\gamma = D^{-1}\gamma'$. Luego, con la descripción del fenómeno de histéresis expresado a partir del modelo Bouc-Wen de la ecuación (4.16), y con los valores permitidos para los parámetros D^{-1} , A , β' y γ' según lo expuesto en la Sección 4.2.4, resulta que $\alpha > 0$, $|\gamma| < \beta$, siendo $\beta > 0$, verificándose de esta manera que la variable $h(t)$ cumpla con la condición de ser BIBO estable para cualquier condición inicial $h(0) \in \mathbb{R}$ y para cualquier señal $x(t) \in C^1$, tal que $|h(t)| \leq \max\{h(0), h_0\}$ para todo $t \in [0, \infty)$, siendo $h_0 = \alpha/(\beta + \gamma)$.

En la Figura 4.3 se exhibe un diagrama en bloques del modelo de sistema establecido a partir de las ecuaciones dinámicas (4.15) y (4.16), el cual puede interpretarse como un sistema mecánico con histéresis en la fuerza restauradora (ver Sección B.5 del Apéndice B). Es importante destacar que, en ausencia de excitaciones externas, la estructura mecánica de los sistemas dinámicos considerados en esta tesis se encuentra en movimiento libre. Cuando las condiciones iniciales del sistema son no nulas (es decir, tiene un estado inicial distinto de cero), el sistema físico disipa energía y tiende asintóticamente hacia un estado de reposo. Luego, esta condición de convergencia asintótica a un estado de equilibrio en ausencia de excitaciones externas (es decir, $u(t) = d(t) = 0$ para todo $t \geq 0$ en el esquema de la Figura 4.3), queda garantizada por medio del Teorema B.2 expuesto en el Apéndice B.

4.4. Metodología de identificación de los parámetros del modelo

Una metodología comúnmente adoptada para hallar los parámetros del modelo dinámico de estos sistemas, consiste en identificar por separado la parte lineal y no lineal del modelo, a través de distintos ensayos [Gu et al., 2015; Jian et al., 2018]. Según esta metodología, por un lado se realiza la estimación de los parámetros del modelo de histéresis mediante pruebas a baja frecuencia, donde la influencia de la dinámica de alta frecuencia resulta despreciable. Por otro lado, se identifica la dinámica vibracional a partir de ensayos que involucren señales de excitación con contenido frecuencial acorde a las dinámicas de

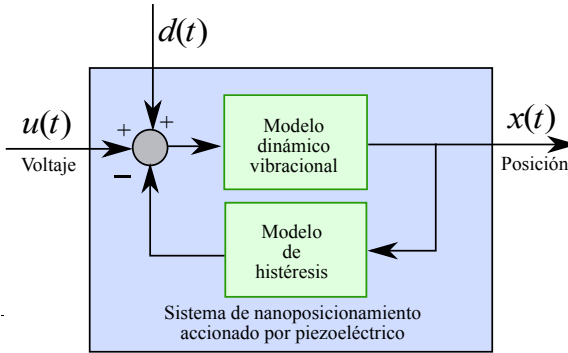


Figura 4.3: Modelo de sistema en diagrama de bloques correspondiente a las ecuaciones (4.15) y (4.16).

alta frecuencia que se está contemplando, con amplitudes pequeñas para poder despreciar el efecto de la histéresis en las mediciones. Cabe señalar que, ambos ensayos de identificación deben realizarse en un lapso de tiempo reducido para que resulte despreciable el efecto del *creep* en las mediciones.

Dadas las características no lineales del modelo de histéresis considerado en esta tesis, resulta indispensable disponer de una estrategia apropiada que permita identificar los parámetros del mismo. Generalmente, suelen utilizarse algoritmos basados en métodos iterativos asociado a una regla de ajuste de los parámetros que mejor ajustan en el sentido de alguna métrica o índice de desempeño para la señal error de posición. En general, estos métodos resultan sensibles a los valores iniciales considerados en el proceso de búsqueda de los parámetros, pudiendo demandar un excesivo tiempo de cómputo. Atendiendo a esto, en la Sección 4.4.1 se detalla la metodología de identificación propuesta en esta tesis para la obtención de los parámetros del modelo Bouc-Wen expresado en la ecuación (4.16).

4.4.1. Metodología de identificación del modelo Bouc-Wen

Dado que el modelo Bouc-Wen en su versión estándar presenta una redundancia funcional en sus parámetros (ver Sección B.9 del Apéndice B), resulta conveniente su versión normalizada para propósitos de identificación. Luego, para una señal de voltaje de baja frecuencia y asumiendo que no existen

perturbaciones incidentes sobre el sistema, de la ecuación (4.15) se consigue expresar

$$x(t) \approx K_u u(t) - h_0 \left(\frac{h(t)}{h_0} \right) = K_u u(t) - h_0 h_N(t), \quad (4.17)$$

donde $h_N(t)$ es la variable del modelo Bouc-Wen normalizado (ver definición en la Sección B.9 del Apéndice B) y h_0 la constante que interviene en la modulación de los ciclos de histéresis en la versión normalizada, definida en la Sección 4.3. A partir de la descripción normalizada del modelo Bouc-Wen, las ecuaciones que gobiernan la dinámica del sistema, bajo el supuesto de que se establecen velocidades de accionamiento moderadas (movimientos con ciclos de operación entre 0,1 % y 1 % de la frecuencia de resonancia del sistema), resultan

$$\begin{cases} x(t) = K_u u(t) - h_0 h_N(t) \\ \dot{h}_N(t) = \rho \dot{x}(t) - \rho \sigma_N |\dot{x}(t)| h_N(t) + \rho (\sigma_N - 1) \dot{x}(t) |h_N(t)|, \end{cases} \quad (4.18)$$

siendo $\rho = \alpha/h_0 = \beta + \gamma > 0$ y $\sigma_N = \beta/(\beta + \gamma) \geq 1/2$. Los intervalos señalados para los parámetros del modelo Bouc-Wen normalizado son tales que aseguran que el modelo pertenezca a la Clase I (ver Tabla B.2 del Apéndice B). Con lo cual, a partir de una señal de entrada $u(t)$ de baja frecuencia, se pretende identificar los parámetros de la ecuación (4.18) con los datos experimentales correspondientes al vector $(u(t), x(t))$.

La metodología de identificación propuesta en esta tesis consta de dos pasos: el primero (**Paso I**) referido a la elección de los valores iniciales de búsqueda para el algoritmo iterativo; y el segundo (**Paso II**) considerando algún método iterativo para el ajuste final de los parámetros del modelo.

- **Paso I:** Para la elección de los valores iniciales de búsqueda de los parámetros del modelo Bouc-Wen, se ha contemplado la metodología de identificación propuesta en [Zhu and Lu, 2011]. Siguiendo dicha metodología algorítmica, la primer ecuación de (4.18) debe expresar como

$$u(t) = \frac{1}{K_u} x(t) + \frac{h_0}{K_u} h_N(t) = k_x x(t) + k_N h_N(t), \quad (4.19)$$

donde el parámetro k_x es el primero a ser identificado. Una manera de hallar k_x se consigue especificando dos señales de entrada oscilatorias con la misma frecuencia, $u_1(i)$ y $u_2(i)$, de manera tal de que produzcan los desplazamientos $x_1(i)$ y $x_2(i)$, respectivamente, tales que $x_2(i) \neq x_1(i)$ para todo i , siendo i el índice de la muestra de los datos registrados en

el instante de tiempo $t_0 + i\Delta t$, con t_0 el instante inicial de tiempo y Δt el periodo de muestreo. Bajo estas condiciones, como u_1 y u_2 tienen la misma frecuencia, se asume que $\dot{x}_1 = \dot{x}_2$. Luego, considerando que $h_N(0) = 0$, resulta $h_{N_1}(i) = h_{N_2}(i)$ para $1 \leq i \leq M$, siendo M el número total de muestras recolectadas. Luego, teniendo en cuenta que se dispondrá de un conjunto de muestras $(u_2 - u_1, x_2 - x_1)_i$ tal que, por la ecuación (4.19), deberán cumplir con la condición

$$\begin{aligned} u_2(i) - u_1(i) &= [k_x x_2(i) + k_N h_{N_2}(i)] - [k_x x_1(i) + k_N h_{N_1}(i)] \\ &= k_x [x_2(i) - x_1(i)], \end{aligned} \quad (4.20)$$

es posible expresar el siguiente conjunto de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} x_2(1) - x_1(1) \\ x_2(2) - x_1(2) \\ \vdots \\ x_2(M) - x_1(M) \end{bmatrix} [k_x] = \begin{bmatrix} u_1(1) - u_1(1) \\ u_2(2) - u_1(2) \\ \vdots \\ u_2(M) - u_1(M) \end{bmatrix}. \quad (4.21)$$

Notar que, las igualdades expresadas en la ecuación (4.21) pueden expresarse de manera compacta como $\mathbf{X} \cdot [k_x] = \mathbf{U}$. Luego, puede hallarse el parámetro k_x que mejor ajusta en el sentido de mínimos cuadrados mediante la expresión $k_x = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{U}$.

Otra manera de hallar el parámetro k_x resulta considerando el desplazamiento máximo del sistema y el valor de voltaje aplicado para dicha condición límite de funcionamiento, estableciendo que $k_x = \frac{u_{\max}}{x_{\max}} + |\Delta k_x|$, siendo $|\Delta k_x|$ un valor pequeño arbitrario, el cual contempla la incidencia del efecto de la histéresis para dicha posición extrema del sistema.

Establecido el parámetro k_x , se procede a relevar los parámetros restantes del modelo de la ecuación (4.18) utilizando una señal de excitación tal que permita efectuar grandes exploraciones en el sistema, garantizando completar un ciclo completo de histéresis para disponer de información tanto de la rama ascendente como descendente. Teniendo en cuenta que las derivadas temporales involucradas en la segunda ecuación de (4.18) pueden aproximarse mediante diferencias finitas mediante

$$\dot{h}_N(i) = \frac{h_N(i) - h_N(i-1)}{\Delta t} \quad \text{y} \quad \dot{x}(i) = \frac{x(i) - x(i-1)}{\Delta t}, \quad (4.22)$$

definiendo la cantidad

$$\begin{aligned} r(i) &= k_N (h_N(i) - h_N(i-1)) \quad (\text{ver Ec. (4.19)}) \\ &= u(i) - u(i-1) - k_x (x(i) - x(i-1)) \end{aligned} \quad (4.23)$$

y considerando las matrices

$$\mathbf{r}_{\text{BW}} = \begin{bmatrix} r(1) \\ r(2) \\ \vdots \\ r(M) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varphi}_{\text{BW}} = \begin{bmatrix} \rho k_N \\ -\rho \sigma_N \\ \rho (\sigma_N - 1) \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{\Theta}_{\text{BW}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta}(1) \\ \boldsymbol{\theta}(2) \\ \vdots \\ \boldsymbol{\theta}(M) \end{bmatrix}, \quad (4.24)$$

con

$$\boldsymbol{\theta}_{\text{BW}}(i) = \begin{bmatrix} x(i) - x(i-1) \\ |x(i) - x(i-1)| (u(i) - k_x x(i)) \\ (x(i) - x(i-1)) |u(i) - k_x x(i)| \end{bmatrix}^T, \quad (4.25)$$

se consigue escribir

$$\boldsymbol{\Theta}_{\text{BW}} \boldsymbol{\varphi}_{\text{BW}} = \mathbf{r}_{\text{BW}}. \quad (4.26)$$

Notar que, el parámetros k_x que interviene en la matriz $\boldsymbol{\Theta}_{\text{BW}}$ ha sido previamente ajustado. Luego, la matriz $\boldsymbol{\Theta}_{\text{BW}}$ y el vector $\mathbf{r}_{\text{BW}}$ son estructuras matriciales con valores numéricos obtenidos mediante operaciones algebraicas con datos experimentales, tanto de posición como de voltaje aplicado. Seguidamente, para hallar el vector de parámetros $\boldsymbol{\varphi}_{\text{BW}}$ se recurre al uso de la Pseudoinversa de Moore-Penrose con factor de ponderación unitaria para todas las incógnitas involucradas, consiguiéndose la solución que mejor ajusta en el sentido de mínimos cuadrados dada por

$$\boldsymbol{\varphi}_{\text{BW}} = \left(\boldsymbol{\Theta}_{\text{BW}}^T \boldsymbol{\Theta}_{\text{BW}} \right)^{-1} \boldsymbol{\Theta}_{\text{BW}}^T \mathbf{r}_{\text{BW}}. \quad (4.27)$$

Finalmente, los parámetros de la ecuación (4.18) pueden obtenerse a partir del vector $\boldsymbol{\varphi}_{\text{BW}} = [\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3]^T$ mediante las expresiones

$$K_u = \frac{1}{k_x}, \quad \rho = -(\varphi_2 + \varphi_3), \quad \sigma_N = \frac{\varphi_2}{\varphi_2 + \varphi_3} \quad \text{y} \quad h_0 = \frac{-\varphi_1}{k_x (\varphi_2 + \varphi_3)}. \quad (4.28)$$

- **Paso II:** En este paso, se define el funcional de costo $J(K_u, h_0, \sigma, \rho) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^M (x_{\text{med}}(i) - x_{\text{sim}}(i))^2$, donde $x_{\text{med}}(i)$ y $x_{\text{sim}}(i)$ representan la señal de posición medida y simulada a partir de la ecuación (4.18), respectivamente. Para generar la señal proveniente del modelo, se adopta la estrategia algorítmica propuesta en [Xu and Tan, 2016], la cual sugiere el diseño de la estructura algorítmica de la ecuación (4.18) como diagrama en bloques dentro de un entorno de simulación. Luego, se selecciona un método de búsqueda por iteración y se procede a efectuar el ajuste del modelo. En este sentido, según la metodología de identificación propuesta en esta tesis, el proceso de búsqueda se inicializa con los valores obtenidos en el **Paso I**. Luego, teniendo en cuenta las relaciones establecidas entre los parámetros del modelo Bouc-Wen estándar y normalizado, los parámetros del modelo estándar se pueden hallar a partir de las igualdades $\beta = \rho\sigma_N$, $\gamma = -\rho(\sigma_N - 1)$ y $\alpha = \rho h_0$.

4.4.2. Metodología de identificación de la dinámica lineal del modelo

Para la identificación de la dinámica vibracional del sistema, asumida como lineal, usualmente se recurre a la utilización de una señal tipo sinusoidal con frecuencia variante en el tiempo, denominada comúnmente como de tipo Chirp [Jian et al., 2018]. Como se ha señalado previamente, esta señal se establece con una amplitud pico a pico lo más pequeña posible para poder desprestigiar el efecto de la histéresis. Generalmente se establece un crecimiento lineal respecto al tiempo en la frecuencia entre los valores $f_0 = 0$ Hz y $f_1 > f_M$, siendo f_M la frecuencia correspondiente al modo de vibración más alto que se desea identificar. Como se expresa en [Jian et al., 2018], la identificación se realiza en el dominio discreto y luego, mediante alguna de las transformaciones comúnmente aplicadas para relacionar las regiones entre el plano continuo y discreto con el valor de frecuencia de muestreo utilizada, se procede a computar y evaluar los parámetros del modelo lineal continuo hallados para la representación del modelo dinámico del sistema.

4.5. Identificación del modelo dinámico del sistema experimental

A continuación, se muestran los resultados de identificación de los parámetros del modelo dinámico indicado en este Capítulo a partir de las ecuaciones (4.15) y (4.16), teniendo en cuenta el sistema experimental accionado por piezoeléctrico descrito en la Sección 3.2, en donde se ha utilizado la metodología de identificación señalada en la Sección 4.4 y Sección 4.4.1.

4.5.1. Identificación del modelo de histéresis Bouc-Wen

Teniendo en cuenta la metodología de identificación previamente señalada en la Sección 4.4.1, el ajuste de los parámetros del modelo de histéresis Bouc-Wen normalizado se efectuó a partir de una señal de voltaje oscilatoria con frecuencia de 1 Hz y amplitud decreciente en el tiempo a partir del segundo ciclo de excitación, garantizando de esta manera efectuar exploraciones en todo el rango de actuación del sistema en ambas direcciones de movimiento. Para el registro de los datos se estableció una frecuencia de muestreo de 1 kHz.

Teniendo en cuenta el desplazamiento máximo del sistema al aplicar un voltaje máximo de 10 V en bornes del piezoeléctrico, se ha establecido $K_u = 4,9 \mu\text{m/V}$, es decir, $k_x = 1,002 \text{ V}/\mu\text{m}$. Luego, del proceso de identificación señalado en el **Paso I** se obtuvo $\rho = 0,097$, $\sigma_N = 2,235$ y $h_0 = 2,67$. En la Figura 4.4 se exhibe el ajuste inicial logrado con estos valores en los parámetros del modelo dado por la ecuación (4.18).

Atendiendo al **Paso II** de la metodología de identificación propuesta, en Matlab-Simulink se construyó el diagrama en bloques del modelo Bouc-Wen normalizado dado por las ecuaciones (4.18). Para esta segunda etapa de ajuste de los parámetros del modelo, se utilizó la herramienta de optimización dispuesta en Simulink, en donde se especificó como objetivo la minimización del funcional $J(K_u, h_0, \sigma_N, \rho)$ definido como la suma de los errores cuadráticos calculados como la diferencia entre la salida del sistema experimental y del modelo, empleando para la búsqueda el algoritmo *Trust Region Reflective* [Mat, 2011] ofrecido en el mismo entorno de simulación. Para el proceso de ajuste, se restringió la búsqueda de los parámetros a los intervalos $h_0 > 0$, $K_u > 0$, $\rho > 0$ y $\sigma_N \geq 1/2$ a los efectos de garantizar que el modelo de histéresis pertenezca a la Clase I. Para garantizar el fin del proceso de búsqueda, se estableció un umbral mínimo de variación en los valores de los parámetros entre dos iteraciones

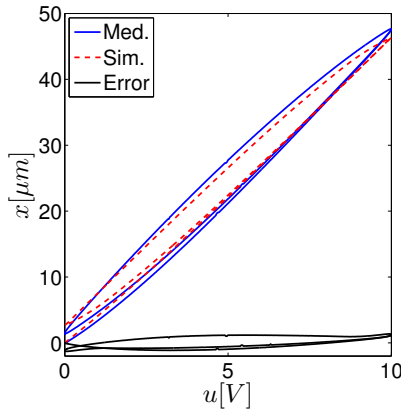


Figura 4.4: Identificación preliminar de los parámetros del modelo Bouc-Wen normalizado por medio de la metodología del **Paso I**.

consecutivas y se especificó un valor máximo de 100 iteraciones. Del proceso de identificación se obtuvo $\rho = 0,1739$, $\sigma_N = 2,616$, $h_0 = 2,162$ y $K_u = 4,908 \mu\text{m}/\text{V}$. Luego, atendiendo a las relaciones establecidas entre los parámetros del modelo Bouc-Wen convencional y normalizado expresado en la Sección 4.4.1, se obtuvo $\alpha = 0,376$, $\beta = 0,454$ y $\gamma = -0,281$. En la Figura 4.5 se muestra el ajuste logrado con los parámetros hallados para el modelo Bouc-Wen en su versión estándar, en donde el error resultó de $0,51 \mu\text{m}$ (rms) con valor máximo absoluto de $1,24 \mu\text{m}$.

En la Figura 4.6 se exhibe la relación obtenida entre la variable de histéresis y la posición del sistema, medida y simulada, respectivamente, al considerar una entrada de tipo sinusoidal de baja frecuencia. En la la Sección B.3 del Apéndice B se muestra la morfología esperada en la relación entre ambas variables al considerar el modelo Bouc-Wen para representar la histéresis en un sistema mecánico. Al comparar la Figura 4.6 con las gráficas exhibidas en la Sección B.3, se observa que la relación obtenida entre ambas variables es acorde a lo esperado.

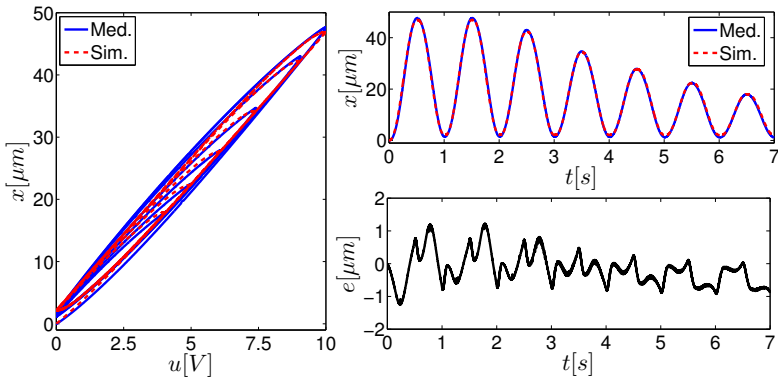


Figura 4.5: Ajuste con el modelo de histéresis Bouc-Wen estándar identificado.

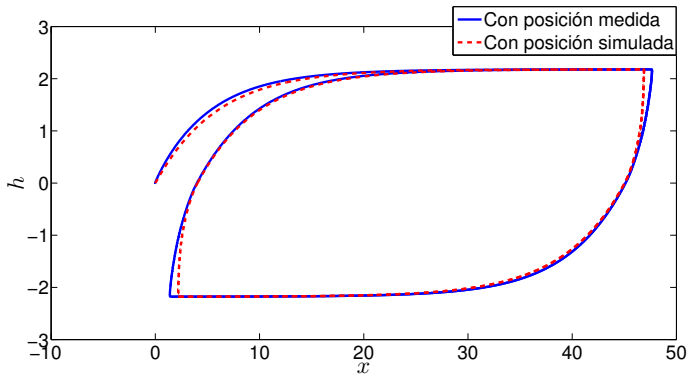


Figura 4.6: Relación entre variable de histéresis y posición al considerar una entrada de tipo sinusoidal.

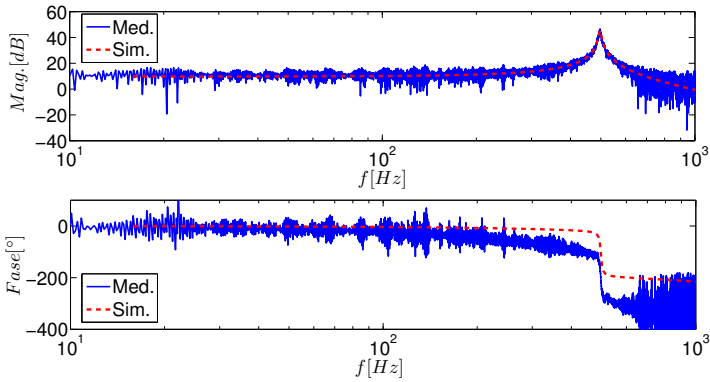


Figura 4.7: Comparación entre la respuesta en frecuencial del modelo lineal de segundo orden y la estimada a partir del análisis espectral de la señal obtenida.

4.5.2. Identificación de la dinámica vibracional

Por lo expuesto en la Sección 4.4, la señal excitadora utilizada para identificar la parte lineal del sistema, se ha contemplado de muy baja amplitud y de corta duración a los efectos de poder despreciar el efecto de la histéresis y el *creep* en la señal de posición registrada. Por su parte, la misma se ha diseñado de manera tal de que permita discernir la señal referida a posición del ruido de medición en el espectro de frecuencias que se han considerado. Teniendo en cuenta esto, para el sistema experimental contemplado, la señal excitadora se estableció de tipo Chirp con amplitud de $0,2 \text{ V}_{pp}$ y valor medio de 2 V , estableciendo un incremento lineal en la frecuencia desde 1 Hz hasta 1000 Hz , especificando una frecuencia de muestreo de 5 kHz . Las señales obtenidas, tanto de entrada (voltaje) como de salida (posición), fueron ingresadas como datos dentro del Toolbox de identificación de sistemas ofrecido en Matlab, realizando el ajuste teniendo en cuenta la respuesta en frecuencia de un modelo lineal de segundo orden, obteniéndose los parámetros $\zeta = 0,0082$ y $\omega_n = 2\pi f_n$, con $f_n = 497 \text{ Hz}$. En la Figura 4.7 se compara la respuesta en frecuencia estimada del sistema y la del modelo lineal hallado, en donde se observa que la descripción dinámica a partir de un modelo de segundo orden logra capturar satisfactoriamente el comportamiento de alta frecuencia del sistema hasta su primer modo de vibración.

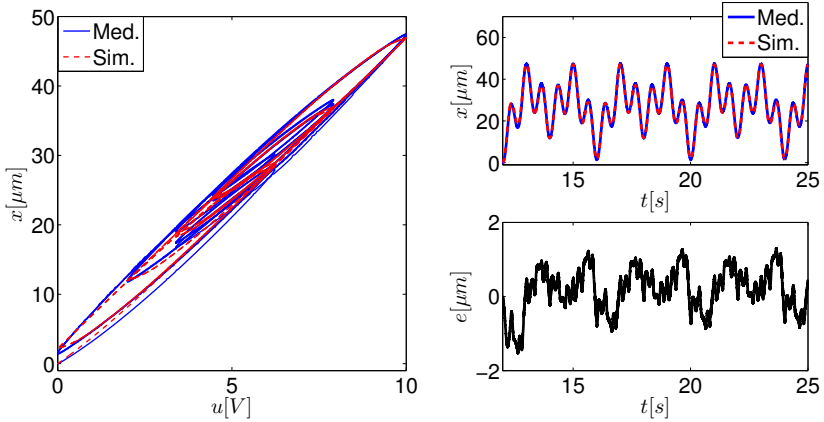


Figura 4.8: Validación del modelo de sistema.

4.5.3. Validación del modelo

Notar que la identificación del modelo de sistema descrito a partir de las ecuaciones (4.15) y (4.16) se ha efectuado por partes mediante diferentes ensayos. Para verificar la capacidad del modelo completo de sistema considerado en predecir la salida del sistema, se evaluó la respuesta del modelo al considerar una señal de entrada $u(t)$ distinta a las utilizadas en el proceso de identificación. En la Figura 4.8 se muestra el ajuste logrado para la señal de excitación $u(t) = 2 \sin(2\pi 0,5t - \frac{\pi}{2}) + 2,5 \sin(2\pi 1,5t - \frac{\pi}{2}) + \sin(2\pi 0,25t - \frac{\pi}{2}) + 5,5 \text{ V}$, obteniéndose para esta entrada un error de ajuste referido a la posición de $e_{\text{rms}} = 0,61 \mu\text{m}$ y un error máximo absoluto de $e_{\text{max}} = 1,53 \mu\text{m}$.

4.6. Conclusiones

En este Capítulo, se ha presentado un modelo dinámico de los sistemas de nanoposicionamiento de estructura flexible accionado por piezoeléctrico, contemplando el caso de un sistema con amplificación de recorrido mediante sistema de brazo palanca. Este modelo ha sido concebido a partir de una estructura matemática con parámetros concentrados, empleando el modelo Bouc-Wen en paralelo para la descripción del fenómeno de la histéresis. En cuanto

a la estructura algorítmica del modelo considerado, se concluye que el mismo requiere la identificación de unos pocos parámetros, facilitando de esta manera su identificación. Por su parte, esta simplicidad en el modelo de sistema resulta conveniente para su utilización en el diseño de algoritmos de control basados en modelo.

Para la identificación del modelo Bouc-Wen, se ha propuesto una metodología secuencial de ajuste de los parámetros a partir de la combinación de dos estrategias de identificación señaladas en la literatura, permitiendo de esta manera facilitar el proceso de búsqueda por métodos de iteración. De los resultados obtenidos, se observa que el modelo dinámico de sistema contemplado y la metodología de identificación propuesta permite representar la dinámica del sistema con un error de posición porcentual menor al 4 % al considerar el recorrido máximo del sistema experimental descrito en el Capítulo 3. Por su parte, se concluye que el modelo lineal de segundo orden, concebido a partir de una serie de consideraciones respecto a simplificaciones en el modelo electromecánico desarrollado, consigue representar satisfactoriamente la dinámica vibracional del sistema hasta su primer modo de vibración, tanto en lo que respecta a magnitud como a fase en el dominio frecuencial.

Estrategia SMC con estimación de la histéresis

5.1. Introducción

Como se ha expuesto previamente en esta tesis, una manera efectiva de desarrollar desplazamientos con elevada resolución de posicionado se consigue a partir de la deformación elástica de un mecanismo flexible, accionado por piezoeléctricos. Sin embargo, estos sistemas presentan no linealidades que degradan su desempeño, como la histéresis (ver Sección 2.3.1) y el *creep* (ver Sección 2.3.2). Además, el fenómeno de resonancia de estos sistemas ocasiona una dinámica de alta frecuencia que puede degradar significativamente la precisión del posicionado en aplicaciones que involucran elevadas velocidades de accionamiento. Todos estos fenómenos y la presencia de eventuales perturbaciones que puedan incidir sobre el sistema, conducen a la necesidad de recurrir al diseño de una etapa de control adecuada para comandar a estos sistemas.

En el presente Capítulo, se expone el algoritmo de control propuesto en esta tesis para comandar a los sistemas de nanoposicionamiento de estructura flexibles accionados por piezoeléctricos. Para el diseño de este controlador se ha recurrido a una estrategia de control por modos deslizantes, extraída de la teoría de control robusto, en donde el algoritmo de control se ha diseñado a partir del modelo de sistema presentado en el Capítulo 4. En el modelo desarrollado en el Capítulo 4, se ha considerado el modelo Bouc-Wen para representar la dinámica no medible

de la histéresis del sistema, en donde se han contemplado algunas suposiciones para la confección de este modelo, detalladas en la Sección 4.2.3 y Sección 4.2.4. Por su parte, teniendo en cuenta lo expuesto en la Sección 2.6.1, el modelo de histéresis Bouc-Wen presenta discrepancias, consideradas de bajo orden, para representar este fenómeno no lineal inherente de los sistemas accionados por piezoeléctricos cuando son comandados mediante voltaje. Por estos motivos, en el diseño del controlador basado en el modelo de sistema, se ha considerado un compensador de la histéresis a través del diseño de un observador de este fenómeno, formulado a partir de una regla de estimación en el modelo Bouc-Wen utilizado para modelar esta dinámica interna (en la práctica, no accesible) del sistema. Por medio de la teoría de Lyapunov se ha probado la estabilidad global del sistema controlado, garantizando un correcto desempeño en aplicaciones prácticas de tiempo real sin requerir del conocimiento de una cota superior de las variables que están siendo estimadas.

Este Capítulo se ha estructurado de la siguiente manera: en la Sección 5.2 se expone el aporte que se realiza a partir de la ley de control propuesta, en donde se exponen los trabajos de la literatura actual tomados como referencia y las modificaciones que se contemplan en esta tesis sobre los algoritmos allí propuestos. En la Sección 5.3 se detalla el modelo de sistema y las consideraciones respecto al mismo para el diseño del controlador. En la Sección 5.4 se presenta el algoritmo de control propuesto y en la Sección 5.5 se expone el análisis de estabilidad del sistema a lazo cerrado. En la Sección 5.6 se detallan las consideraciones respecto a la sintonización de los parámetros del controlador propuesto. En la Sección 5.7 se presentan tanto los resultados de simulación como de pruebas experimentales llevadas a cabo sobre el sistema de nanoposicionamiento descrito en el Capítulo 3, estableciendo comparaciones de desempeño con otros algoritmos de control con características similares. Finalmente, se concluye presentando las conclusiones de este Capítulo en la Sección 5.8.

5.2. Controlador SMC adaptativo con estimación de la histéresis

Como se mencionó en la Sección 2.9, una estrategia de control que ha generado interés entre los investigadores en los últimos años es el Control por Modos Deslizantes (SMC). Debido a la utilización de una función discontinua de conmutación presente el término robusto del SMC, el desempeño del sistema

controlado a partir de estos algoritmos puede degradarse significativamente dado que induce en la señal de control un efecto vibratorio de alta frecuencia, denominado *chattering*. En particular, el *chattering* resulta fuertemente notorio para valores muy grandes en la ganancia del término robusto del algoritmo SMC, puesto que esta vuelve mucho más agresivo al controlador.

En términos generales, un modelo detallado de sistema permite disminuir incertidumbres tanto estructurales como paramétricas, las cuales de otra manera pasan a formar parte de lo que se considera el término de perturbaciones incidente sobre el modelo de sistema. Con el objetivo de reducir las perturbaciones (y por consiguiente, disminuir el *chattering*), en la literatura pueden hallarse trabajos que se centran en el diseño de compensadores del fenómeno de la histéresis presente en los sistemas accionados por piezoeléctricos, siendo el modelo Bouc-Wen (ver Apéndice B) uno de los más difundidos para el diseño de los algoritmos de control. Por lo expuesto en la Sección 2.6.1, el modelo Bouc-Wen presenta ciertas limitaciones para describir la histéresis de estos sistemas, además de tratarse de una variable que representa una dinámica no accesible (no medible) de estos sistemas. Para superar estas limitaciones, Zhang *et al.* [Zhang and Yan, 2019; Zhang et al., 2020, 2021] propusieron un observador de histéresis mediante una regla SMC adaptativa, desarrollado sobre la base del modelo Bouc-Wen, para la compensación de este fenómeno no lineal. En más detalles, el compensador propuesto en [Zhang and Yan, 2019; Zhang et al., 2020, 2021] se establece a partir de una variable que contiene información sobre la dinámica referida a los ciclos de histéresis del sistema, representados a partir del modelo Bouc-Wen, en el cual se introduce la variable superficie de deslizamiento a los efectos de corregir la estimación de este fenómeno y mejorar la compensación. Con este enfoque del controlador, se busca introducir en el algoritmo SMC un término tal que, en función de la dinámica del error de la variable que se está controlando y de cierta información sobre el comportamiento dinámico de la histéresis del sistema, sea posible contrarrestar de manera satisfactoria este fenómeno para mejorar el desempeño del sistema a lazo cerrado.

Como se ha expuesto en la Sección 2.9, para suprimir de manera efectiva el fenómeno del *chattering* en aplicaciones de tiempo real, se recurre a sustituir la función signo utilizada en el término robusto de los algoritmos SMC por una función de conmutación continua. En [Zhang et al., 2021] los autores han expresado esta consideración, sin embargo, la prueba de estabilidad del sistema controlado presentada en [Zhang and Yan, 2019; Zhang et al., 2020, 2021] se ha establecido solamente para el caso ideal en el que se utiliza la función signo en el término robusto, sin presentar un análisis de estabilidad riguroso

si en su lugar se utiliza una función de conmutación continua. Con esta modificación en el término robusto del algoritmo SMC, no puede asegurarse que la variable superficie de deslizamiento, involucrada en un proceso integrativo en los algoritmos adaptativos y/o de estimación, sea forzada a cero. Con lo cual, las leyes adaptativas y de estimación propuestas en los trabajos citados deben reformarse para garantizar la estabilidad global del sistema. En otras palabras, los algoritmos adaptativos y de estimación deben ser modificados para asegurar que todas las variables permanezcan acotadas en el tiempo.

Por lo tanto, en lo que sigue de este Capítulo se presenta un algoritmo de control adaptativo con estimación de la histéresis, el cual se plantea con una función de conmutación continua de tipo saturación en el término robusto para mitigar el efecto del *chattering*. Para garantizar la estabilidad global del sistema, se ha considerado un término estabilizante en las reglas consideradas para el cómputo de los estimadores propuestos en el controlador. A continuación, se expresa el modelo de sistema utilizado para el diseño del algoritmo de control y se detallan las consideraciones tenidas en cuenta sobre el mismo.

5.3. Modelo de sistema considerado para el diseño del controlador

Como se ha señalado en la Sección 4.3, la dinámica general de un posicionador nanométrico accionado por piezoeléctrico, bajo el supuesto que se verifica una predominancia de la dinámica mecánica sobre la eléctrica en el dominio frecuencial, puede expresarse como

$$a_2\ddot{x}(t) + a_1\dot{x}(t) + a_0x(t) = K_T u(t) - \varsigma h(t) + d(t) \quad (5.1)$$

$$\dot{h}(t) = \alpha \dot{x}(t) - \beta |\dot{x}(t)| h(t) - \gamma \dot{x}(t) |h(t)|, \quad (5.2)$$

donde $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $|\gamma| < \beta$, $K_T = \omega_n^2 K_u > 0$, $\varsigma = \omega_n^2$, $a_2 = 1$, $a_1 = 2\zeta\omega_n$ y $a_0 = \omega_n^2$, siendo ω_n y ζ la frecuencia natural y el coeficiente de amortiguamiento del sistema, respectivamente, correspondientes al primer modo de vibración del sistema en la dirección de movimiento. Las variables $x(t)$, $u(t)$ y $h(t)$ representan el desplazamiento del sistema, el voltaje aplicado y el fenómeno no lineal de histéresis descrito a partir del modelo Bouc-Wen (ver Apéndice B), respectivamente. El término $d(t)$ referido a las perturbaciones del sistema contempla incertidumbres estructurales tales como dinámicas de orden superior que no han sido consideradas en el modelo, el efecto *creep*, errores en

el modelado de la histéresis, incertidumbres paramétricas (como por ejemplo variación de la masa a ser desplazada) y eventuales esfuerzos externos que puedan incidir sobre el sistema.

En lo que sigue de este trabajo, sin pérdida de generalidad se considera que $d(t) = d_s + d_d(t)$, donde d_s es un valor cuasiestático a ser compensado a través de un término específico dispuesto en el algoritmo de control, y $d_d(t)$ es una cantidad dependiente del tiempo a ser contrarrestada a través del término robusto de la ley de control propuesta. Cabe destacar que, al tratar las perturbaciones generales como la suma de un término estático y otro dinámico, se busca reducir el valor de la ganancia requerida en el término robusto de la ley SMC y de esta manera reducir el efecto del *chattering*. Para el diseño del controlador, se supondrán conocidos todos los parámetros del modelo dado por las ecuaciones (5.1) y (5.2), siendo $K_T > 0$, $\varsigma > 0$, $\alpha > 0$, $|\gamma| < \beta$, con $\beta > 0$, y $a_i > 0$ para $i = 0, 1, 2$. Como se ha mencionado en la Sección 4.3, la condición $|\gamma| < \beta$ para los parámetros del modelo Bouc-Wen garantiza que $|h(t)| \leq \bar{H} < \infty \quad \forall t \in [0, \infty)$, donde $\bar{H}$ resulta una cantidad desconocida dado que depende de $h(0)$, siendo $h(t)$ una variable interna (no medible) del sistema. Además, se considerará que $|d_d(t)| \leq \bar{D} < \infty \quad \forall t \in [0, \infty)$ y $d_s \in \mathbb{R}$ (valor finito), donde ambas cantidades $\bar{D}$ y d_s resultan desconocidas. En la práctica, esta suposición sobre un límite superior de las perturbaciones se garantiza dado que las señales de referencia propuestas se eligen de manera tal de poseer un contenido frecuencial inferior al primer modo de vibración del sistema. Además, el funcionamiento de este tipo de dispositivos se realiza en condiciones tales que los esfuerzos externos que puedan incidir sobre el sistema permanecen acotados en el tiempo.

5.4. Estrategia SMC con estimación de la histéresis

Para el desarrollo de la ley de control propuesta en este Capítulo, se asumirá que la señal de referencia $x_r(t)$ tiene segunda derivada temporal continua por tramos y definida para todo instante de tiempo $t \geq 0$. Luego, considerando la señal error $e(t) = x(t) - x_r(t)$, la superficie de deslizamiento se especifica como

$$s(t) = \dot{e}(t) + \lambda e(t), \quad (5.3)$$

donde $\lambda > 0$ es un parámetro de diseño en el controlador. Se hace notar que, en la condición ideal de deslizamiento, garantizar estar sobre la superficie $s(t) = 0 \quad \forall t \in [t_0, \infty)$, siendo t_0 un instante de tiempo finito, asegura una

dinámica del error de la variable que se está controlando (en este caso posición) tal que $e(t) = e(t_0) \cdot \exp(-\lambda(t - t_0)) \quad \forall t \in [t_0, \infty)$, es decir, el error tenderá a cero exponencialmente a partir del instante de tiempo t_0 en el que se alcance la superficie.

Para el diseño de la ley de control, se ha tenido en cuenta la metodología de diseño expresada en la Sección C.4 del Apéndice C, incorporando un observador de la histéresis y otro para las perturbaciones mediante reglas adaptativas, teniendo en cuenta modificaciones en los algoritmos expresados en [Bashash and Jalili, 2009; Zhang et al., 2020] para el diseño de los estimadores. Por lo tanto, la ley SMC adaptativa propuesta en esta tesis se establece como (se omite la variable t para simplificar la notación)

$$u = \frac{1}{K_T} \left[a_1 \dot{x} + a_0 x + a_2 \ddot{x}_r - a_2 \lambda \dot{e} + \zeta \hat{h} - \hat{d}_s - k_p s - \hat{D} \text{sat}(\hat{D}, s) \right], \quad (5.4)$$

siendo k_p una constante positiva, la cual se utiliza para reducir el tiempo de alcance a la superficie de deslizamiento cuando se dispone la función signo en el término robusto del algoritmo SMC [Singh and Holé, 2004]. Cabe señalar que la función continua tipo saturación $\text{sat}(\hat{D}, s)$ del término robusto se utiliza para evitar el efecto del *chattering* en aplicaciones de tiempo real. En la ecuación (5.4), el término $\hat{h}$ se utiliza para contrarrestar la histéresis y $\hat{d}_s$ se dispone para compensar las perturbaciones cuasistáticas tales como el efecto *creep* contemplado en el término de las perturbaciones que afectan al sistema. Por su parte, $\hat{D}$ representa la ganancia adaptativa del término robusto diseñada para contrarrestar las perturbaciones $d_d(t)$ variantes en el tiempo.

Las estimaciones requeridas en la ecuación (5.4) han sido diseñadas a partir de una modificación realizada en los algoritmos propuestos en [Zhang et al., 2020] para $\hat{h}$ y $\hat{D}$, y sobre la regla indicada en [Bashash and Jalili, 2009] para la estimación de $\hat{d}_s$. En más detalles, por un lado en [Zhang et al., 2020] se propone $\dot{\hat{h}} = \alpha \dot{x} - \beta |\dot{x}| \hat{h} - \gamma \dot{x} \left| \hat{h} \right| - s$ y $\dot{\hat{D}} = \eta_D |s|$, con $\eta_D > 0$, donde el análisis de estabilidad en el trabajo citado se establece solo para el caso en el que se dispone de la función $\text{sgn}(\bullet)$ en el término robusto de $u(t)$. Por otro lado, en [Bashash and Jalili, 2009] se propone $\dot{\hat{d}}_s = \eta_s s$, donde $\eta_s > 0$, con la incorporación de una regla de saturación en las leyes adaptativas y de estimación para evitar que las variables del controlador tiendan a infinito cuando se utiliza una función continua en el término robusto de $u(t)$. Cabe señalar que, la función saturación del algoritmo adaptativo de [Bashash and Jalili, 2009] impone el conocimiento de los límites inferior y superior del parámetro que se

está estimando. Dado que, en el algoritmo de control de la ecuación (5.4) se propone en esta tesis una función continua $\text{sat}(\hat{D}, s)$ en el término robusto y se consideran desconocidos los límites superior e inferior de las variables estimadas, para la ley de control establecida en este trabajo se han modificado los algoritmos de estimación propuestos en [Zhang et al., 2020] y [Bashash and Jalili, 2009] previamente señalados, incorporando en esas expresiones la llamada regla de modificación- σ [Nguyen and Nguyen, 2018]. Según esta regla, al incorporar un término de la forma $-\sigma_i \cdot (\bullet)$ en los algoritmos adaptativos y/o de estimación, se garantiza que las estimaciones permanezcan acotadas sin requerir del conocimiento de un límite superior de la variable que se está estimando. Por lo tanto, las estimaciones requeridas en la ecuación (5.4) se han propuesto como

$$\dot{\hat{d}}_s(t) = \eta_1 \left(s(t) - \sigma_1 \hat{d}_s(t) \right), \quad \text{siendo} \quad \eta_1, \sigma_1 > 0 \quad \text{y} \quad \hat{d}_s(0) \in \mathbb{R}; \quad (5.5)$$

$$\dot{\hat{D}}(t) = \eta_2 \left(|s(t)| - \sigma_2 \hat{D}(t) \right), \quad \text{siendo} \quad \eta_2, \sigma_2 > 0 \quad \text{y} \quad \hat{D}(0) \geq 0; \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} \dot{\hat{h}}(t) = \alpha \dot{x}(t) - \beta |\dot{x}(t)| \hat{h}(t) - \gamma \dot{x}(t) \left| \hat{h}(t) \right| + \eta_3 \left(-s(t) - \sigma_3 \hat{h}(t) \right), \\ \text{siendo} \quad \eta_3, \sigma_3 > 0 \quad \text{y} \quad \hat{h}(0) \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (5.7)$$

donde σ_i con $i = 1, 2, 3$, y η_j con $j = 1, 2, 3$, son parámetros de diseño. Cabe señalar que, a partir de la ecuación (5.6) se tiene $\dot{\hat{D}}(t) + \lambda_D \hat{D}(t) = \psi(t)$, donde $\lambda_D = \eta_2 \sigma_2 > 0$ y $\psi(t) = \eta_2 |s(t)| \geq 0 \quad \forall t \in [0, \infty)$. Entonces, resolviendo esta ecuación diferencial de primer orden se halla que $\hat{D}(t) = e^{-\lambda_D t} \left[\int_0^t e^{\lambda_D \tau} \psi(\tau) d\tau + \hat{D}(0) \right]$, siendo el término integrativo el producto de funciones no negativas. Por lo tanto, especificando $\hat{D}(0) \geq 0$ resulta en $\hat{D}(t) \geq 0 \quad \forall t \in [0, \infty)$. En otras palabras, al seleccionar un valor inicial $\hat{D}(0)$ mayor o igual a cero, esta variable resulta no negativa para cualquier instante de tiempo $t \geq 0$. Este es un aspecto importante de señalar dado que en las leyes SMC se requiere una ganancia de conmutación no negativa en el término robusto [Edwards and Spurgeon, 1998].

Para la ley de control de la ecuación (5.4), la función saturación se ha diseñado teniendo en cuenta una modificación en las desigualdades establecidas en la definición de las condiciones de conmutación propuestas en [Cong et al.,

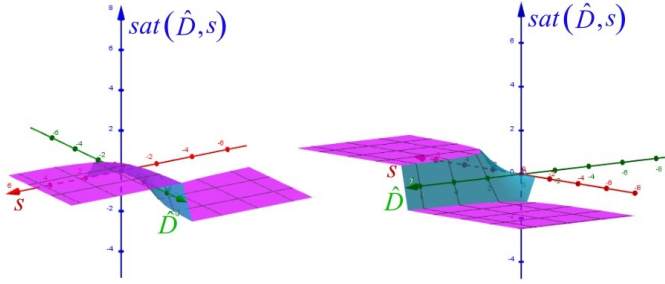


Figura 5.1: Gráfico de la función $\text{sat}(\hat{D}, s)$ utilizada en la ley de control propuesta (valor de ϕ arbitrario).

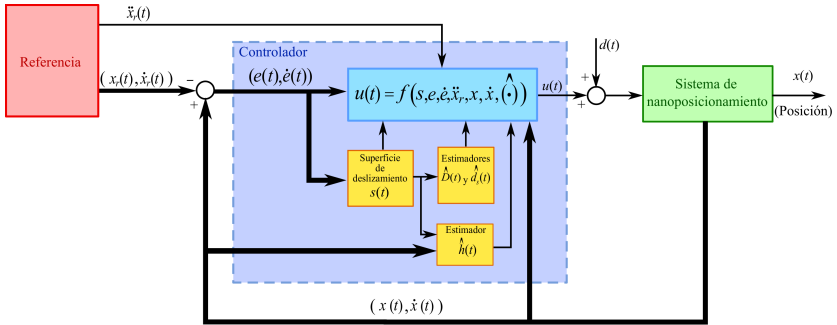


Figura 5.2: Esquema en diagrama de bloques del algoritmo SMC propuesto.

2014], definiendo de esta manera

$$\text{sat}(\hat{D}, s) \triangleq \begin{cases} \text{sgn}(s), & \text{si } \hat{D}|s| \geq \phi \\ \frac{\hat{D}s}{\phi}, & \text{si } \hat{D}|s| < \phi, \end{cases} \quad (5.8)$$

siendo $\phi > 0$ un parámetro de diseño. La Figura 5.1 muestra una representación cualitativa de la función de conmutación dada por la ecuación (5.8), en donde se observa que $\text{Im}(\text{sat}) = [-1, 1]$, la cual presenta una transición continua cerca de $s = 0$.

En la Figura 5.2 se muestra un esquema representativo en diagrama de bloques del controlador propuesto. El análisis de estabilidad del sistema a lazo cerrado se detalla en la Sección 5.5.

5.5. Análisis de estabilidad a lazo cerrado

Para el análisis de estabilidad del sistema dinámico dado por las ecuaciones (5.1) y (5.2), comandado a partir del algoritmo expresado en las ecuaciones (5.3)-(5.8), se considera la función candidata de Lyapunov

$$V = \frac{a_2}{2}s^2 + \frac{1}{2\eta_1}\tilde{d}_s^2 + \frac{1}{2\eta_2}\tilde{D}^2 + \frac{\varsigma}{2\eta_3}\tilde{h}^2, \quad (5.9)$$

donde $a_2, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \varsigma > 0$. La derivada temporal de V puede escribirse como

$$\dot{V} = a_2 s \dot{s} + \frac{1}{\eta_1} \tilde{d}_s \dot{\tilde{d}}_s + \frac{1}{\eta_2} \tilde{D} \dot{\tilde{D}} + \frac{\varsigma}{\eta_3} \tilde{h} \dot{\tilde{h}}. \quad (5.10)$$

Notar que, en la ecuación (5.10) se requiere la derivada temporal de la variable s como así también de los errores de estimación. Por lo tanto, teniendo en cuenta las ecuaciones (5.5)-(5.7), por un lado resulta

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{d}}_s &= \dot{\hat{d}}_s - \dot{d}_s \\ &= \dot{\hat{d}}_s - 0 \\ &= \eta_1 \left(s - \sigma_1 \hat{d}_s \right) \\ &= \eta_1 \left(s - \sigma_1 \tilde{d}_s - \sigma_1 d_s \right), \end{aligned} \quad (5.11)$$

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{D}} &= \dot{\hat{D}} - \dot{\tilde{D}} \\
&= \dot{\hat{D}} - 0 \\
&= \eta_2 \left(|s| - \sigma_2 \hat{D} \right) \\
&= \eta_2 \left(|s| - \sigma_2 \tilde{D} - \sigma_2 \bar{D} \right)
\end{aligned} \tag{5.12}$$

y

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{h}} &= \dot{\hat{h}} - \dot{\tilde{h}} \\
&= -\beta |\dot{x}| \tilde{h} - \gamma \dot{x} \left(\left| \hat{h} \right| - |h| \right) + \eta_3 \left(-s - \sigma_3 \hat{h} \right) \\
&= -\beta |\dot{x}| \tilde{h} - \gamma \dot{x} \left(\left| \hat{h} \right| - |h| \right) + \eta_3 \left(-s - \sigma_3 \tilde{h} - \sigma_3 h \right).
\end{aligned} \tag{5.13}$$

Por otro lado, al considerar la derivada temporal de la ecuación (5.3) se obtiene

$$\begin{aligned}
a_2 \dot{s} &= a_2 \ddot{e} + a_2 \lambda \dot{e} \\
&= (a_2 \ddot{x} - a_2 \ddot{x}_r) + a_2 \lambda \dot{e} \\
&= -a_1 \dot{x} - a_0 x + K_T u - \varsigma h + d - a_2 \ddot{x}_r + a_2 \lambda \dot{e}.
\end{aligned} \tag{5.14}$$

Entonces, sustituyendo la ecuación (5.4) en la ecuación (5.14) y teniendo en cuenta la definición de los errores de estimación, se consigue escribir

$$a_2 \dot{s} = -k_p s - \hat{D} \text{sat} \left(\hat{D}, s \right) + \varsigma \tilde{h} - \tilde{d}_s + d_d. \tag{5.15}$$

Ahora, sustituyendo las ecuaciones (5.11)-(5.13) y la ecuación (5.15) en la ecuación (5.10), resulta

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= s \left[-k_p s - \hat{D} \text{sat} \left(\hat{D}, s \right) + \varsigma \tilde{h} - \tilde{d}_s + d_d \right] \\
&\quad + \tilde{d}_s \left[s - \sigma_1 \tilde{d}_s - \sigma_1 d_s \right] + \tilde{D} \left[|s| - \sigma_2 \tilde{D} - \sigma_2 \bar{D} \right] \\
&\quad + \frac{\varsigma}{\eta_3} \tilde{h} \left[-\beta |\dot{x}| \tilde{h} - \gamma \dot{x} \left(\left| \hat{h} \right| - |h| \right) + \eta_3 \left(-s - \sigma_3 \tilde{h} - \sigma_3 h \right) \right] \\
&= -k_p s^2 - s \hat{D} \text{sat} \left(\hat{D}, s \right) + s d_d - \sigma_1 \tilde{d}_s^2 - \sigma_1 \tilde{d}_s d_s + \tilde{D} |s| \\
&\quad - \sigma_2 \tilde{D}^2 - \sigma_2 \tilde{D} \bar{D} - \sigma_3 \varsigma \tilde{h}^2 - \sigma_3 \varsigma \tilde{h} h \\
&\quad + \frac{\varsigma}{\eta_3} \tilde{h} \left[-\beta |\dot{x}| \tilde{h} - \gamma \dot{x} \left(\left| \hat{h} \right| - |h| \right) \right].
\end{aligned} \tag{5.16}$$

Considerando el último término del lado derecho de la ecuación (5.16), se tiene que

$$\begin{aligned}
 \frac{\varsigma}{\eta_3} \tilde{h} \left[-\beta |\dot{x}| \tilde{h} - \gamma \dot{x} \left(|\hat{h}| - |h| \right) \right] &\leq -\frac{\varsigma}{\eta_3} \beta |\dot{x}| \tilde{h}^2 + \left| \frac{\varsigma}{\eta_3} \gamma \dot{x} \left(|\hat{h}| - |h| \right) \tilde{h} \right| \\
 &\leq -\frac{\varsigma}{\eta_3} \beta |\dot{x}| \tilde{h}^2 + \left| \frac{\varsigma}{\eta_3} |\gamma| |\dot{x}| |\hat{h} - h| |\tilde{h}| \right| \\
 &= -\frac{\varsigma}{\eta_3} \beta |\dot{x}| \tilde{h}^2 + \frac{\varsigma}{\eta_3} |\gamma| |\dot{x}| |\tilde{h}|^2 \\
 &= -\frac{\varsigma}{\eta_3} (\beta - |\gamma|) |\dot{x}| \tilde{h}^2,
 \end{aligned} \tag{5.17}$$

donde en la tercer desigualdad de la ecuación (5.17) se ha utilizado la propiedad de módulo $||\hat{h}| - |h|| \leq |\hat{h} - h|$. Por su parte, se hace notar que $sd_d \leq |s| |d_d| \leq |s| \bar{D}$. Entonces, de la ecuación (5.16) se consigue expresar

$$\begin{aligned}
 \dot{V} &\leq -k_p s^2 - s \hat{D} \text{sat} \left(\hat{D}, s \right) + |s| \bar{D} - \sigma_1 \tilde{d}_s^2 - \sigma_1 \tilde{d}_s d_s \\
 &\quad + \tilde{D} |s| - \sigma_2 \tilde{D}^2 - \sigma_2 \tilde{D} \bar{D} - \sigma_3 \varsigma \tilde{h}^2 - \sigma_3 \varsigma \tilde{h} h \\
 &\quad - \frac{\varsigma}{\eta_3} (\beta - |\gamma|) |\dot{x}| \tilde{h}^2 \quad (\text{nota: } |\gamma| < \beta) \\
 &\leq -k_p s^2 - s \hat{D} \text{sat} \left(\hat{D}, s \right) + |s| \bar{D} - \sigma_1 \tilde{d}_s^2 - \sigma_1 \tilde{d}_s d_s \\
 &\quad + \tilde{D} |s| - \sigma_2 \tilde{D}^2 - \sigma_2 \tilde{D} \bar{D} - \sigma_3 \varsigma \tilde{h}^2 - \sigma_3 \varsigma \tilde{h} h \\
 &\leq -k_p s^2 - s \hat{D} \text{sat} \left(\hat{D}, s \right) + |s| \bar{D} - \sigma_1 \tilde{d}_s^2 + \sigma_1 |\tilde{d}_s| |d_s| \\
 &\quad + \tilde{D} |s| - \sigma_2 \tilde{D}^2 + \sigma_2 |\tilde{D}| |\bar{D}| - \sigma_3 \varsigma \tilde{h}^2 + \sigma_3 \varsigma |\tilde{h}| |h|.
 \end{aligned} \tag{5.18}$$

Ahora, en lo que sigue se especifican variables adicionales para desacoplar los errores de estimación de las variables a estimar, de acuerdo con el resultado de la ecuación (5.18). Se observa que, al considerar $\xi_1 \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ en la diferencia cuadrática

$$\left(\frac{1}{\xi_1} |\tilde{d}_s| - \xi_1 |d_s| \right)^2 = \frac{1}{\xi_1^2} |\tilde{d}_s|^2 - 2 |\tilde{d}_s| |d_s| + \xi_1^2 |d_s|^2, \tag{5.19}$$

la ecuación (5.19) puede reescribirse como

$$\begin{aligned}
 \left| \tilde{d}_s \right| |d_s| &= \frac{1}{2\xi_1^2} \left| \tilde{d}_s \right|^2 + \frac{\xi_1^2}{2} |d_s|^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\xi_1} \left| \tilde{d}_s \right| - \xi_1 |d_s| \right)^2 \\
 &\leq \frac{1}{2\xi_1^2} \left| \tilde{d}_s \right|^2 + \frac{\xi_1^2}{2} |d_s|^2 \\
 &= \frac{1}{2\xi_1^2} \left| \tilde{d}_s \right|^2 + \frac{\xi_1^2}{2} d_s^2.
 \end{aligned} \tag{5.20}$$

Procediendo de manera análoga y considerando las variables auxiliares $\xi_2 \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ y $\xi_3 \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$, es posible escribir

$$\left| \tilde{D} \right| |\bar{D}| \leq \frac{1}{2\xi_2^2} \left| \tilde{D} \right|^2 + \frac{\xi_2^2}{2} \bar{D}^2 \tag{5.21}$$

y

$$\left| \tilde{h} \right| |h| \leq \frac{1}{2\xi_3^2} \left| \tilde{h} \right|^2 + \frac{\xi_3^2}{2} |h|^2. \tag{5.22}$$

Luego, teniendo en cuenta las ecuaciones (5.20)-(5.22) y la condición $|h(t)| \leq \bar{H} < \infty \quad \forall t \in [0, \infty)$ señalada en la Sección 5.3, de la ecuación (5.18) se deduce que

$$\begin{aligned}
 \dot{V} &\leq -k_p s^2 - s \hat{D} \text{sat}(\hat{D}, s) + |s| \bar{D} + \tilde{D} |s| \\
 &\quad - \sigma_1 \left(1 - \frac{1}{2\xi_1^2} \right) \tilde{d}_s^2 - \sigma_2 \left(1 - \frac{1}{2\xi_2^2} \right) \tilde{D}^2 \\
 &\quad - \sigma_3 \varsigma \left(1 - \frac{1}{2\xi_3^2} \right) \tilde{h}^2 + \frac{\sigma_1 \xi_1^2}{2} d_s^2 + \frac{\sigma_2 \xi_2^2}{2} \bar{D}^2 + \frac{\sigma_3 \varsigma \xi_3^2}{2} \bar{H}^2.
 \end{aligned} \tag{5.23}$$

Dado que la función saturación de la ecuación (5.8) se ha establecido como una función continua definida por partes, el análisis de estabilidad debe realizarse teniendo en cuenta el algoritmo de control que resulta para cada expresión. Posteriormente, a partir de las conclusiones arribadas en cada caso, se establece una conclusión general sobre la estabilidad global del sistema controlado.

(I) *Caso en el que se verifica $\hat{D} |s| \geq \phi$.* En este caso, se tiene que $\text{sat}(\hat{D}, s) = \text{sgn}(s)$. Entonces, de la desigualdad dada por la ecuación (5.23)

se sigue que

$$\begin{aligned}
 \dot{V} &\leq -k_p s^2 - \hat{D} |s| + |s| \bar{D} + \tilde{D} |s| - \sigma_1 \left(1 - \frac{1}{2\xi_1^2}\right) \tilde{d}_s^2 - \sigma_2 \left(1 - \frac{1}{2\xi_2^2}\right) \tilde{D}^2 \\
 &\quad - \sigma_3 \varsigma \left(1 - \frac{1}{2\xi_3^2}\right) \tilde{h}^2 + \frac{\sigma_1 \xi_1^2}{2} d_s^2 + \frac{\sigma_2 \xi_2^2}{2} \bar{D}^2 + \frac{\sigma_3 \varsigma \xi_3^2}{2} \bar{H}^2 \\
 &= -k_p s^2 - \sigma_1 \left(1 - \frac{1}{2\xi_1^2}\right) \tilde{d}_s^2 - \sigma_2 \left(1 - \frac{1}{2\xi_2^2}\right) \tilde{D}^2 - \sigma_3 \varsigma \left(1 - \frac{1}{2\xi_3^2}\right) \tilde{h}^2 \\
 &\quad + \frac{\sigma_1 \xi_1^2}{2} d_s^2 + \frac{\sigma_2 \xi_2^2}{2} \bar{D}^2 + \frac{\sigma_3 \varsigma \xi_3^2}{2} \bar{H}^2.
 \end{aligned} \tag{5.24}$$

(II) Caso en el que se verifica $\hat{D} |s| < \phi$. Para el caso aquí considerado, se tiene que $\text{sat} \left(\hat{D}, s \right) = \frac{\hat{D}s}{\phi}$. Entonces, teniendo en cuenta que $|s| \bar{D} + \tilde{D} |s| = \hat{D} |s|$, de la desigualdad dada por la ecuación (5.23) se deduce que

$$\begin{aligned}
 \dot{V} &\leq -k_p s^2 - \frac{\hat{D}^2 s^2}{\phi} + \hat{D} |s| - \sigma_1 \left(1 - \frac{1}{2\xi_1^2}\right) \tilde{d}_s^2 - \sigma_2 \left(1 - \frac{1}{2\xi_2^2}\right) \tilde{D}^2 \\
 &\quad - \sigma_3 \varsigma \left(1 - \frac{1}{2\xi_3^2}\right) \tilde{h}^2 + \frac{\sigma_1 \xi_1^2}{2} d_s^2 + \frac{\sigma_2 \xi_2^2}{2} \bar{D}^2 + \frac{\sigma_3 \varsigma \xi_3^2}{2} \bar{H}^2 \\
 &= -k_p s^2 - \frac{1}{\phi} \left(|s| \hat{D} - \frac{1}{2} \phi \right)^2 + \frac{\phi}{4} - \sigma_1 \left(1 - \frac{1}{2\xi_1^2}\right) \tilde{d}_s^2 - \sigma_2 \left(1 - \frac{1}{2\xi_2^2}\right) \tilde{D}^2 \\
 &\quad - \sigma_3 \varsigma \left(1 - \frac{1}{2\xi_3^2}\right) \tilde{h}^2 + \frac{\sigma_1 \xi_1^2}{2} d_s^2 + \frac{\sigma_2 \xi_2^2}{2} \bar{D}^2 + \frac{\sigma_3 \varsigma \xi_3^2}{2} \bar{H}^2 \\
 &\leq -k_p s^2 + \frac{\phi}{4} - \sigma_1 \left(1 - \frac{1}{2\xi_1^2}\right) \tilde{d}_s^2 - \sigma_2 \left(1 - \frac{1}{2\xi_2^2}\right) \tilde{D}^2 \\
 &\quad - \sigma_3 \varsigma \left(1 - \frac{1}{2\xi_3^2}\right) \tilde{h}^2 + \frac{\sigma_1 \xi_1^2}{2} d_s^2 + \frac{\sigma_2 \xi_2^2}{2} \bar{D}^2 + \frac{\sigma_3 \varsigma \xi_3^2}{2} \bar{H}^2.
 \end{aligned} \tag{5.25}$$

Con el propósito de una mejor comprensión de los resultados expuestos a partir de la ecuaciones (5.24) y (5.25) deducidas de los casos (I) y (II), se

establecen las cantidades $\xi_k > \frac{1}{\sqrt{2}}$ con $k = 1, 2, 3$, y se define

$$\begin{cases} \mu_0 \triangleq k_p \\ \mu_j \triangleq \sigma_j \left(1 - \frac{1}{2\xi_j^2}\right), \quad \text{con } j = 1, 2 \\ \mu_3 \triangleq \sigma_3 \varsigma \left(1 - \frac{1}{2\xi_3^2}\right) \\ \varphi_0 \triangleq \frac{a_2}{2}, \quad \varphi_1 \triangleq \frac{1}{2\eta_1}, \quad \varphi_2 \triangleq \frac{1}{2\eta_2}, \quad \varphi_3 \triangleq \frac{\varsigma}{2\eta_3}, \end{cases} \quad (5.26)$$

$$\Lambda \triangleq \min \left\{ \frac{\mu_0}{\varphi_0}, \frac{\mu_1}{\varphi_1}, \frac{\mu_2}{\varphi_2}, \frac{\mu_3}{\varphi_3} \right\} \quad (5.27)$$

y

$$\delta \triangleq \frac{\sigma_1 \xi_1^2}{2} d_s^2 + \frac{\sigma_2 \xi_2^2}{2} \bar{D}^2 + \frac{\sigma_3 \varsigma \xi_3^2}{2} \bar{H}^2 + \frac{\phi}{4} \quad (\text{valor finito}). \quad (5.28)$$

Entonces, los resultados de las ecuaciones (5.24) y (5.25) se pueden expresar como

$$\dot{V}(t) \leq -\Lambda V(t) + \delta, \quad \text{con } \Lambda > 0 \quad \text{y} \quad 0 \leq \delta < \infty. \quad (5.29)$$

Al integrar la desigualdad dada por la ecuación (5.29) entre 0 y t , se obtiene

$$0 \leq V(t) \leq \exp(-\Lambda t) \left[V(0) - \frac{\delta}{\Lambda} \right] + \frac{\delta}{\Lambda}, \quad (5.30)$$

donde se verifica la condición $0 \leq V(t) \leq \max \left\{ V(0), \frac{\delta}{\Lambda} \right\} \forall t \in [0, \infty)$. Luego, definiendo como

$$B_V(t) \triangleq \exp(-\Lambda t) \left[V(0) - \frac{\delta}{\Lambda} \right] + \frac{\delta}{\Lambda}, \quad (5.31)$$

$$\mathbf{r}(t) \triangleq \begin{bmatrix} s(t) \\ \tilde{d}_s(t) \\ \bar{D}(t) \\ \tilde{h}(t) \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{Q} \triangleq \begin{bmatrix} \frac{a_2}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\eta_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2\eta_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\varsigma}{2\eta_3} \end{bmatrix}, \quad (5.32)$$

de la desigualdad expresada en la ecuación (5.30) resulta

$$0 \leq \lambda_{\min}(\mathbf{Q}) \|\mathbf{r}(t)\|_2^2 \leq \mathbf{r}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{r}(t) = V(t) \leq B_V(t), \quad (5.33)$$

donde $\lambda_{\min}(\mathbf{Q})$ expresa el mínimo autovalor de la matriz $\mathbf{Q}$ y $\|\mathbf{r}(t)\|_2$ la Norma Euclídea del vector $\mathbf{r}(t)$. Luego, de la ecuación (5.33) se consigue escribir

$$\|\mathbf{r}(t)\|_2 \leq \sqrt{\frac{B_V(t)}{\lambda_{\min}(\mathbf{Q})}} \quad \forall t \in [0, \infty). \quad (5.34)$$

Dado que $B_V(t) \rightarrow \frac{\delta}{\Lambda}$ para $t \rightarrow \infty$, se tiene que $\|\mathbf{r}(t)\|_2$ resulta finalmente acotado. Por lo tanto, la desigualdad de la ecuación (5.34) implica que $s(t)$, $\tilde{d}_s(t)$, $\tilde{D}(t)$ y $\tilde{h}(t)$ están finalmente acotados en ausencia del conocimiento de d_s y $\bar{D}$ asociados con el promedio de las perturbaciones y una cota superior de las mismas, respectivamente, y de $h(t)$ referido al estado de histéresis del sistema para el diseño del controlador. Notar que, la variable $s(t)$ contiene información de la dinámica del error de posición. Con lo cual, seleccionando $\lambda > 0$ en la ecuación (5.3), se obtiene una superficie de deslizamiento estable en el tiempo que asegura mantener acotada la dinámica del error en torno a cero $\forall t \in [0, \infty)$. Luego, dado que δ es función de los parámetros de la regla modificación- σ y de ϕ (ver ecuación (5.28)), donde σ_i y ϕ son parámetros del controlador con valores positivos arbitrarios, de la ecuación (5.29) se deduce que $s(t)$ y los errores de estimación pueden disminuirse seleccionando σ_i y ϕ con valores pequeños (positivos) cercanos a cero. Por lo expuesto en la Sección 5.2, es importante señalar que los parámetros σ_i se han introducido para asegurar que las estimaciones se mantengan acotadas, dado que se ha considerado la función saturación en el término robusto del controlador a los efectos de evitar el *chattering* en aplicaciones reales. Ahora, teniendo en cuenta que $s(t)$ está acotada en el tiempo, es decir, $s \in L_\infty$ (ver Definición 2 del Apéndice A), por lo expuesto en [Ioannou and Sun, 1996] para sistemas lineales estrictamente propios, de la ecuación (5.3) se tiene que $e \in L_\infty$, es decir, el error de posición resulta acotado en el tiempo.

En particular, resulta relevante encontrar una cota superior para $s(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$, puesto que proporciona información sobre el error de la variable que se está controlando. Notar que, durante el desarrollo del análisis de estabilidad, se han introducido las variables auxiliares ξ_i . Estas variables no forman parte de la ley de control ni del modelo del sistema. Luego, al considerar $\xi_i = \frac{1}{\sqrt{2}}$ en la

ecuación (5.25), se tiene que $\dot{V} < 0$ si se cumple la condición

$$|s| > \sqrt{\frac{\sigma_1 d_s^2 + \sigma_2 \bar{D}^2 + \sigma_3 \zeta \bar{H}^2 + \phi}{4k_p}} \triangleq \Psi. \quad (5.35)$$

Por lo tanto, $s(t)$ es forzada hacia la región dada por la desigualdad $|s| \leq \Psi$ si se verifica la condición de la ecuación (5.35). Una vez que las trayectorias del sistema entran en la región donde se cumple la desigualdad $|s| < \Psi$, la derivada de la función de Lyapunov puede volverse positiva, es decir, $\dot{V} > 0$. Esto puede implicar que $s(t)$ se mueva fuera de dicha región considerada, donde es forzada a ingresar nuevamente por lo expuesto anteriormente. Eventualmente, las trayectorias en el plano de fase quedarán atrapadas dentro de la región donde se verifica que $|s(t)| \leq \Psi \quad \forall t \in [t_s, \infty)$, siendo t_s un instante de tiempo finito. Por lo tanto, la región $|s| \leq \Psi$ es la zona de convergencia o región de atracción para las trayectorias que comienzan fuera de esta zona. En lo que sigue, se supondrá que las trayectorias del sistema ingresan a esta zona de convergencia en el tiempo finito $t_s \geq 0$, verificándose

$$|s(t)| = |\dot{e}(t) + \lambda e(t)| \leq \Psi \quad \forall t \in [t_s, \infty). \quad (5.36)$$

De la ecuación (5.36) se deduce que, bajo las consideraciones establecidas, se cumple que

$$-\Psi \leq \dot{e}(t) + \lambda e(t) \leq \Psi \quad \forall t \in [t_s, \infty). \quad (5.37)$$

Luego, teniendo en cuenta el desarrollo presentado en [Bashash and Jalili, 2009], se deduce que debe existir una función $l_1(t)$ tal que $0 \leq l_1(t) \leq 2\Psi$, a partir de la cual se consigue escribir

$$s(t) = \dot{e}(t) + \lambda e(t) = \Psi - l_1(t) \quad \forall t \in [t_s, \infty). \quad (5.38)$$

La resolución de la ecuación diferencial dada por la ecuación (5.38) permite expresar

$$\begin{aligned} e(t) &= \frac{\Psi}{\lambda} + \left[e(t_s) - \frac{\Psi}{\lambda} \right] \exp(-\lambda(t - t_s)) \\ &\quad - \exp(-\lambda t) \int_{t_s}^t l_1(\tau) \exp(\lambda \tau) d\tau \\ &\leq \frac{\Psi}{\lambda} + \left[e(t_s) - \frac{\Psi}{\lambda} \right] \exp(-\lambda(t - t_s)) \quad \forall t \in [t_s, \infty). \end{aligned} \quad (5.39)$$

Con lo cual,

$$e_{ss} \leq \frac{\Psi}{\lambda}. \quad (5.40)$$

Del mismo modo, debe existir una función variante en el tiempo $0 \leq l_2(t) \leq 2\Psi$, tal que

$$s(t) = \dot{e}(t) + \lambda e(t) = -\Psi + l_2(t) \quad \forall t \in [t_s, \infty). \quad (5.41)$$

Entonces, de manera similar al análisis anterior, se puede deducir que

$$e(t) \geq -\frac{\Psi}{\lambda} + \left[e(t_s) + \frac{\Psi}{\lambda} \right] \exp(-\lambda(t - t_s)) \quad \forall t \in [t_s, \infty), \quad (5.42)$$

y en consecuencia,

$$e_{ss} \geq -\frac{\Psi}{\lambda}. \quad (5.43)$$

Por lo tanto, de las ecuaciones (5.40) y (5.43) se deduce que

$$|e_{ss}| \leq \frac{\Psi}{\lambda} \triangleq \varepsilon. \quad (5.44)$$

Con lo cual, eventualmente las trayectorias del sistema ingresan en el paralelogramo definido por la intersección de las regiones $|s(t)| \leq \Psi$ y $|e(t)| \leq \varepsilon$ en un instante de tiempo $t \geq t_s$ y permanecen en esta región, la cual se representa cualitativamente en la Figura 5.3.

5.6. Consideraciones respecto a la sintonización del controlador

Como se puede observar de las ecuaciones (5.4)-(5.7), el algoritmo de control propuesto consta de 9 (nueve) parámetros a ser sintonizados, además de los propios parámetros que hacen al modelo del sistema. Teniendo en cuenta las ecuaciones (5.35) y (5.44), para disminuir el error los parámetros λ y k_p deben ajustarse con valores grandes, mientras que los parámetros σ_k y ϕ deben seleccionarse con valores pequeños (positivos) cercanos a cero (ver ecuación (5.35)). En la práctica, la elección de estos parámetros debe hacerse mediante ensayos de prueba y error hasta lograr un desempeño adecuado del sistema a lazo cerrado. Como regla general, en una primera instancia se puede iniciar ajustando

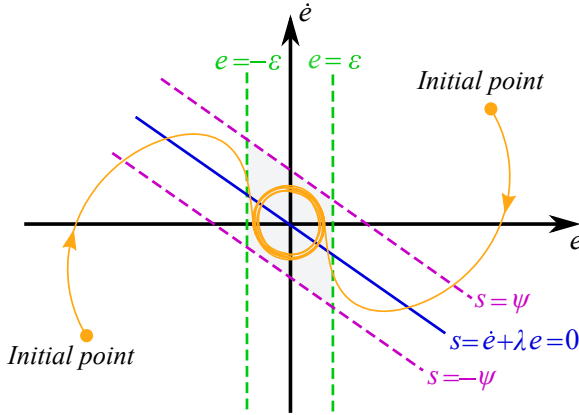


Figura 5.3: Representación gráfica de la región de convergencia en el plano $e - \dot{e}$ (plano de fase) al que convergen las trayectorias del sistema.

las ganancias λ y k_p , para luego continuar con la sintonización de los parámetros σ_j y de los η_j , con $j = 1, 2, 3$, y del parámetro ϕ . Cabe señalar que, en ningún caso debe ajustarse $\sigma_k = 0$ para algún k manteniendo $\phi \neq 0$, puesto que se eliminaría alguno de los términos encargados de garantizar la estabilidad del sistema.

Para el caso límite en que se considera $\sigma_j = 0$ y $\phi = 0$, la ley de control desarrollada en este Capítulo conduce al algoritmo de control adaptativo con observador de la histéresis propuesto en [Zhang et al., 2020], con el agregado del compensador de perturbaciones cuasiestáticas expuesto en [Bashash and Jalili, 2009]. Por lo tanto, la ley de control propuesta en esta tesis hace que la ley de adaptación sea más robusta a expensas de aumentar el límite del error en comparación con el SMC ideal donde se usa la función $\text{sgn}(\bullet)$ en el término robusto.

5.7. Resultados

En esta Sección se muestran resultados tanto de simulación como experimentales, al considerar el algoritmo de control propuesto en la Sección 5.4 para comandar el sistema de nanoposicionamiento de estructura flexible accionado por piezoeléctrico descrito en la Sección 3.2, con los parámetros del modelo de

sistema detallados en la Sección 4.5. En una primera instancia, los parámetros del controlador se ajustaron en simulación y posteriormente se efectuó la sintonización fina de los mismos en la etapa experimental, estableciendo para todas las pruebas presentadas $\sigma_1 = 0,02$, $\sigma_2 = 0,008$, $\sigma_3 = 0,005$, $\eta_1 = 27$, $\eta_2 = 345$, $\eta_3 = 1$, $k_p = 1$, $\lambda = 420$ y $\phi = 360$.

5.7.1. Resultados de simulación

Comparación con algoritmo de control adaptativo sin término estabilizante

En simulación, se comparó el algoritmo SMC adaptativo propuesto en esta tesis con el indicado en [Zhang et al., 2020] al cual se le ha incorporado el compensador de perturbaciones cuasiestático de [Bashash and Jalili, 2009], estableciendo una frecuencia de muestreo de 50 kHz y los mismos valores para los parámetros que tienen en común ambos algoritmos. Para evaluar el desempeño del estimador de histéresis, se estableció un valor inicial de h para el sistema tal que $\hat{h}(0) \neq h(0)$ para ambos controladores. La señal de referencia se ha propuesto como

$$x_r(t) = 8 \sin\left(2\pi t - \frac{\pi}{2}\right) + 3 \sin\left(10\pi t - \frac{\pi}{2}\right) + 4 \sin\left(22\pi t - \frac{\pi}{2}\right) + 18 \mu\text{m}, \quad (5.45)$$

donde la amplitud de las funciones sinusoidales han sido establecidas de manera tal de mover el sistema en un amplio rango de actuación, superando el 60 % del rango útil del mismo sin llegar a su saturación. Este criterio tiene como objetivo principal abordar la capacidad del controlador para contrarrestar principalmente la histéresis del sistema, la cual resulta más notoria al efectuar grandes desplazamientos.

Para las simulaciones, el término de perturbaciones considerado en la ecuación (5.1) se ha establecido como

$$d(t) = 10^5 \left\{ 3,7 + 4,25 \sin\left(\pi t - \frac{\pi}{2}\right) + 2,9 \sin\left(4\pi t - \frac{\pi}{2}\right) + 10 \cdot [1 - \exp(-t)] \right\} \frac{\mu\text{m}}{\text{s}^2}, \quad (5.46)$$

donde las componentes sinusoidales de $d(t)$ han sido elegidas con frecuencias diferentes a las especificadas en la señal de referencia para analizar el comportamiento del sistema controlado bajo excitaciones no sincronizadas. Las amplitudes de estos términos fueron seleccionadas de manera que $d(t)$

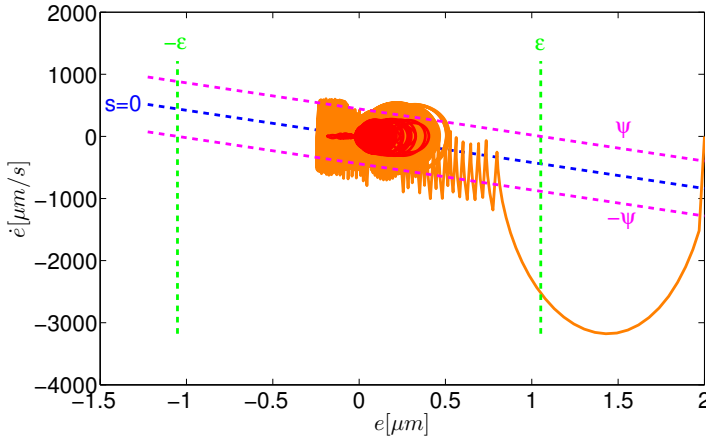


Figura 5.4: Región de convergencia de las trayectorias del sistema para el algoritmo de control propuesto. En naranja: evolución temporal de 0 s a 9 s; En rojo: evolución temporal de 9 s a 10 s.

produzca desplazamientos en el sistema similares a los obtenidos como errores de modelado, donde el término entre corchetes que involucra la función exponencial puede asociarse con el efecto del *creep*. La unidad de $d(t)$ se deduce de la descripción dinámica normalizada en términos másicos dada por la ecuación (5.1), contemplando los desplazamientos en unidades de micrómetros.

En la Figura 5.4 se muestra la evolución temporal de la dinámica del error en el plano de fase al considerar el controlador propuesto en esta tesis. Como se puede observar de la Figura 5.4, la trayectoria asociada a la dinámica del error evoluciona hacia la región donde se cumple que $|s| \leq \Psi$ indicada en color rojo, permaneciendo a partir de un tiempo finito dentro del paralelogramo indicado en la Figura 5.3, delimitado por las cantidades expresadas a partir de las ecuaciones (5.36) y (5.44).

Los resultados comparativos entre ambos controladores se muestran en la Figura 5.5, Figura 5.6 y Figura 5.7. De la Figura 5.5 se puede deducir que ambos algoritmos de control, el propuesto y el comparativo, proporcionan un desempeño similar con error de seguimiento submicrónico. En la Figura 5.6.(a) y Figura 5.6.(b) se muestran las acciones de control y su derivada temporal, respectivamente, donde el efecto del *chattering* resulta notablemente presente

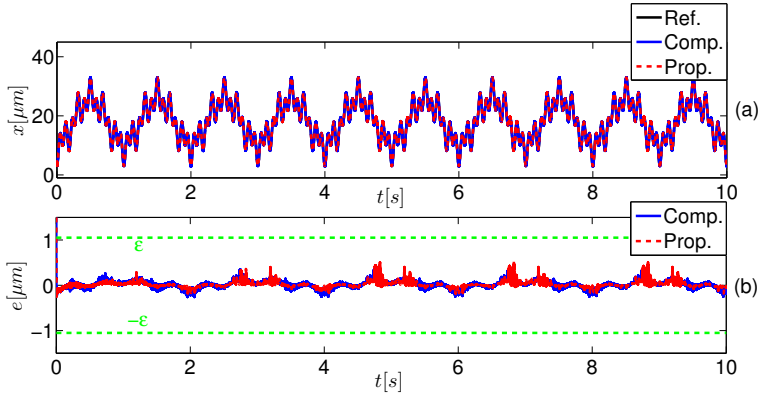


Figura 5.5: (a) Respuesta temporal obtenida en simulación para el seguimiento de trayectoria. (b) Señales de error de posición.

en la acción de control del algoritmo comparativo. Luego, en aplicaciones de tiempo real donde la frecuencia de muestreo es mucho menor que la utilizada en las simulaciones (en este caso, 50 kHz, siendo este valor 10 veces superior a los 5 kHz -valor razonable para un sistema comercial- utilizado en el desarrollo de las pruebas experimentales que se detallan más adelante en este Capítulo), este fenómeno indeseable tiene un efecto perjudicial sobre el rendimiento del sistema controlado, generando vibraciones que no sólo pueden conducir a un aumento de la señal error sino que además podrían perjudicar al funcionamiento del sistema. La Figura 5.7 muestra los errores de estimación para ambos algoritmos, donde resulta evidente que el algoritmo propuesto proporciona un error de estimación de la histéresis menor en comparación con el algoritmo comparativo. Además, en la estimación de d_s y $\bar{D}$, es claro que el algoritmo propuesto mantiene un error de estimación acotado, mientras que el algoritmo comparativo no exhibe este comportamiento.

Aptitudes del compensador propuesto frente a incertidumbre en el modelo de histéresis

Para atender cuestiones relacionadas con posibles variaciones en los ciclos de histéresis del sistema, derivado de cambios en las condiciones de funcionamiento o eventuales incertidumbres paramétricas (ver Sección 2.3.1), en simulación se

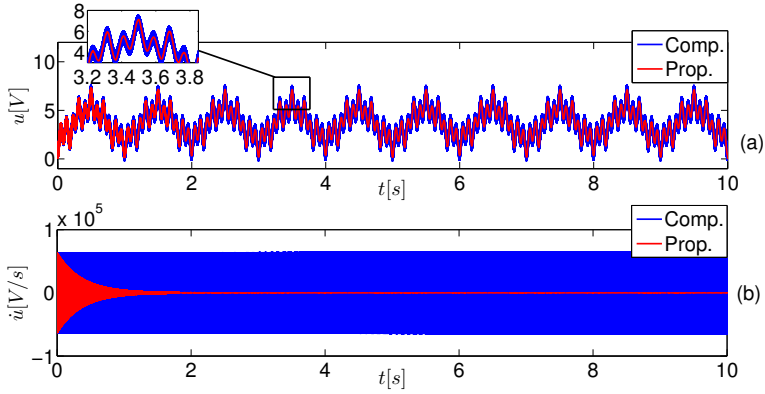


Figura 5.6: (a) Señales de control obtenidas en simulación. (b) Derivada temporal de las señales de control.

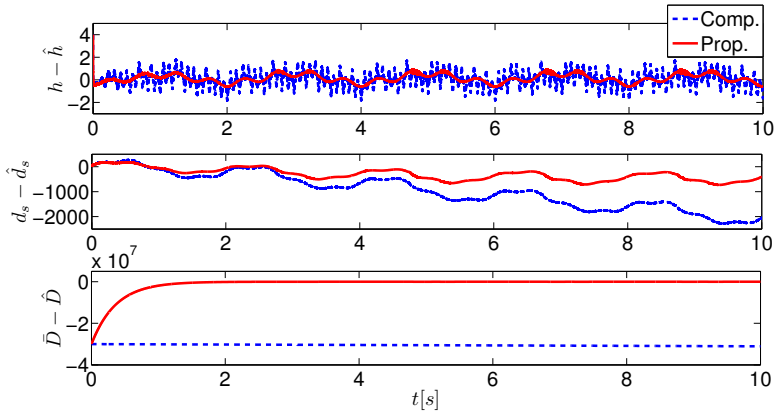


Figura 5.7: Errores de estimación obtenidos en simulación.

evaluó las bondades que ofrece el término adaptativo y estabilizante dispuestos en el observador de histéresis propuesto, frente a incertidumbres en los ciclos de histéresis. Para ello, se simuló la ley de control propuesta con condiciones iniciales desconocidas e incertidumbre paramétrica en el modelo Bouc-Wen, incorporando la regla de adaptación $\eta_3 \left(-s - \sigma_3 \hat{h} \right)$ en el compensador de la ecuación (5.7) a partir de un determinado instante de tiempo. Para el modelo de sistema, se estableció $\alpha = 2\alpha_0$, $\beta = 1,1\beta_0$ y $\gamma = 1,05\gamma_0$, donde $(\bullet)_0$ expresa los valores originales identificados, manteniendo estos mismos parámetros para el compensador de histéresis de la ecuación (5.7).

En la Figura 5.8 se muestra la incidencia que tienen los nuevos parámetros considerados respecto al modelo original, donde se observa una variación significativa en la morfología de los ciclos de histéresis respecto a los ciclos obtenidos con los parámetros originales. En la Figura 5.9 se muestran los resultados obtenidos a lazo cerrado al considerar el modelo de sistema con incertidumbre en el modelo de histéresis, donde la simulación se ha considerado con el agregado del término adaptativo y estabilizante a partir del instante de tiempo $t = 5$ s. Como se puede ver de la Figura 5.9, tanto el error de posición como de estimación de la histéresis disminuyen considerablemente a partir del instante de tiempo en el que se incorpora el término adaptativo en el compensador de este fenómeno.

5.7.2. Resultados experimentales

Para verificar el desempeño del algoritmo de control propuesto, se implementó el controlador en tiempo real para comandar el sistema experimental descrito en esta tesis. A continuación se exponen algunos resultados relevantes de las pruebas realizadas.

Desempeño del sistema controlado al considerar el problema de seguimiento de trayectoria multifrecuencial

Para evaluar experimentalmente el desempeño de la ley de control propuesta en lo que respecta al seguimiento de trayectorias, se comparó el algoritmo de control propuesto con un algoritmo SMC convencional señalado en la literatura para comandar este tipo de sistemas [Chouza et al., 2019; Tayouri et al., 2019] contemplando el compensador de histéresis bajo el paradigma de modelado en paralelo (para más detalles del modelo en paralelo, ver Sección 2.6.1). Cabe señalar que, en el algoritmo SMC convencional comparativo, el término $h(t)$

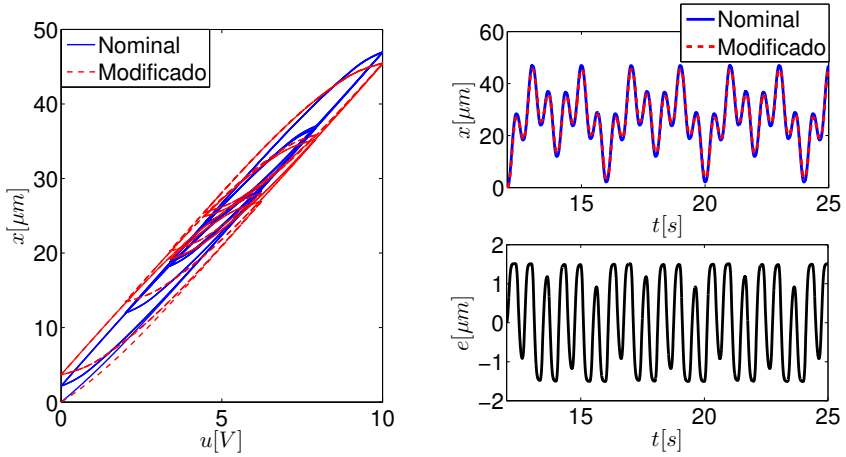


Figura 5.8: Simulación al considerar el modelo de sistema nominal identificado y el modelo con parámetros Bouc-Wen modificados, donde la señal $x(t)$ corresponde a una señal $u(t)$ multifrecuencial de 1,5 Hz, 0,5 Hz, y 0,25 Hz.

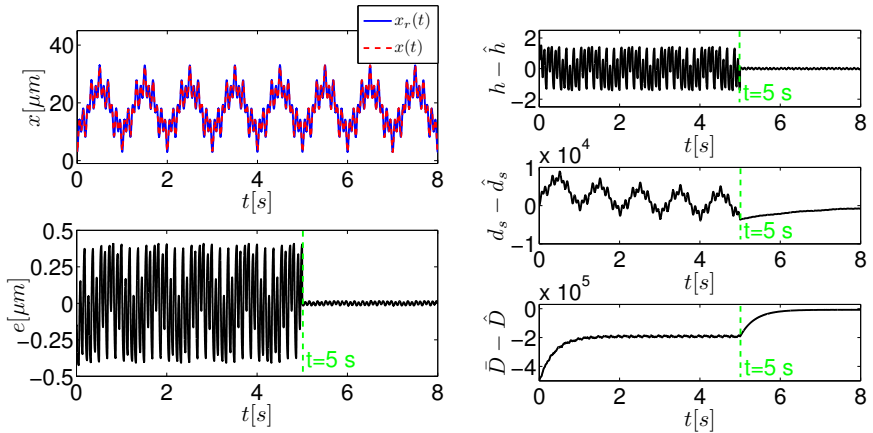


Figura 5.9: Simulación de sistema controlado al considerar estado desconocido del sistema y variación paramétrica en modelo Bouc-Wen, considerando el término adaptativo a partir del instante de tiempo $t = 5$ s.

se obtiene directamente de la ecuación (5.2), estableciendo la acción de control como

$$u = \frac{1}{K_T} \left[a_1 \dot{x} + a_0 x + a_2 \ddot{x}_r - a_2 \lambda \dot{e} + \zeta h + \hat{d}_s - D_m \text{sat}(s) \right], \quad (5.47)$$

donde se requiere que $D_m > |d_d(t)| \quad \forall t \in [0, \infty)$. Para el algoritmo de control dado por la ecuación (5.47), la función de saturación se ha establecido como

$$\text{sat}(s) \triangleq \begin{cases} \text{sgn}(s), & \text{si } |s| \geq \phi_c \\ \frac{s}{\phi_c}, & \text{si } |s| < \phi_c, \end{cases} \quad (5.48)$$

siendo $\phi_c > 0$ un parámetro de diseño con valor muy pequeño. En el algoritmo comparativo, las perturbaciones cuasiestáticas se estiman por medio del observador $\hat{d}_s = \nu \varrho s$, donde $\nu > 0$ es la ganancia de adaptación. El parámetro ϱ se utiliza para imponer límites en el proceso integrativo llevado a cabo durante la estimación, el cual viene dado por [Altintas et al., 2000]

$$\varrho = \begin{cases} 0 & \text{si } \hat{d} \leq \text{mín}(d) \quad \text{y } s \leq 0 \\ 0 & \text{si } \hat{d} \geq \text{máx}(d) \quad \text{y } s \geq 0 \\ 1 & \text{otro caso} \end{cases} \quad (5.49)$$

Notar que, por medio de la definición de ϱ expuesta en la ecuación (5.49), la estimación de las perturbaciones cuasiestáticas se mantienen siempre acotadas dentro de los límites $\text{mín}(d) \leq \hat{d}(t) \leq \text{máx}(d)$ para todo $t \in [0, \infty)$. Por su parte, observar que el algoritmo adaptativo dado por la ecuación (5.49) requiere del conocimiento acerca del valor mínimo y máximo de las perturbaciones, donde estos valores son ajustados por prueba y error mediante ensayos. Dado que sólo se dispone de un sensor de posición, la velocidad del sistema requerida en ambos algoritmos de control se estimó a partir del filtro digital de primer orden propuesto en [Altintas et al., 2000], el cual viene dado por

$$\dot{\hat{x}}(k) = \alpha_v \dot{\hat{x}}(k-1) + (1 - \alpha_v) \left[\frac{x(k) - x(k-1)}{\Delta t} \right], \quad (5.50)$$

donde Δt es el periodo de muestreo utilizado en el registro de los datos y $\alpha_v \in [0, 1]$ un parámetro de diseño, a partir del cual se regula la estimación mediante una ponderación entre la diferencia de posición contemplada a partir de la muestra actual e inmediata anterior, y el último valor de velocidad calculado.

Para evaluar la robustez y el desempeño de los algoritmos SMC considerados, se establecieron pruebas experimentales con incertidumbres tanto paramétricas como estructurales considerando la señal de referencia señalada en la Sección 5.7.1. En primer lugar, se ajustaron los parámetros del SMC convencional hasta lograr un rendimiento similar al del SMC propuesto en lo que se ha considerado como Prueba Nominal (PN). Para ello, el sistema experimental se inició a partir de condiciones iniciales nulas (asumiendo que el efecto de histéresis es igual a cero) y sin carga adicional. Por medio de una trayectoria suave, el sistema se llevó desde una posición de $0\ \mu\text{m}$ a $3\ \mu\text{m}$ en un lapso de tiempo de 5 s, dejando el sistema a lazo cerrado en el problema de regulación de la posición en $3\ \mu\text{m}$ durante 5 s, para luego evaluar el rendimiento de ambos controladores en el problema de control de seguimiento de trayectoria dado por la ecuación (5.45). En la Figura 5.10 se exhibe la gráfica correspondiente a este ensayo para ambos controladores, en donde se puede visualizar los tiempos de duración de cada una de las etapas asociadas a la señal de referencia señaladas para este ensayo. Se hace saber que, los primeros 15 s, se destinan para verificar que el sistema adquisidor de datos esté recibiendo las señales correctamente a los efectos de prevenir cualquier tipo de inconveniente asociado a cuestiones de comunicación. Sobre este ensayo, se hace saber que la PN se considera en la ventana temporal comprendida entre los 26 y 31 y correspondiente únicamente al seguimiento de trayectoria multifrecuencial dada por la ecuación (5.45).

El error de seguimiento y los índices de desempeño obtenidos en la PN se muestran en la Figura 5.11 y en la primera fila de la Tabla 5.1, respectivamente. Las variables estimadas para la ley de control propuesta se muestran en la Figura 5.12, donde se puede ver que todas las señales permanecen acotadas en el tiempo.

Seguidamente, se evaluó el rendimiento de cada controlador en presencia de dinámicas desconocidas, manteniendo los mismos parámetros que en la PN para ambos controladores. En primer lugar, se evaluó el rendimiento de la compensación de la histéresis en la llamada Prueba de Estado de Histéresis Desconocida (PEHD). La prueba se inició desde una condición inicial diferente de cero, para la cual el efecto de la histéresis resulta no nulo con un valor desconocido, estableciendo un valor inicial nulo para ambos compensadores de histéresis. Los errores de seguimiento y los índices de desempeño logrados para esta prueba se muestran en la Figura 5.13 y en la segunda fila de la Tabla 5.1, respectivamente. A partir de los resultados, se deduce que la ley de control propuesta consigue lidiar mejor con el fenómeno no medible de la histéresis que el algoritmo de control convencional.

A continuación, para evaluar el rendimiento ante variaciones paramétricas,

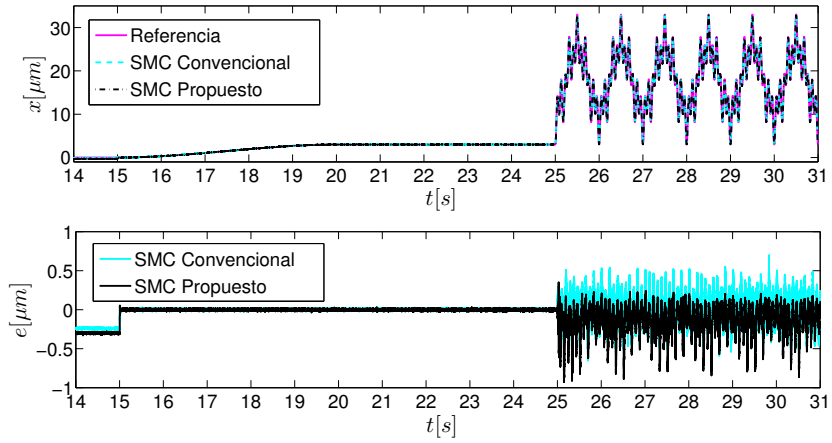


Figura 5.10: Prueba nominal a lazo cerrado.

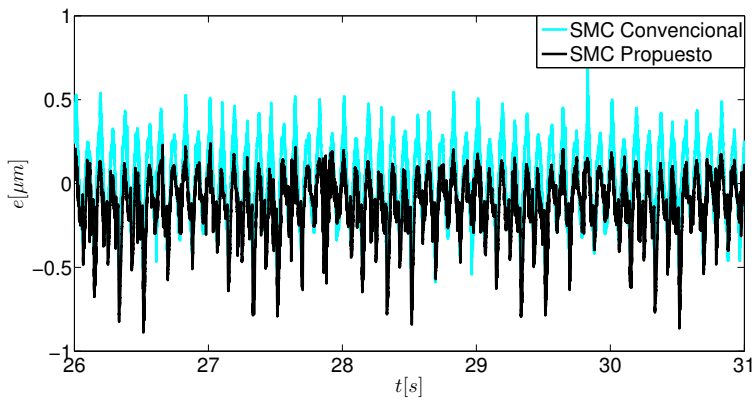


Figura 5.11: Señal error de la prueba nominal.

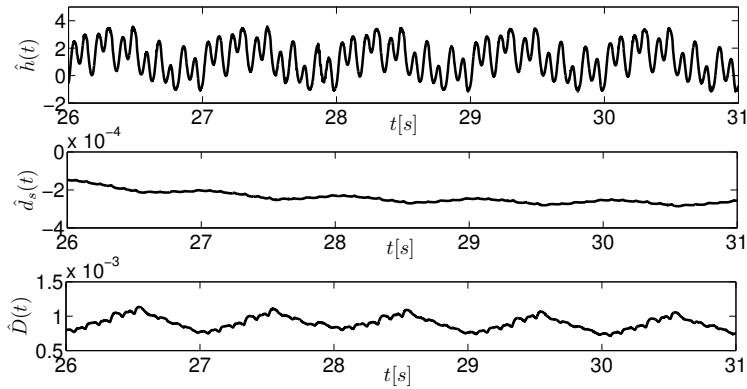


Figura 5.12: Evolución temporal de las variables estimadas al considerar el problema de seguimiento de trayectoria para la prueba nominal.

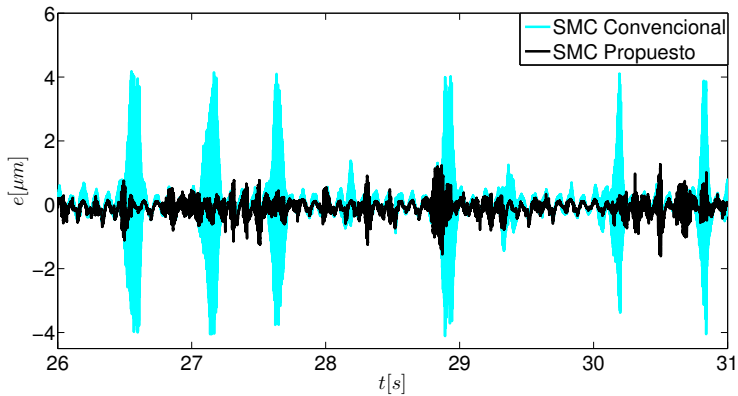


Figura 5.13: Señal de error para la prueba con estado de histéresis inicial desconocido.

se consideró una masa de 85 g en la plataforma móvil del sistema sin modificar los parámetros de ambos controladores, donde este valor de carga resulta significativo respecto a la masa de la plataforma móvil estimada en 163 g (aproximadamente 50 % de este valor). Los resultados para esta prueba, llamada Prueba de Carga Desconocida (PCD), se muestran en la Figura 5.14, obteniendo los índices de desempeño mostrados en la tercera fila de la Tabla 5.1. Como puede observarse de la Figura 5.14, la ley de control propuesta presenta una mejor robustez que el algoritmo de control convencional al considerar la variación de la masa a ser desplazada, garantizando un error de seguimiento de trayectoria submicrométrico en la prueba realizada.

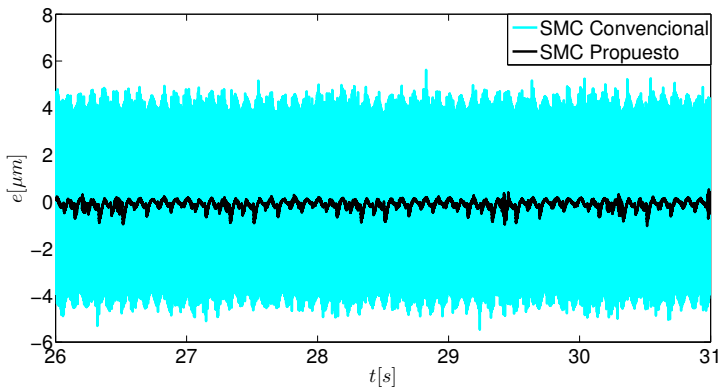


Figura 5.14: Señal error para prueba de carga desconocida.

Ref.	Valor del error				Error de comparación	
	$e_{rms} [\mu m]$		$e_{max} [\mu m]$		$\delta_{rms} [\%]$	$\delta_{max} [\%]$
	Prop.	Conv.	Prop.	Conv.		
PN	0.23	0.23	0.89	0.70	0	27
PEHD	0.28	0.72	1.61	4.17	61	62
PCD	0.23	2.96	1.05	5.62	92	82

Tabla 5.1: Índices de desempeño de errores de seguimiento para ambos algoritmos SMC.

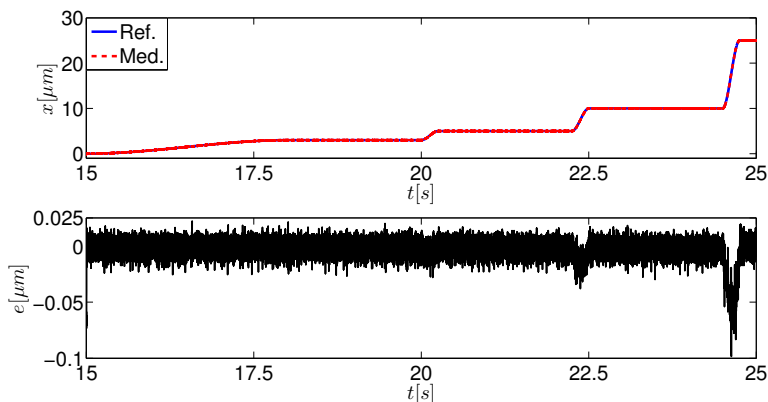


Figura 5.15: Resultados experimentales para el problema de control de regulación de la posición.

Desempeño del sistema controlado al considerar el problema de posicionamiento cuasiestático y de regulación

Para evaluar el desempeño de la ley de control propuesta al considerar el problema de regulación, se estableció una señal de posición escalonada con aceleración limitada, con valor constante de $0 \mu\text{m}$, $3 \mu\text{m}$, $5 \mu\text{m}$, $10 \mu\text{m}$ y $25 \mu\text{m}$. Los resultados obtenidos para esta prueba se muestran en la Figura 5.15, donde la señal de error es tal que resulta $e_{\text{rms}} = 0,008 \mu\text{m}$, con un error máximo absoluto de $e_{\text{max}} = 0,1 \mu\text{m}$. En la Figura 5.16 se muestran las variables estimadas, donde puede observarse que las mismas permanecen acotadas en el tiempo.

Un aspecto interesante de destacar durante las pruebas de regulación efectuadas se exhibe en la Figura 5.17, donde se observa que la acción de control requerida para mantener la posición del sistema en el valor deseado presenta una leve deriva temporal. Este suceso se asocia con la compensación del efecto *creep* contemplado como parte de las perturbaciones del sistema.

Comportamiento del compensador de histéresis

Para verificar que la variable encargada de compensar el fenómeno de la histéresis posee un comportamiento acorde a la dinámica en cuestión a ser contrarrestada, experimentalmente se evaluó la relación que existe entre $\hat{h}(t)$

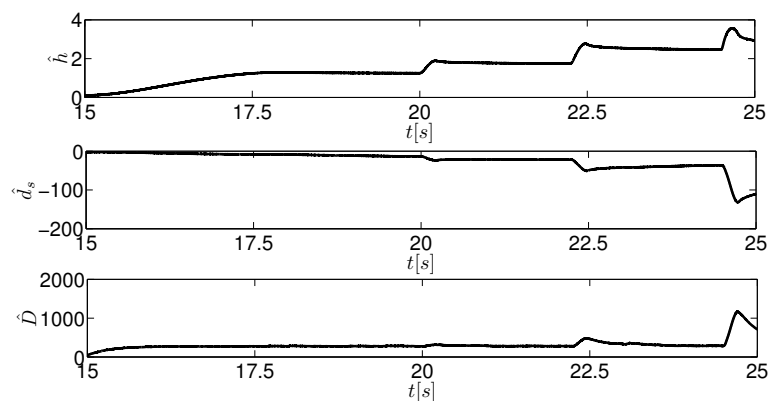


Figura 5.16: Variables estimadas obtenidas experimentalmente al considerar el caso del problema de regulación de la posición.

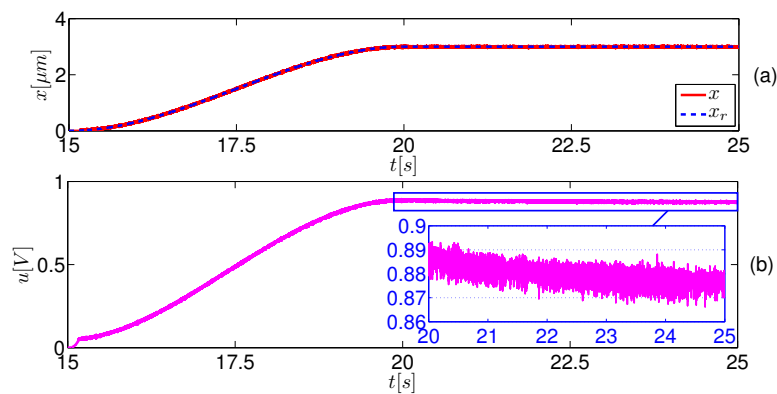


Figura 5.17: (a) Regulación de la Posición. (b) Acción de control requerida para la regulación de la posición.

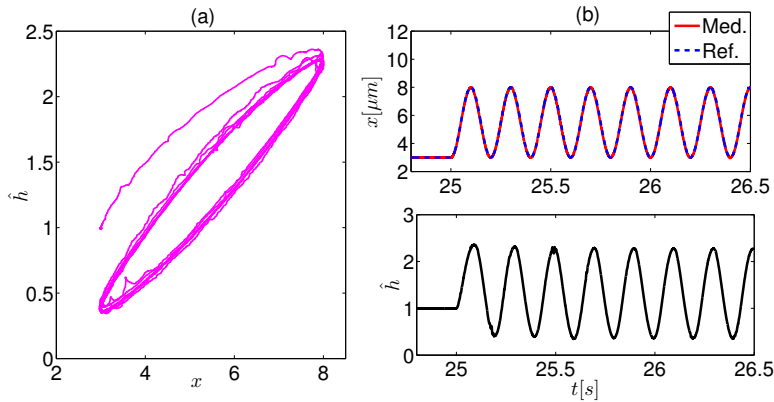


Figura 5.18: (a) Relación entre la variable de histéresis estimada y posición del sistema. (b) Evolución temporal de la variable $x(t)$ y $\hat{h}(t)$ para la señal de referencia $x_r(t)$ sinusoidal propuesta.

y la variable $x(t)$ referida a la posición del sistema, teniendo en cuenta lo indicado en la Sección B.3 del Apéndice B respecto a la morfología esperada en la gráfica establecida entre estas dos variables. En la Figura 5.18 se muestra el comportamiento de la variable $x(t)$ en función de $\hat{h}(t)$ al considerar una señal de referencia sinusoidal de $5 \mu\text{m}_{pp}$ de amplitud y frecuencia de 5 Hz. La morfología que presenta dicha relación, expuesta en la Figura 5.18, sugiere que la variable encargada de compensar el fenómeno de histéresis consigue representar de manera apropiada este fenómeno no lineal para el cual se la ha considerado en la ley de control propuesta en este trabajo.

5.8. Conclusiones

En este Capítulo se ha presentado un algoritmo de control por modo deslizante adaptativo con compensación del fenómeno no medible de la histéresis para ser aplicado en sistemas de nanoposicionamiento accionados por piezoeléctricos. El controlador diseñado dispone de un estimador de perturbaciones, el cual no requiere de un límite superior de la perturbación generales del sistema. El algoritmo de control se ha formulado para aplicaciones en tiempo real, donde se ha especificado una función de conmutación continua

tipo saturación en el término robusto de la ley de control para evitar el fenómeno del *chattering*.

En comparación con los trabajos utilizados como referencia para el diseño de la ley de control establecida, el algoritmo aquí presentado garantiza mantener las variables estimadas acotadas en el tiempo sin requerir un límite superior de las cantidades estimadas cuando se utiliza una función de conmutación continua en el término robusto. La estabilidad global del sistema se ha demostrado utilizando el criterio de Lyapunov, estableciendo un límite superior para el error de posición en estado estacionario, a partir del cual se pone de manifiesto la influencia de los parámetros del controlador en este valor.

De las pruebas llevadas a cabo tanto en simulación como experimentales, se pudo constatar que la ley de control propuesta puede propiciar un error cuadrático medio de posicionamiento submicrométrico al considerar tanto el problema de seguimiento de trayectoria con señal de referencia multifrecuencial, como de regulación de la posición. De las pruebas realizadas, se concluye que el controlador propuesto garantiza una mayor robustez en comparación con el algoritmo SMC convencional extraído de la literatura al considerar incertidumbres en aplicaciones de tiempo real, garantizando una medida del error cuadrático medio por debajo del micrómetro en todos los casos analizados.

Modelo de sistema dual para posicionamiento

6.1. Introducción

En este Capítulo se expone la configuración y el modelo de los sistemas duales de posicionamiento considerado en esta tesis. Posteriormente, el modelo aquí desarrollado es utilizado en el Capítulo 7 en el diseño del controlador propuesto en esta tesis para comandar a este tipo de sistemas.

En una primera instancia, en la Sección 6.2 se presenta la configuración de accionamiento dual contemplada en esta tesis. Seguidamente, en la Sección 6.3 se detalla el modelo de cada uno de los subsistemas de actuación, grueso y fino, respectivamente, considerados como etapas de accionamiento de un sistema dual de movimiento. Posteriormente, en la Sección 6.4 se exhiben las consideraciones adoptadas para facilitar el modelo de sistema, referidas al fenómeno de interferencia y acoplamiento mecánico entre ambos subsistemas de actuación. En la Sección 6.5 se presenta el modelo de sistema dual considerado para el diseño del controlador propuesto en esta tesis. En la Sección 6.6 se expone la identificación de los parámetros del modelo aquí presentado para el sistema experimental descrito en el Capítulo 3. Finalmente, en la Sección 6.7 se presentan las conclusiones de este Capítulo.

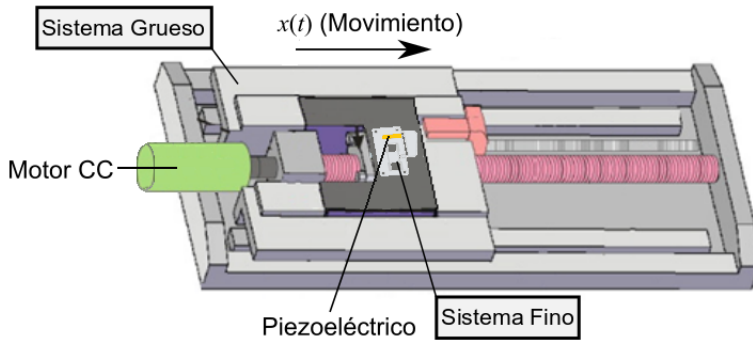


Figura 6.1: Representación de sistema dual de actuación para posicionamientos de ultraprecisión tipo tándem considerado en esta tesis.

6.2. Configuración de sistema dual de posicionamiento considerado en esta tesis

Los sistemas duales para posicionamiento de ultraprecisión considerados en esta tesis, disponen de una configuración de accionamiento como la que se muestra en la Figura 6.1. En esencia, el sistema dual de posicionamiento ilustrado en la Figura 6.1 consta de dos subsistemas de actuación: uno tradicional, denominado grueso, el cual permite efectuar grandes exploraciones; y uno actuado mediante piezoeléctrico, denominado fino, el cual posee la capacidad de efectuar pequeños movimientos con una resolución submicrométrica. Como etapa gruesa de movimiento, en esta tesis se considera el caso en el que se utiliza un sistema de tornillo sin fin y bolas recirculantes accionado por un motor de corriente continua, tal y como se ilustra en la Figura 6.1.

Como se puede apreciar de la Figura 6.1, sobre el sistema grueso se dispone la etapa fina de movimiento, haciendo que ambos subsistemas de actuación permitan efectuar desplazamientos sobre un mismo eje de accionamiento. El punto de interés del sistema se considera ubicado sobre la etapa fina, la cual puede ser desplazada por el accionamiento de cualquiera de las dos etapas de movimiento, fina o gruesa, respectivamente.

6.3. Modelo de la etapa gruesa y fina de posicionamiento

En esta Sección, se detalla el modelo considerado para la etapa gruesa y fina de movimiento del sistema dual de posicionamiento considerado en esta tesis.

6.3.1. Modelo de etapa gruesa de movimiento

Para el accionamiento de la etapa gruesa de movimiento, en esta tesis se considera el caso en el que la configuración de accionamiento es tal que, el controlador del motor, permite establecer una corriente proporcional a la señal de entrada referida a torque. Sin pérdida de generalidad respecto al comportamiento dinámico de este tipo de sistemas, se asumirá que el ancho de banda de la dinámica del lazo de corriente del servomotor resulta mucho mayor que el rango de frecuencia de interés del sistema mecánico. Por lo tanto, en lo que sigue, se desprecia la dinámica eléctrica de esta etapa de accionamiento y como entrada se considera el par motor aplicado sobre la parte mecánica del sistema. Luego, teniendo en cuenta un modelo de baja frecuencia que incluye la fricción viscosa, la dinámica rotacional del sistema grueso se puede expresar como

$$J_c \ddot{\theta}(t) + C_\theta \dot{\theta}(t) = T_m(t) - T_r(t), \quad (6.1)$$

donde J_c representa la inercia combinada del motor, el tornillo y el acoplamiento, $\theta(t)$ es la coordenada angular, C_θ es el coeficiente de fricción viscosa rotacional, $T_m(t)$ es el par del motor y $T_r(t)$ contempla el par de reacción aplicado por el carro a ser desplazado. De manera similar, el movimiento lineal del sistema grueso se puede contemplar mediante la expresión

$$M \ddot{x}_1(t) = F_r(t) - F_f(t) + F_{p_c}(t), \quad (6.2)$$

donde M es la masa del carro, $F_r(t)$ es la reacción al par resistente aplicado por el carro al tornillo, $F_f(t)$ es la fuerza de fricción, $F_{p_c}(t)$ es la fuerza perturbadora y $x_1(t)$ es la coordenada de posición lineal. Las ecuaciones que describen la dinámica rotacional y lineal se acoplan mediante la interfaz tornillo-tuerca considerando que $T_r(t) = \rho_r F_r(t)$, donde ρ_r es el paso del tornillo tal que $x_1(t) = \rho_r \theta(t)$ para todo $t \geq 0$. En lo que sigue, se considerará $F_f(t) = F_{f_s}(t) + F_{f_v}(t)$, donde $F_{f_s}(t)$ contempla la transición entre el estado estático y dinámico de la fricción (efecto Stribeck), mientras que $F_{f_v}(t)$ representa la

fricción viscosa tal que $F_{fv}(t) = C_x \dot{x}_1(t)$, siendo C_x el coeficiente viscoso lineal. Luego, combinando las ecuaciones (6.1) y (6.2) se obtiene

$$\left(\frac{J_c + \rho_r^2 M}{\rho_r^2} \right) \ddot{x}_1(t) + \left(\frac{C_\theta + \rho_r^2 C_x}{\rho_r^2} \right) \dot{x}_1(t) = \frac{1}{\rho_r} T_m(t) - F_{fs}(t) + F_{pc}(t). \quad (6.3)$$

Como se ha mencionado al principio de esta Sección, se considerará que la señal de torque $T_m(t)$ es generada a partir de una señal de voltaje $u_1(t)$ desde el sistema de comando del motor, tal que $T_m(t) = K_c u_1(t)$, donde K_c representa una ganancia de conversión entre ambas magnitudes involucradas. Luego, llamando $J_e = J_c + \rho_r^2 M$ y $C_e = C_\theta + \rho_r^2 C_x$, la ecuación (6.3) puede expresarse como

$$\frac{J_e}{\rho_r^2} \ddot{x}_1(t) + \frac{C_e}{\rho_r^2} \dot{x}_1(t) = \frac{K_c}{\rho_r} u_1(t) - F_{fs}(t) + F_{pc}(t). \quad (6.4)$$

Luego, llamando $m_1 = J_e/\rho_r^2$ y $c_1 = C_e/\rho_r^2$, la ecuación (6.4) resulta

$$m_1 \ddot{x}_1(t) + c_1 \dot{x}_1(t) = \frac{K_c}{\rho_r} u_1(t) - F_{fs}(t) + F_{pc}(t). \quad (6.5)$$

6.3.2. Modelo de Etapa fina de movimiento

Para contemplar la dinámica de la etapa fina de movimiento, se ha tenido en cuenta el modelo expresado en las ecuaciones (4.15) y (4.16), presentado en el Capítulo 4. Notar que, en la ecuación (4.15) se ha considerado $\omega_n^2 = k_{fs}/m$ y $\zeta = c_f/(2\sqrt{mk_{fs}})$, donde m , c_f y k_{fs} expresan la masa total a ser desplazada, el coeficiente de fricción viscosa y la rigidez equivalente del posicionador en la dirección de actuación del piezoeléctrico, respectivamente (ver Sección 4.3). Luego de efectuar algunas operaciones algebraicas en la ecuación (4.15), el modelo dinámico de un sistema de nanoposicionamiento accionado por piezoeléctrico se puede expresar como

$$m\ddot{x}_2(t) + c_f\dot{x}_2(t) + k_{fs}x_2(t) = k_{fs}K_u u_2(t) - k_{fs}h(t) + md(t), \quad (6.6)$$

donde K_u es la constante que relaciona posición y tensión eléctrica aplicada en bornes del piezoeléctrico (ver Sección 4.3), $x_2(t)$ la posición del sistema, $u_2(t)$ el voltaje aplicado, $h(t)$ el término asociado con el fenómeno de la histéresis, y $d(t)$ el término de perturbaciones del sistema (considerado originalmente en la descripción normalizada en términos másicos). Este último término contempla

dinámicas de mayor orden no contempladas en el modelo, errores de modelado y eventuales esfuerzos externos que puedan incidir sobre el sistema. Con el propósito de unificar la notación respecto a subíndices, en lo que sigue se estará considerando como $m_2 = m$, $c_2 = c_f$, $k_2 = k_{fs}$, $K_2 = K_u$ y $p_2(t) = md(t)$, pudiéndose expresar la ecuación (6.6) como

$$m_2 \ddot{x}_2(t) + c_2 \dot{x}_2(t) + k_2 x_2(t) = k_2 K_2 u_2(t) - k_2 h(t) + p_2(t) \quad (6.7)$$

6.4. Análisis del acoplamiento mecánico e interferencia

Atendiendo a la configuración de accionamiento mostrada en la Figura 6.1, al producirse el accionamiento de la etapa fina de movimiento, por el principio de acción y reacción, sobre la etapa gruesa de movimiento aparece una fuerza igual y en sentido opuesta a la que produce el movimiento de la fina. Por su parte, debido al accionamiento de la etapa gruesa de movimiento, resulta razonable pensar en la aparición de fuerzas inerciales sobre el sistema no inercial constituido por la etapa fina de movimiento. Estos efectos indeseados establecidos a partir del accionamiento de cada etapa de actuación y que afectan a la posición relativa entre ambos subsistemas, en estos dispositivos se conoce comúnmente como fenómeno de interferencia. Resulta claro que, cuanto menor sea el efecto de interferencia, mejor desempeño presentará el sistema dual de accionamiento en lo que respecta a la sensibilidad de una etapa de actuación respecto al accionamiento de la otra. En lo que sigue, se exponen las condiciones bajo las cuales es posible despreciar el fenómeno de interferencia entre ambos subsistemas de actuación.

Para el análisis que se presenta a continuación, se tiene en cuenta las ecuaciones (6.5) y (6.7) bajo el esquema simplificado que se muestra en la Figura 6.2. En el sistema mostrado en la Figura 6.2, m_1 representa la masa equivalente de la etapa gruesa y del sistema de acoplamiento de la etapa fina que sirve como base para su accionamiento, mientras que m_2 contempla la masa a ser desplazada por la etapa fina, constituida por la plataforma objetivo de este subsistema de actuación, una fracción de los elementos que sirven de guía de la plataforma móvil y el sistema de amplificación propio de este sistema. Por su parte, c_1 expresa la fricción viscosa del sistema grueso, mientras que k_2 y c_2 representan la rigidez y la fricción viscosa de la etapa fina en la dirección de movimiento. Las variables $x_1(t)$ y $x_2(t)$ de la Figura 6.2 contemplan los desplazamientos de cada subsistema de actuación, grueso y fino, respectivamente, respecto a un

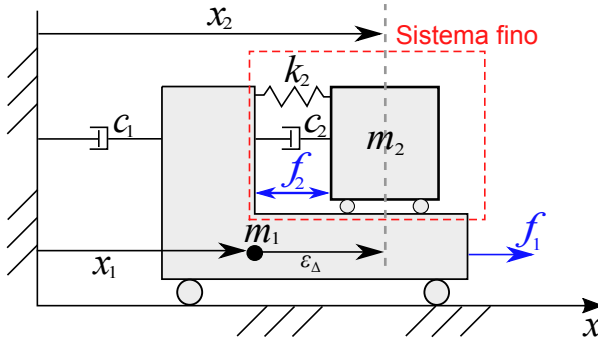


Figura 6.2: Modelo dinámico simplificado de sistema dual de posicionamiento.

marco de referencia inercial. En este punto, resulta oportuno señalar que, las deformaciones elásticas del tornillo impulsor del movimiento se considerarán despreciables. Esta suposición resulta válida al contemplar bajas aceleraciones de este subsistema de actuación. Luego, a partir de $f_1(t)$ se contempla la fuerza que ocasiona el motor en la etapa gruesa de movimiento. En este análisis de interferencia, los esfuerzos externos y los efectos no lineales de la fricción, no son tenidos en cuenta, siendo contemplados como parte de las perturbaciones más adelante en este trabajo. Por su parte, la variable $f_2(t)$ señalada en la Figura 6.2 representa la fuerza que ejerce el piezoeléctrico sobre la plataforma móvil del sistema fino, despreciándose el término de perturbaciones de la ecuación (6.7) para este caso de análisis. Bajo esta descripción y teniendo en cuenta la Figura 6.2, es posible expresar

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1(t) = f_1(t) - f_2(t) - k_2 (x_1(t) - x_2(t)) - c_2 (\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t)) - c_1 \dot{x}_1(t) \\ m_2 \ddot{x}_2(t) = f_2(t) + k_2 (x_1(t) - x_2(t)) + c_2 (\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t)), \end{cases} \quad (6.8)$$

Para analizar el acoplamiento dinámico o interferencia entre los subsistemas de movimiento, se considera la variable de estado auxiliar

$$\bar{x}(t) \triangleq \frac{m_1 x_1(t) + m_2 x_2(t)}{m_1 + m_2}, \quad (6.9)$$

la cual caracteriza la posición del centro de masa establecido a partir de la posición de cada subsistema de actuación. Luego, teniendo en cuenta las

expresiones dinámicas establecidas en la ecuación (6.8), se deduce que

$$\ddot{x}(t) = \frac{m_1 \ddot{x}_1(t) + m_2 \ddot{x}_2(t)}{m_1 + m_2} = \frac{f_1(t) - c_1 \dot{x}_1(t)}{m_1 + m_2}. \quad (6.10)$$

Ahora, si se verifica la condición $m_1 \gg m_2$ (masa de la etapa gruesa mucho mayor que la masa de la etapa fina), resulta

$$\ddot{x}(t) = \frac{f_1(t) - c_1 x_1(t)}{m_1 \left(1 + \underbrace{\frac{m_2}{m_1}}_{\approx 0} \right)} \approx \frac{f_1(t) - c_1 x_1(t)}{m_1}, \quad (6.11)$$

evidenciándose de esta manera que, la aceleración del centro de masa resulta principalmente afectada por la incidencia de la fuerza $f_1(t)$. Ahora, al considerar $\varepsilon_\Delta(t) = x_2(t) - x_1(t)$ (ver Figura 6.2), siendo $\varepsilon_\Delta(t)$ la posición relativa de un subsistema respecto al otro (valor muy pequeño -micrómetros- para el tipo de sistema fino considerado), y teniendo en cuenta la relación establecida entre las masas m_1 y m_2 , de la ecuación (6.9) se deduce que

$$\bar{x}(t) = \frac{m_1 x_1(t) + m_2 (x_1(t) + \varepsilon_\Delta(t))}{m_1 + m_2} = \frac{\left(1 + \underbrace{\frac{m_2}{m_1}}_{\approx 0} \right) x_1(t) + \underbrace{\frac{m_2}{m_1}}_{\approx 0} \varepsilon_\Delta(t)}{1 + \underbrace{\frac{m_2}{m_1}}_{\approx 0}} \approx x_1(t). \quad (6.12)$$

Luego, teniendo en cuenta las ecuaciones (6.11) y (6.12), se deduce que

$$\ddot{x}_1(t) \approx \frac{f_1(t)}{m_1} - \frac{c_1 x_1(t)}{m_1}. \quad (6.13)$$

Con lo cual, a partir de la ecuación (6.13) se deduce que la aceleración del sistema grueso, bajo el supuesto considerado de que $m_1 \gg m_2$ y que $\varepsilon_\Delta(t)$ resulta una cantidad muy pequeña, no es afectada por el accionamiento del sistema fino.

Ahora, al considerar la segunda ecuación de (6.8) y la definición dada sobre la variable auxiliar $\varepsilon_\Delta(t)$ referida a la posición relativa entre ambos subsistemas

de actuación, se consigue expresar

$$m_2 \ddot{\varepsilon}_\Delta(t) + c_2 \dot{\varepsilon}_\Delta(t) + k_2 \varepsilon_\Delta(t) = f_2(t) - m_2 \ddot{x}_1(t), \quad (6.14)$$

lo cual implica que, desde un marco de referencia no inercial solidario con el sistema fino de movimiento, se evidencia la fuerza inercial $f^*(t) = m_2 \ddot{x}_1(t)$ actuante sobre el mismo. Luego, al multiplicar en ambos miembros de la ecuación (6.14) por $1/k_2$, se consigue expresar

$$\frac{1}{\omega_n^2} \ddot{\varepsilon}_\Delta(t) + \frac{2\zeta}{\omega_n} \dot{\varepsilon}_\Delta(t) + \varepsilon_\Delta(t) = \frac{f_2(t)}{k_2} - \frac{1}{\omega_n^2} \ddot{x}_1(t), \quad (6.15)$$

donde $\omega_n = \sqrt{k_2/m_2}$ y $\zeta = c_2/(2\sqrt{m_2 k_2})$. En este punto, se vuelve a mencionar que, en términos generales, el sistema considerado como etapa gruesa de movimiento no puede efectuar elevadas aceleraciones durante su accionamiento. Por su parte, para aprovechar la capacidad de respuesta en frecuencia de los piezoeléctricos, los sistemas finos se diseñan para tener un elevado ancho de banda en comparación con los sistemas tradicionales. Teniendo en cuenta estas consideraciones, en la ecuación dinámica (6.15) es posible despreciar el término $\ddot{x}_1(t)/\omega_n^2$. Con lo cual, de la ecuación (6.15) se deduce que

$$\frac{1}{\omega_n^2} \ddot{\varepsilon}_\Delta(t) + \frac{2\zeta}{\omega_n} \dot{\varepsilon}_\Delta(t) + \varepsilon_\Delta(t) \approx \frac{f_2(t)}{k_2}, \quad (6.16)$$

pudiéndose concluir que la dinámica del sistema fino, analizada desde un marco de referencia no inercial y bajo los supuestos previamente señalados, no resulta afectada por el accionamiento del sistema grueso.

Luego, bajo el supuesto de que el sistema grueso de movimiento no genera grandes aceleraciones durante su accionamiento, el ancho de banda ω_n de la etapa fina posee un valor elevado, los desplazamientos relativos entre ambos subsistemas resultan muy pequeños y que se verifica la condición $m_1 \gg m_2$, es posible contemplar a ambas etapas de movimiento en forma desacoplada y sin interferencia mecánica entre ellas. Esto permite considerar a cada etapa de movimiento de forma independiente, una de la otra, durante el accionamiento de las mismas. Estos supuestos son cuestiones que se verifican en la práctica en los sistemas de ultraprecisión que se abordan en esta tesis, y son cuestiones que se tienen en cuenta durante la fase de diseño de estos sistemas [Xu, 2012]. En particular, para el sistema experimental detallado en el Capítulo 3, se hace saber que el ancho de banda del sistema fino resulta aproximadamente de 500 Hz

(ver Figura 4.7 del Capítulo 4), siendo el ancho de banda del sistema grueso en vacío (sin carga) aproximadamente de 160 Hz [Casquero et al., 2010], en donde la masa de la etapa gruesa resulta aproximadamente 1000 veces la de la etapa fina.

6.5. Modelo de los sistemas duales de posicionamiento para propósitos de control

Para el modelo dinámico de los sistemas duales de posicionamiento tratados en esta tesis, considérese como $q_1(t) = x_1(t)$ a la posición de la etapa gruesa respecto a un sistema de referencia inercial (ver Figura 6.2), y $q_2(t) = \varepsilon_{\Delta}(t) = x_2(t) - x_1(t)$ a la posición del sistema fino respecto al grueso (ver Figura 6.2). Luego, teniendo en cuenta las ecuaciones (6.4) y (6.7), y los supuestos considerados en la Sección 6.4 que permiten despreciar los efectos de interferencia mecánica entre ambos subsistemas de actuación, la dinámica general de los sistemas duales de posicionamiento considerados en esta tesis se expresa como

$$\begin{bmatrix} \frac{J_e}{\rho_r^2} & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{C_e}{\rho_r^2} & 0 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{K_e}{\rho_r} & 0 \\ 0 & k_2 K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ h(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -F_{fs}(t) + F_{pc}(t) \\ p_2(t) \end{bmatrix}. \quad (6.17)$$

Notar que, los supuestos considerados en la Sección 6.4 se contemplan en la ecuación (6.17) por medio de cantidades nulas en los elementos de la diagonal secundaria de las matrices cuadradas involucradas. Luego, llamando $\mathbf{M} = \text{Diag} \left\{ \frac{J_e}{\rho_r^2}, m_2 \right\}$, $\mathbf{C} = \text{Diag} \left\{ \frac{C_e}{\rho_r^2}, c_2 \right\}$, $\mathbf{K} = \text{Diag} \{0, k_2\}$, $\mathbf{B} = \text{Diag} \left\{ \frac{K_e}{\rho_r}, k_2 K_2 \right\}$, $\mathbf{G}_{nl} = \text{Diag} \{0, k_2\}$, $\mathbf{q}(t) = [q_1(t) \ q_2(t)]^T$, $\mathbf{u}(t) = [u_1(t) \ u_2(t)]^T$, $\mathbf{p}_{nl}(t) = [0 \ h(t)]^T$ y $\mathbf{p}(t) = [-F_{fs}(t) + F_{pc}(t) \ p_2(t)]^T$, la ecuación (6.17) puede escribirse como

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{B}\mathbf{u}(t) - \mathbf{G}_{nl}\mathbf{p}_{nl}(t) + \mathbf{p}(t), \quad (6.18)$$

donde la coordenada operativa del sistema $x(t)$ (posición del punto de interés) se relaciona con las coordenadas articulares $\mathbf{q}(t)$ mediante la función $x(t) =$

$q_1(t) + q_2(t)$, tal que

$$\dot{x}(t) = \dot{q}_1(t) + \dot{q}_2(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1(t) \\ \dot{q}_2(t) \end{bmatrix} = \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}}(t), \quad (6.19)$$

siendo $\mathbf{J} = \frac{\partial x}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$ la matriz Jacobiana de la cinemática del sistema y $\dot{\mathbf{q}}(t) = \frac{d\mathbf{q}(t)}{dt}$ las velocidades de las variables articulares. Se hace notar que, la estructura vecto-matricial de la ecuación (6.18) resulta análoga a la expuesta en la ecuación (D.1) en el Apéndice D, utilizada para representar la dinámica de manipuladores robóticos. En más detalles, lo que se ha hecho aquí es contemplar la dinámica general de los sistemas duales de manera conveniente a partir de una estructura vecto-matricial a los efectos de poder utilizar todo el potencial algebraico expuesto en el Apéndice D en lo que respecta al control de sistemas sobreactuados. Posteriormente, en el Capítulo 7 se hace uso de las bondades que ofrece esta representación de la dinámica del sistema para el desarrollo del algoritmo de control propuesto en esta tesis.

6.6. Identificación de los parámetros del modelo

En esta Sección, se presenta la identificación de los parámetros del modelo expresado en la ecuación (6.17), al considerar el sistema experimental señalado en el Capítulo 3.

6.6.1. Identificación de los parámetros del sistema grueso

Para identificar los parámetros correspondientes a la etapa gruesa de movimiento, contemplado a partir del sistema experimental descrito en la Sección 3.3, en esta tesis se ha adoptado la metodología propuesta en [Casquero et al., 2010; Erkorkmaz and Altintas, 2001]. Dado que, en el modelo de sistema considerado no se tiene en cuenta el fenómeno de la fricción en torno a la velocidad cero de movimiento, la metodología de identificación considerada requiere de una señal de excitación con amplitud tal que permita establecer movimientos en el sistema tales que la fricción pueda asumirse predominantemente de tipo viscosa. Atendiendo a esta consideración, para la identificación del modelo expresado a partir de la primer ecuación dinámica dada en la ecuación (6.17), se optó por utilizar una señal de entrada rectangular como la indicada en [Erkorkmaz and Altintas, 2001], estableciendo la señal que se exhibe

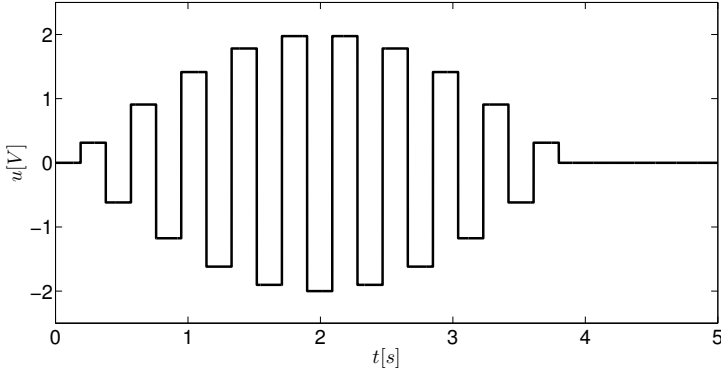


Figura 6.3: Señal de excitación utilizada para la identificación del modelo lineal de la etapa gruesa de movimiento.

en la Figura 6.3. Luego, sabiendo que en el sistema experimental considerado resulta $\rho_r = 0,01/(2\pi)$ m/rad y $K_c = 0,71$ Nm/V, a partir del algoritmo de estimación propuesto en [Casquero et al., 2010] se obtuvo $J_e = 7,1408 \cdot 10^{-4}$ kgm² y $C_e = 0,005$ Ns/m. En la Figura 6.4 se exhibe el ajuste logrado con los parámetros hallados. La discrepancia en el ajuste para los instantes de tiempo en que la señal de accionamiento posee una pequeña amplitud, se atribuye principalmente a la presencia de la fricción estática no contemplada en el modelo aquí considerado.

6.6.2. Identificación de los parámetros del sistema fino

Para identificar los parámetros del modelo dinámico de la ecuación (6.17) correspondientes a la etapa fina de movimiento contemplada a partir del sistema experimental de la Sección 3.2, se ha recurrido a los resultados obtenidos del proceso de identificación señalado en la Sección 4.5.

Por un lado, del proceso de identificación presentado en la Sección 4.5.2, para el modelo lineal de segundo orden se obtuvo $\zeta = 0,0082$ y $\omega_n = 2\pi f_n$, donde $f_n = 497$ Hz. Luego, como se ha señalado previamente en este Capítulo, los coeficientes de la segunda descripción dinámica de la ecuación (6.17) son tales que $c_2 = 2\zeta\sqrt{m_2k_2}$ y $m_2 = \frac{k_2}{\omega_n^2}$. Por su parte, en la Sección 4.2.3 se ha deducido que $k_2 = k_{fs} = k_{eq} + r^2k_a$. Luego, para el sistema experimental considerado

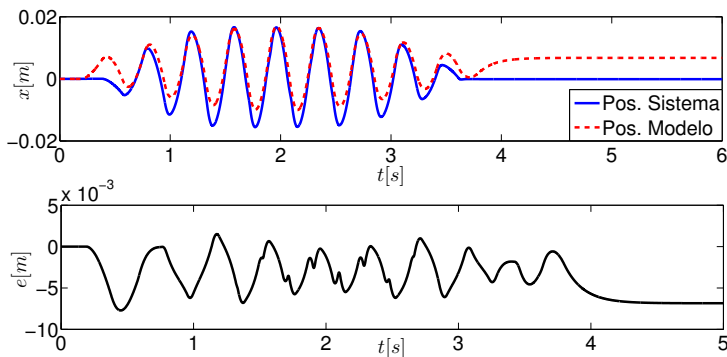


Figura 6.4: Ajuste logrado con el modelo lineal de la etapa gruesa considerado.

resulta $k_a = 26 \text{ N}/\mu\text{m}$ (ver Sección 3.2.1), $r = 10 \text{ mm}/(10 \text{ mm} + 50 \text{ mm}) = 1/6$ [Flores et al., 2018] y $k_{eq} = 0,87 \text{ N}/\mu\text{m}$ [Flores et al., 2023], quedando que $k_2 = 1,592 \text{ N}/\mu\text{m}$. Con lo cual, se tiene que $m_2 = 0,163 \text{ kg}$ y $c_2 = 8,354 \cdot 10^{-6} \text{ Ns}/\mu\text{m}$.

Por otro lado, de la Sección 4.5.1 se deduce que la ganancia que multiplica a la acción de control de la etapa fina de movimiento de la ecuación (6.17) resulta $K_2 = 4,908 \mu\text{m}/\text{V}$. Por su parte, en el modelo de sistema expresado a partir de la ecuación (6.17), se contempla el modelado de la histéresis de la etapa fina de movimiento accionada mediante piezoeléctrico. Luego, para el sistema experimental considerado en esta tesis, se tiene en cuenta el modelo de histéresis Bouc-Wen identificado en la Sección 4.5.1.

6.7. Conclusiones

En este Capítulo se ha presentado la configuración de accionamiento de los sistemas duales de posicionamiento considerado en esta tesis, y se han expuesto las consideraciones que permiten despreciar la interferencia o acoplamiento mecánico entre ambos subsistemas de movimiento. Teniendo en cuenta estas consideraciones, se ha establecido un modelo de sistema de estructura algorítmica simple desacoplada con parámetros concentrados, en donde se utiliza una descripción lineal de segundo orden para caracterizar la

dinámica de la etapa gruesa y un modelo de segundo orden con el agregado de la histéresis para representar la dinámica de la etapa fina de movimiento. Cabe señalar que, las deducciones formuladas para analizar la interferencia mecánica entre ambos subsistemas, son cuestiones que en la práctica son tenidas en cuenta durante la etapa de diseño de estos sistemas, como se expresa en el trabajo citado al final de la Sección 6.4.

Respecto al modelo de la etapa gruesa de movimiento, se concluye que el mismo permite representar el comportamiento dinámico del sistema en consideración con un error de ajuste aceptable a pesar de que no se ha tenido en cuenta una descripción detallada del fenómeno de fricción presente en este tipo de sistemas.

En el Capítulo 7, la descripción dinámica desacoplada de los sistemas duales de posicionamiento aquí desarrollada es utilizada para el diseño de la ley de control propuesta en esta tesis para comandar este tipo de sistemas.

Control de sistemas duales de posicionamiento

7.1. Introducción

Dado que los sistemas duales para posicionamiento contemplados en esta tesis presentan una redundancia en su funcionamiento, pueden existir infinitas señales de control tales que resulten solución de la posición final deseada para el punto de interés sobre el sistema. Para lograr un correcto desempeño de estos sistemas sobreactuados, es decir, movimientos de largo alcance sobre una dirección de accionamiento con una elevada resolución en todo el recorrido, el controlador del sistema debe garantizar que ambos subsistemas (grueso y fino) operen en forma solidaria y cooperada para conseguir el objetivo de control deseado. En otras palabras, el controlador debe aprovechar las bondades que cada uno de los subsistemas es capaz de ofrecer en forma separada, estableciendo una coordinación de movimientos para lograr el objetivo de control deseado sobre el punto de interés del sistema.

La principal contribución de este Capítulo radica en que se establece una ley de control robusta, diseñada bajo las técnicas de control por modos deslizantes, la cual contempla señales auxiliares de coordinación para comandar a los subsistemas de actuación que constituyen este tipo de posicionadores, en donde se incorpora de manera directa el algoritmo de compensación de la histéresis desarrollado en el [Capítulo 5](#).

Este Capítulo se continúa de la siguiente manera: En una primera instancia,

en la Sección 7.2 se expone la importancia de la coordinación en los sistemas de posicionamiento considerados en este Capítulo. Seguidamente, en la Sección 7.3 se presenta el algoritmo de control considerado en esta tesis para comandar a este tipo de sistemas. Luego, en la Sección 7.4 se presenta el análisis de estabilidad del sistema controlado a partir del algoritmo de control propuesto. En la Sección 7.5 se presenta un análisis del impacto que tienen las señales auxiliares de coordinación de la ley de control propuesta en la dinámica del sistema. En la Sección 7.6 se presentan resultados a lazo cerrado tanto de simulación como de pruebas experimentales al considerar la ley de control propuesta para comandar el sistema descrito en el Capítulo 3. Finalmente, en la Sección 7.7 se exponen las conclusiones de este Capítulo.

7.2. Importancia de la Coordinación en sistema dual de posicionamiento

Considérese el caso de un sistema dual de posicionamiento lineal de dos etapas tipo tándem actuando sobre un mismo eje de movimiento, como se muestra en la Figura 7.1. El rango de movimiento del sistema superior (etapa fina de movimiento) se considera muy pequeño (decenas de micrómetros) respecto a los desplazamientos capaces de efectuar el sistema inferior (etapa gruesa de movimiento). Luego, si las señales de control son tales que el sistema fino se encuentra operando muy próximo a uno de sus valores límites de funcionamiento, éste puede llegar a su saturación. Por lo tanto, resulta conveniente diseñar el controlador de manera tal de que obligue a este tipo de sistemas redundantes a operar de manera tal de que la posición de la etapa fina se encuentre en todo momento alrededor del punto medio de su rango de actuación para disponer de su accionamiento en ambos sentidos de actuación.

Una estrategia de control adecuada para comandar a los sistemas de posicionamiento redundantes resulta aquella que aprovecha el Espacio Nulo de la matriz Jacobiana del modelo cinemático del sistema, como se expresa en la Sección D.2.1 del Apéndice D. Por medio de estos desarrollos, es posible establecer señales de control auxiliares que modifican la estructura interna del posicionador (posición relativa entre los subsistemas de actuación), sin afectar la posición final del punto de interés sobre el sistema. Adicionalmente, la estrategia de control considerada para comandar a estos sistemas debe ser capaz de aprovechar las bondades que cada uno de los subsistemas de actuación presenta en forma independiente, la cual a su vez permita lidiar con dinámicas

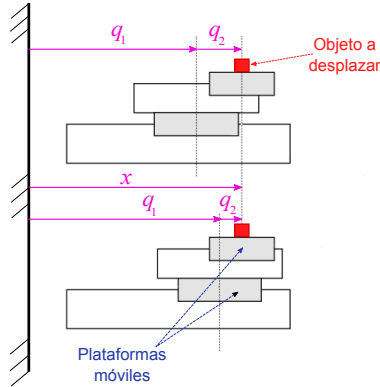


Figura 7.1: Aprovechamiento de redundancia en sistema dual de accionamiento tipo tándem, donde x representa la posición respecto del marco inercial del objetivo de interés desplazado, q_1 la posición del sistema grueso respecto al marco inercial y q_2 la posición del sistema fino respecto al grueso.

no contempladas o eventuales esfuerzos actuantes sobre el sistema, considerados como perturbaciones.

Teniendo en cuenta lo expuesto anteriormente, en la Sección 7.3 se presenta la ley de control propuesta en esta tesis, establecida a partir de un algoritmo SMC con proyector sobre Espacio Nulo para mejorar la coordinación entre ambos subsistemas de actuación y prevenir de esta manera la saturación de la etapa fina de movimiento.

7.3. Controlador Maestro-Esclavo desacoplado con proyector sobre Espacio Nulo

En el marco del control de un sistema dual de posicionamiento de dos etapas, en esta tesis se considera un esquema de control desarrollado sobre la base de una arquitectura Maestro-esclavo desacoplada (ver Sección 2.8). La Figura 7.2 exhibe de manera cualitativa el esquema de control propuesto, donde $q_1(t)$ y $q_2(t)$ representan las posiciones de las etapas gruesa y fina, respectivamente. La variable $x_r(t)$ corresponde a la señal de referencia, y $x(t) = q_1(t) + q_2(t)$ expresa la posición del punto de interés sujeta a control, localizada en la etapa fina del

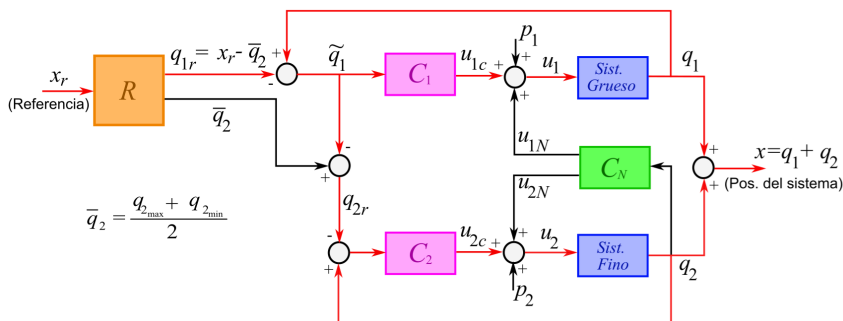


Figura 7.2: Representación esquemática del controlador Maestro-Eslavo desacoplado con Proyección Ortogonal sobre Espacio Nulo del sistema.

movimiento. Por medio de p_1 y p_2 se contemplan las perturbaciones incidentes en cada subsistema de actuación, grueso y fino, respectivamente. Resulta oportuno mencionar que, el esquema de control de la Figura 7.2 es meramente ilustrativo respecto al flujo de señales involucradas, pudiéndose requerir de otras señales como puede ser la velocidad y aceleración.

Para el desarrollo de la ley de control aquí considerada, se supondrá que se dispone con la información sensorial referida tanto a la posición de la etapa gruesa como de la etapa fina, donde la primera es medida respecto a un sistema de referencia inercial y la segunda respecto a la base de la plataforma móvil del sistema grueso de movimiento. Cabe señalar que, si la configuración sensorial es tal que se dispone únicamente de la posición de una de las etapas de actuación y de la posición final del punto de interés sobre el sistema, puede optarse por la arquitectura de control Maestro-Eslavo desacoplada establecida en [Kim and Lee, 2004; Zhu et al., 2015]. Por su parte, si sólo se dispone de la información sensorial referida a la posición del punto de interés sobre el sistema, puede apelarse a la estrategia de control con estimación de la posición de la etapa fina de movimiento señalada en [Guo et al., 2003].

El esquema de control de la Figura 7.2 dispone de dos controladores, C_1 y C_2 , encargados de comandar a la etapa gruesa y fina de movimiento, respectivamente. Teniendo en cuenta los trabajos [Kwon and Chung, 2004; Sang et al., 2000], sobre la arquitectura Maestro-Eslavo desacoplada se considera un controlador C_N encargado de coordinar a ambos subsistemas de actuación a los efectos de prevenir la saturación de la etapa fina de movimiento. Luego, sobre la arquitectura

de control resultante, en esta tesis se ha considerado el agregado del bloque R , el cual dispone de dos salidas a partir de la señal de referencia $x_r(t)$ como se muestra en la Figura 7.2, las cuales son utilizadas como referencia para los lazos de control de cada subsistemas de actuación. A diferencia de [Kwon and Chung, 2004; Sang et al., 2000], en el algoritmo de coordinación propuesto en esta tesis sólo se tiene en cuenta la variable posición de la etapa fina de movimiento, sin contemplar su velocidad como es el caso de las propuestas algorítmicas de los trabajos citados.

Para comprender la esencia del controlador de la Figura 7.2, en una primera instancia considérese la señal $\bar{q}_2 = 0$ y omítase el bloque C_N referido a las señales auxiliares de coordinación, quedando únicamente la arquitectura de control Maestro-Eslavo desacoplada señalada en color rojo. Para el esquema de control resultante, notar que cada subsistema de actuación presenta su propio lazo de control realimentado, donde la entrada de referencia $x_r(t)$ se dispone como entrada para el lazo de control de la etapa gruesa (Maestro). Luego, el error de posición de éste primer lazo de control se considera como entrada de referencia para el lazo de control de la etapa fina (Eslavo). Ahora bien, si el error de la etapa gruesa se encuentra dentro de los límites de operación de la etapa fina de movimiento, esta última se encargará de compensar el error de la etapa gruesa en cada instante de tiempo. De esta manera, el lazo de control de la etapa gruesa intenta llevar la posición del punto de interés sobre el sistema al valor de referencia deseado, mientras que el controlador de la etapa fina se encarga de compensar los errores del sistema Maestro.

Por su parte, por medio del bloque C_N se establecen las señales de control auxiliares $u_{1_N}(t)$ y $u_{2_N}(t)$ encargadas de coordinar los movimientos entre ambos subsistemas de actuación para mejorar la postura del sistema, aprovechando la redundancia funcional que presenta el posicionador. En más detalles, por medio de estas señales se busca corregir la posición relativa entre ambos subsistemas de actuación, procurando mantener en todo momento la posición de la etapa fina lo más alejada posible de sus límites operativos, previniendo de esta manera su saturación.

Finalmente, la señal $\bar{q}_2$ de la Figura 7.2, es una constante que contempla el valor medio del rango de actuación del sistema fino, tal que

$$\bar{q}_2 = \frac{q_{2_{\min}} + q_{2_{\max}}}{2}, \quad (7.1)$$

donde $q_{2_{\min}}$ y $q_{2_{\max}}$ representan el valor mínimo y máximo, respectivamente, del rango operativo de la etapa fina de movimiento. Por medio del bloque R de la

Figura 7.2, se modifica la entrada de referencia que se aplica sobre cada lazo de control de manera tal de solicitar que el actuador fino se encuentre en su punto medio de actuación cuando el error de la etapa gruesa resulta igual a cero. De esta manera, se procura que la postura del sistema de actuación, considerada como base o configuración de funcionamiento ideal (errores nulos), la posición de la etapa fina se encuentra en el punto medio de su rango de actuación.

Teniendo en cuenta las señales consideradas en el esquema de control de la Figura 7.2, al diseñar los controladores de manera tal de que $\tilde{q}_1(t) = (q_{1r}(t) - q_1(t)) \rightarrow 0$ y $\tilde{q}_2(t) = (q_{2r}(t) - q_2(t)) \rightarrow 0$ para $t \rightarrow \infty$, resulta

$$x(t) = (q_1(t) + q_2(t)) \rightarrow q_{1r}(t) + q_{2r}(t) = (x_r(t) - \bar{q}_2) + \left(\bar{q}_2 - \underbrace{\tilde{q}_1(t)}_{\rightarrow 0} \right), \quad (7.2)$$

consiguiéndose de esta manera que $x(t) \rightarrow x_r(t)$ para $t \rightarrow \infty$.

Ahora bien, sobre el sistema dual en cuestión se considerará la presencia de perturbaciones que puedan afectar la posición deseada sobre el sistema. Estas perturbaciones pueden derivar de dinámicas no contempladas o mal compensadas, variaciones en los parámetros del modelo de sistema considerado y eventuales esfuerzos externos que puedan incidir en ambos subsistemas de actuación. Atendiendo a esto, en lo que sigue se detalla el algoritmo SMC con señales auxiliares de coordinación considerado en esta tesis para el diseño de los controladores C_1 , C_2 y C_N indicados en la Figura 7.2.

7.3.1. Ley SMC propuesta con señales auxiliares de coordinación

Para el desarrollo del algoritmo de control del sistema dual de posicionamiento, se ha tenido en cuenta la ecuación dinámica establecida en la Sección 6.5, dada por

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{B}\mathbf{u}(t) - \mathbf{G}_{nl}\mathbf{p}_{nl}(t) + \mathbf{p}(t), \quad (7.3)$$

donde la variable controlada es la posición del extremo operativo del posicionador expresada como $x(t) = f(\mathbf{q}(t)) = q_1(t) + q_2(t)$. El vector $\mathbf{p}(t)$ de la ecuación (7.3) contempla dinámicas de mayor orden y fenómenos no lineales inherentes a ambos subsistemas de actuación no contemplados en el modelo de sistema, errores de modelado o incertidumbres paramétricas, eventuales fenómenos de interferencia entre ambos subsistemas de actuación (en el caso en que

no se verifica alguno de los supuestos considerados en la Sección 6.4) y esfuerzos externos que puedan incidir sobre los subsistemas de actuación. Sin pérdida de generalidad, el vector de perturbaciones de la ecuación (7.3) se considerará como $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_s + \mathbf{p}_d(t)$, es decir, como la suma de un valor constante, expresado mediante $\mathbf{p}_s = [p_{1_s} \ p_{2_s}]^T$, y de un término variante en el tiempo, representado por $\mathbf{p}_d(t) = [p_{1_d}(t) \ p_{2_d}(t)]^T$. En lo siguiente, se considerará que $|p_{i_d}(t)| \leq \Upsilon_i < \infty \ \forall t \in [0, \infty)$ y $p_{i_s} \in \mathbb{R}$ (valor finito) para $i = 1, 2$, donde Υ_i y d_{i_s} son cantidades desconocidas.

Para el diseño del algoritmo SMC propuesto en este Capítulo, se ha considerado la metodología de trabajo indicada en la Sección C.4 del Apéndice C. Para la ley de control propuesta, se define $\tilde{q}_i(t) = q_i(t) - q_{i_r}(t)$, siendo $q_{i_r}(t)$ la señal de referencia para el sistema $i = 1, 2$, tal que $q_{1_r}(t) = x_r(t) - \bar{q}_2$ y $q_{2_r}(t) = \tilde{q}_1(t) + \bar{q}_2$ (ver Figura 7.2), donde $\bar{q}_2$ expresa el valor medio del rango de actuación de la etapa fina de movimiento, definido en la ecuación (7.1). Para lo que sigue, se asumirá que la señal de referencia $x_r(t)$ tiene segunda derivada temporal continua por tramos y definida para todo instante de tiempo $t \geq 0$. Luego, a partir de estas definiciones, se considera el vector superficie de deslizamiento

$$\begin{aligned} \mathbf{s}(t) &= \begin{bmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \dot{\tilde{q}}_1(t) + \lambda_{1_p} \tilde{q}_1(t) + \lambda_{1_i} \int_0^t \tilde{q}_1(\tau) d\tau \\ \dot{\tilde{q}}_2(t) + \lambda_{2_p} \tilde{q}_2(t) + \lambda_{2_i} \int_0^t \tilde{q}_2(\tau) d\tau \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \dot{\tilde{q}}_1(t) \\ \dot{\tilde{q}}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_{1_p} & 0 \\ 0 & \lambda_{2_p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{q}_1(t) \\ \tilde{q}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_{1_i} & 0 \\ 0 & \lambda_{2_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \int_0^t \tilde{q}_1(\tau) d\tau \\ \int_0^t \tilde{q}_2(\tau) d\tau \end{bmatrix} \\ &= \dot{\tilde{\mathbf{q}}}(t) + \mathbf{\Lambda}_p \tilde{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{\Lambda}_i \mathbf{I}_{\tilde{\mathbf{q}}}(t), \end{aligned} \tag{7.4}$$

donde $\lambda_{j_p} > 0$ y $\lambda_{j_i} \geq 0$ para $j = 1, 2$, con $\mathbf{I}_{\tilde{\mathbf{q}}}(t) = \begin{bmatrix} \int_0^t \tilde{q}_1(\tau) d\tau & \int_0^t \tilde{q}_2(\tau) d\tau \end{bmatrix}^T$. Notar que, en la propuesta algorítmica de la ecuación (7.4) se ha considerado un término integrativo del error de posición para cada superficie de deslizamiento establecida, estableciéndose de esta manera una superficie Proporcional-Integral-Derivativa (PID). En más detalles, este término se introduce para el caso en el que resulte necesario mejorar la respuesta transitoria del sistema que se está controlando y disminuir el error en estado estacionario respecto al caso cuando se utiliza una superficie PD, como se señala en [Li and Xu, 2009]. Notar que, las ganancias λ_{j_p} necesariamente tienen que ser positivas para garantizar una superficie de

deslizamiento estable capaz de llevar las trayectorias del sistema a un entorno de cero para $t \rightarrow \infty$. Por su parte, si no se desea incorporar una acción integrativa en la superficie de deslizamiento, basta considerar $\lambda_{ji} = 0$ para algún $j = 1, 2$.

Respecto a la coordinación del sistema dual de posicionamiento, por lo señalado en la Sección 7.2, en esta tesis se considera la estructura algorítmica con proyección sobre el Espacio Nulo de la matriz $\mathbf{J}$ dada por la ecuación (D.2) del Apéndice D, donde $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$ (ver ecuación (6.19)). En este sentido, apelando a la inversa generalizada indicada en el Lema D.1 del Apéndice D dada por $\mathbf{J}^{T^G} = \bar{\mathbf{M}}\mathbf{J}\mathbf{M}^{-1}$, siendo $\bar{\mathbf{M}} = (\mathbf{J}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{J}^T)^{-1}$, para el sistema dual de posicionamiento modelado a partir de las ecuación (7.3) se establece la ley de control

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t) &= \{\mathbf{u}_C(t)\}_{\text{SMC}} + \{\mathbf{u}_N(t)\}_{\text{Null}} \\ &= \left\{ \mathbf{B}^{-1} \left[\mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_r(t) - \mathbf{M}\Lambda_p\dot{\tilde{\mathbf{q}}}(t) - \mathbf{M}\Lambda_i\tilde{\mathbf{q}}(t) - \mathbf{K}_p\mathbf{s}(t) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \mathbf{G}_{nl}\hat{\mathbf{p}}_{nl}(t) - \hat{\mathbf{p}}_s(t) - \hat{\Gamma}(t)\text{sat}\left(\hat{\Gamma}(t), \mathbf{s}(t)\right) \right] \right\}_{\text{SMC}} \\ &\quad + \left\{ \mathbf{B}^{-1} \left[\left(\mathbf{I} - \mathbf{J}^T\mathbf{J}^{T^G} \right) \boldsymbol{\tau}_0(t) \right] \right\}_{\text{Null}}. \end{aligned} \quad (7.5)$$

En la ecuación (7.5), el vector $\mathbf{u}_C(t) = [u_{1c}(t) \ u_{2c}(t)]^T = \{\bullet\}_{\text{SMC}}$ expresa las señales de control establecidas a partir del algoritmo SMC (ley de control robusta), siendo $u_{1c}(t)$ y $u_{2c}(t)$ las acciones de control calculadas por los bloques C_1 y C_2 , respectivamente, expresados en la Figura 7.2. Por su parte, el vector $\mathbf{u}_N(t) = [u_{1N}(t) \ u_{2N}(t)]^T = \{\bullet\}_{\text{Null}}$ está asociado a las señales de coordinación obtenidas del bloque C_N de la Figura 7.2, encargado de mejorar la posición relativa entre los subsistemas de actuación a los efectos de evitar la saturación de la etapa fina de movimiento por medio del vector $\boldsymbol{\tau}_0(t)$, el cual se define más adelante en este Capítulo. Por su parte, el vector $\hat{\mathbf{p}}_{nl}(t)$ expresa el observador del fenómeno no lineal propuesto en esta tesis, $\hat{\mathbf{p}}_s(t)$ el término dispuesto para compensar las perturbaciones cuasiestáticas del sistema y $\hat{\Gamma}(t)$ es la matriz de ganancia de los términos robustos encargados de contrarrestar las perturbaciones variantes en el tiempo. En el algoritmo de control propuesto, se establece $\mathbf{K}_p = \text{Diag}\{k_{1p}, k_{2p}\} > 0$ (matriz de ganancia definida positiva) asociadas con la velocidad de convergencia de las trayectorias del sistema a la superficie de deslizamiento [Singh and Holé, 2004], $\hat{\Gamma}(t) =$

Diag $\left\{ \hat{D}_1(t), \hat{D}_2(t) \right\}$ tal que $\begin{bmatrix} \hat{D}_1(t) & \hat{D}_2(t) \end{bmatrix}^T = \hat{\mathbf{D}}(t)$, donde

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{D}}}(t) &= \eta_d \left(\mathbf{abs}(\mathbf{s}(t)) - \sigma_d \hat{\mathbf{D}}(t) \right), \quad \text{con} \quad \eta_d = \mathbf{Diag} \{ \eta_{1_d}, \eta_{2_d} \} > 0, \\ \sigma_d &= \mathbf{Diag} \{ \sigma_{1_d}, \sigma_{2_d} \} > 0 \quad \text{y} \\ \hat{\mathbf{D}}(0) &\succeq \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \end{aligned} \quad (7.6)$$

siendo $\mathbf{abs}(\mathbf{s}(t)) = \begin{bmatrix} |s_1(t)| & |s_2(t)| \end{bmatrix}^T$;

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{p}}}_s(t) &= \eta_s (\mathbf{s}(t) - \sigma_s \hat{\mathbf{p}}_s(t)), \quad \text{con} \quad \eta_s = \mathbf{Diag} \{ \eta_{1_s}, \eta_{2_s} \} > 0 \quad \text{y} \\ \sigma_s &= \mathbf{Diag} \{ \sigma_{1_s}, \sigma_{2_s} \} > 0; \end{aligned} \quad (7.7)$$

y $\hat{\mathbf{p}}_{nl}(t) = \begin{bmatrix} 0 & \hat{h}(t) \end{bmatrix}^T$ tal que

$$\begin{aligned} \dot{\hat{h}}(t) &= \alpha \dot{q}_2(t) - \beta |\dot{q}_2(t)| \hat{h}(t) - \gamma \dot{q}_2(t) \left| \hat{h}(t) \right| + \eta_h \left(-s_2(t) - \sigma_h \hat{h}(t) \right), \\ \text{con} \quad \eta_h, \sigma_h &> 0 \quad \text{y} \quad \hat{h}(0) \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Por su parte, la función vectorial de conmutación del término robusto de la ecuación (7.5) se considera como

$$\mathbf{sat} \left(\hat{\mathbf{\Gamma}}(t), \mathbf{s}(t) \right) = \begin{bmatrix} \mathbf{sat} \left(\hat{D}_1(t), s_1(t) \right) & \mathbf{sat} \left(\hat{D}_2(t), s_2(t) \right) \end{bmatrix}^T \quad (7.9)$$

tal que

$$\mathbf{sat}(\hat{D}_j(t), s_j(t)) \triangleq \begin{cases} \mathbf{sgn}(s_j(t)), & \text{si } \hat{D}_j(t) |s_j(t)| \geq \phi_j \\ \frac{\hat{D}_j(t) s_j(t)}{\phi_j}, & \text{si } \hat{D}_j(t) |s_j(t)| < \phi_j, \end{cases} \quad (7.10)$$

con $\phi_j > 0$ para $j = 1, 2$.

Notar que, para garantizar que las estimaciones permanezcan acotadas en el tiempo, al igual que en el algoritmo de control expresado en el Capítulo 5, se ha recurrido a la utilización de términos estabilizantes de la forma $-\sigma_k(\hat{\bullet})_k$, contemplando la regla modificación- σ . En este punto, se hace notar que el

algoritmo de control expresado en la ecuación (7.5), incorpora de manera directa el algoritmo de compensación de la histéresis desarrollado en el Capítulo 5, expresado en esta ocasión a partir de la ecuación (7.8) (comparar con la ecuación (5.7)).

7.3.2. Algoritmo para $\tau_0(t)$ referido a las señales auxiliares de coordinación

Para prevenir que la etapa fina opere próxima a sus límites de funcionamiento, en esta tesis se adopta la idea algorítmica desarrollada para el área de manipuladores robóticos expresada en [Khatib, 1995]. En más detalles, en el algoritmo descrito en [Khatib, 1995] se contempla el problema de minimización del funcional de costo definido a partir de la desviación de las coordenadas articulares respecto al valor medio del rango de actuación de aquellas susceptibles de estar más alejadas de este valor. Para más detalles de la propuesta algorítmica expresada en [Khatib, 1995], puede consultarse la Sección D.2.3 del Apéndice D. Luego, teniendo en cuenta que aquí se desea cuidar la posición de la etapa fina de movimiento a los efectos de evitar su saturación, para el cómputo de la señal de coordinación de la ecuación (7.5) se define la función potencial que contempla únicamente la coordenada articular del sistema fino

$$L_N(q_2) = \frac{1}{2} (q_2 - \bar{q}_2)^2, \quad (7.11)$$

donde $\bar{q}_2$ es el valor medio del rango de actuación de la etapa fina definido en la ecuación (7.1), estableciendo el vector de coordinación

$$\tau_0(t) = -(\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}_N) \cdot \text{sat}(\nabla L_N)(t), \quad (7.12)$$

con $\mathbf{K}_N = [0 \quad k_N]^T$, siendo $k_N > 0$, y $\nabla L_N = \frac{dL_N}{dq_2}$ (gradiente del funcional L), donde

$$\text{sat}(\nabla L_N)(t) = \begin{cases} \nabla L_N, & \text{si } q_{2_{\min}} \leq q_2(t) \leq q_{2_{\max}} \\ \bar{q}_2 \cdot \text{sgn}(\nabla L_N), & \text{si } q_2(t) < q_{2_{\min}} \text{ ó } q_2(t) > q_{2_{\max}}. \end{cases} \quad (7.13)$$

Notar que, la señal de control auxiliar de la ecuación (7.12) se establece como un vector opuesto (signo menos) a la dirección del gradiente del funcional $L(q_2)$. Luego, sabiendo que ∇L_N indica la dirección en la cual el funcional $L(q_2)$ crece, la definición de $\tau_0(t)$ obliga al sistema a modificar la posición relativa entre

ambos subsistemas de manera tal que se produzca una disminución del funcional cuadrático $L_N(q_2)$, el cual resulta mínimo para $q_2 = \bar{q}_2$, es decir, cuando la posición de la etapa fina resulta igual a su valor medio del rango de actuación. En otras palabras, a partir de una función potencial dada por la ecuación (7.11), se diseña la señal auxiliar de coordinación $\tau_0(t)$ como un atractor de la posición del sistema fino de movimiento a su punto medio de actuación, estableciendo acciones de control para ambas etapas, gruesa y fina, respectivamente, por medio de $\mathbf{u}_N(t) = \mathbf{B}^{-1} \left[\left(\mathbf{I} - \mathbf{J}^T \mathbf{J}^{T^G} \right) \tau_0(t) \right]$.

En la definición del vector $\tau_0(t)$ dada en la ecuación (7.12) se dispone de la matriz $\mathbf{M}^{-1}$ para garantizar la optimización por medio de la regla del gradiente descendente al considerar el funcional $L(q_2)$ de la ecuación (7.11) en el modelo dinámico del sistema dado por la ecuación (7.3) [Nemec and Zlajpah, 2000]. Se hace notar que, el vector $\tau_0(t)$ definido a partir de la función sat(•) de la ecuación (7.13) garantiza que la señal auxiliar $\mathbf{u}_N(t)$, calculada a partir de la Proyección en el Espacio Nulo del sistema, permanezca acotada en el tiempo. En efecto, observar que

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{I} - \mathbf{J}^T \mathbf{J}^{T^G} \right) \tau_0(t) &= \begin{bmatrix} \frac{J_e/\rho_r^2}{J_e/\rho_r^2+m_2} & -\frac{J_e/\rho_r^2}{J_e/\rho_r^2+m_2} \\ -\frac{m_2}{J_e/\rho_r^2+m_2} & \frac{m_2}{J_e/\rho_r^2+m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ (-k_N/m_2) \cdot \text{sat}(q_2(t) - \bar{q}_2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \left(\frac{(J_e/\rho_r^2)k_N}{m_2(J_e/\rho_r^2+m_2)} \right) \cdot \text{sat}(q_2(t) - \bar{q}_2) \\ \left(-\frac{k_N}{J_e/\rho_r^2+m_2} \right) \cdot \text{sat}(q_2(t) - \bar{q}_2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \varphi_1 \cdot \text{sat}(q_2(t) - \bar{q}_2) \\ \varphi_2 \cdot \text{sat}(q_2(t) - \bar{q}_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{1_N}(t) \\ P_{2_N}(t) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (7.14)$$

donde $\varphi_1 = \frac{(J_e/\rho_r^2)k_N}{m_2(J_e/\rho_r^2+m_2)}$ y $\varphi_2 = -\frac{k_N}{J_e/\rho_r^2+m_2}$. Luego, resulta

$$|P_{i_N}(t)| = |\varphi_i| \cdot |\text{sat}(q_2(t) - \bar{q}_2)| \leq |\varphi_i| \bar{q}_2 = \bar{N}_i < \infty \quad (7.15)$$

para todo $t \in [0, \infty)$ y para $i = 1, 2$. Con lo cual, se deduce que

$$\begin{aligned}
 \|\mathbf{u}_N(t)\|_2 &= \left\| \mathbf{B}^{-1} \left[\left(\mathbf{I} - \mathbf{J}^T \mathbf{J}^{TG} \right) \boldsymbol{\tau}_0(t) \right] \right\|_2 \\
 &\leq \|\mathbf{B}^{-1}\|_2 \left\| \left(\mathbf{I} - \mathbf{J}^T \mathbf{J}^{TG} \right) \boldsymbol{\tau}_0(t) \right\|_2 \\
 &= (\lambda_{\max}(\mathbf{B}^{-T} \mathbf{B}^{-1}))^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^2 |P_{i_N}(t)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq (\lambda_{\max}(\mathbf{B}^{-T} \mathbf{B}^{-1}))^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^2 \bar{N}_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \forall t \in [0, \infty) \quad (\text{acotado}),
 \end{aligned} \tag{7.16}$$

donde $\lambda_{\max}(\bullet)$ expresa el máximo autovalor de la matriz considerada. Con lo cual, desde el algoritmo SMC, la señal auxiliar $\mathbf{u}_N(t)$ al igual que el término de perturbaciones $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_s + \mathbf{p}_d(t)$ resultan acotados en el tiempo.

El análisis de estabilidad del sistema a lazo cerrado, descrito por la ecuación (7.3) y comandado a partir de lalgoritmo dado por las ecuaciones (7.4)-(7.13), se detalla en la Sección 7.4.

7.4. Análisis de estabilidad a lazo cerrado

Para el análisis de estabilidad, se considera la constante $\varsigma = k_2$ (rigidez equivalente del sistema fino en la dirección de movimiento). Luego, teniendo en cuenta que $\mathbf{M} > 0$, $\boldsymbol{\eta}_s^{-1} > 0$, $\boldsymbol{\eta}_d^{-1} > 0$ y $\varsigma \boldsymbol{\eta}_h^{-1} > 0$ (matrices definidas positivas y constante positiva) se propone la función candidata de Lyapunov

$$V = \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{M} \mathbf{s} + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{p}}_s^T \boldsymbol{\eta}_s^{-1} \tilde{\mathbf{p}}_s + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{D}}^T \boldsymbol{\eta}_d^{-1} \tilde{\mathbf{D}} + \frac{\varsigma \boldsymbol{\eta}_h^{-1}}{2} \tilde{h}^2. \tag{7.17}$$

Al calcular la derivada temporal de V , de la ecuación (7.17) resulta

$$\dot{V} = \mathbf{s}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{s}} + \tilde{\mathbf{p}}_s^T \boldsymbol{\eta}_s^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{p}}}_s + \tilde{\mathbf{D}}^T \boldsymbol{\eta}_d^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{D}}} + \varsigma \boldsymbol{\eta}_h^{-1} \tilde{h} \dot{\tilde{h}}. \tag{7.18}$$

Notar que, en la ecuación (7.18) se necesita el cálculo de la derivada temporal tanto del vector superficie de deslizamiento como de los errores de estimación, las cuales se proceden a computar a continuación.

Por un lado, notar que

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}\dot{\mathbf{s}} &= \mathbf{M} \left(\ddot{\tilde{\mathbf{q}}} + \Lambda_p \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \Lambda_i \tilde{\mathbf{q}} \right) \\
 &= \mathbf{M}\ddot{\tilde{\mathbf{q}}} + \mathbf{M}\Lambda_p \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \mathbf{M}\Lambda_i \tilde{\mathbf{q}} \\
 &= \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} - \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{M}\Lambda_p \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \mathbf{M}\Lambda_i \tilde{\mathbf{q}} \\
 &= \mathbf{B}\mathbf{u} - \mathbf{G}_{nl}\mathbf{p}_{nl} + \mathbf{p}_s + \mathbf{p}_d - \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{M}\Lambda_p \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \mathbf{M}\Lambda_i \tilde{\mathbf{q}},
 \end{aligned} \tag{7.19}$$

donde al considerar la ley de control dada por la ecuación (7.5), se consigue

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}\dot{\mathbf{s}} &= -\mathbf{K}_p\mathbf{s} + \mathbf{G}_{nl}\hat{\mathbf{p}}_{nl} - \hat{\mathbf{p}}_s - \hat{\Gamma}\text{sat}(\hat{\Gamma}, \mathbf{s}) + (\mathbf{I} - \mathbf{J}^T\mathbf{J}^{TG})\boldsymbol{\tau}_0 - \mathbf{G}_{nl}\mathbf{p}_{nl} + \mathbf{p}_s + \mathbf{p}_d \\
 &= -\mathbf{K}_p\mathbf{s} + \mathbf{G}_{nl}\tilde{\mathbf{p}}_{nl} - \hat{\Gamma}\text{sat}(\hat{\Gamma}, \mathbf{s}) + (\mathbf{I} - \mathbf{J}^T\mathbf{J}^{TG})\boldsymbol{\tau}_0 + \mathbf{p}_d.
 \end{aligned} \tag{7.20}$$

Por otro lado, resulta

$$\begin{aligned}
 \dot{\hat{\mathbf{p}}}_s &= \dot{\hat{\mathbf{p}}}_s - \dot{\mathbf{p}}_s \\
 &= \dot{\hat{\mathbf{p}}}_s - \mathbf{0} \\
 &= \boldsymbol{\eta}_s(\mathbf{s} - \boldsymbol{\sigma}_s\hat{\mathbf{p}}_s) \\
 &= \boldsymbol{\eta}_s(\mathbf{s} - \boldsymbol{\sigma}_s\tilde{\mathbf{p}}_s - \boldsymbol{\sigma}_s\mathbf{p}_s)
 \end{aligned} \tag{7.21}$$

y

$$\begin{aligned}
 \dot{\hat{\mathbf{D}}} &= \dot{\hat{\mathbf{D}}} - \dot{\mathbf{D}} \\
 &= \dot{\hat{\mathbf{D}}} - \mathbf{0} \\
 &= \boldsymbol{\eta}_d(\text{abs}(\mathbf{s}) - \boldsymbol{\sigma}_d\hat{\mathbf{D}}) \\
 &= \boldsymbol{\eta}_d(\text{abs}(\mathbf{s}) - \boldsymbol{\sigma}_d\tilde{\mathbf{D}} - \boldsymbol{\sigma}_d\bar{\mathbf{D}}).
 \end{aligned} \tag{7.22}$$

Luego, teniendo en cuenta las ecuaciones (7.20)-(7.22) en la ecuación (7.18), se llega a expresar

$$\begin{aligned}
 \dot{V} &= \mathbf{s}^T \left[-\mathbf{K}_p\mathbf{s} + \mathbf{G}_{nl}\tilde{\mathbf{p}}_{nl} - \tilde{\mathbf{p}}_s - \hat{\Gamma}\text{sat}(\hat{\Gamma}, \mathbf{s}) + (\mathbf{I} - \mathbf{J}^T\mathbf{J}^{TG})\boldsymbol{\tau}_0 + \mathbf{p}_d \right] \\
 &\quad + \tilde{\mathbf{p}}_s^T(\mathbf{s} - \boldsymbol{\sigma}_s\tilde{\mathbf{p}}_s - \boldsymbol{\sigma}_s\mathbf{p}_s) + \tilde{\mathbf{D}}^T(\text{abs}(\mathbf{s}) - \boldsymbol{\sigma}_d\tilde{\mathbf{D}} - \boldsymbol{\sigma}_d\bar{\mathbf{D}}) + \varsigma\eta_h^{-1}\tilde{h}\dot{\tilde{h}} \\
 &= \mathbf{s}^T\mathbf{K}_p\mathbf{s} + \mathbf{s}^T\mathbf{G}_{nl}\tilde{\mathbf{p}}_{nl} - \mathbf{s}^T\hat{\Gamma}\text{sat}(\hat{\Gamma}, \mathbf{s}) + \mathbf{s}^T \left[(\mathbf{I} - \mathbf{J}^T\mathbf{J}^{TG})\boldsymbol{\tau}_0 + \mathbf{p}_d \right] \\
 &\quad - \tilde{\mathbf{p}}_s^T\boldsymbol{\sigma}_s\tilde{\mathbf{p}}_s - \tilde{\mathbf{p}}_s^T\boldsymbol{\sigma}_s\mathbf{p}_s + \tilde{\mathbf{D}}^T\text{abs}(\mathbf{s}) - \tilde{\mathbf{D}}^T\boldsymbol{\sigma}_d\tilde{\mathbf{D}} - \tilde{\mathbf{D}}^T\boldsymbol{\sigma}_d\bar{\mathbf{D}} + \varsigma\eta_h^{-1}\tilde{h}\dot{\tilde{h}}.
 \end{aligned} \tag{7.23}$$

Notar que

$$\begin{aligned}
 \dot{\tilde{h}} &= \dot{\hat{h}} - \dot{h} \\
 &= -\beta |\dot{q}_2| \tilde{h} - \gamma \dot{q}_2 \left(\left| \hat{h} \right| - |h| \right) + \eta_h \left(-s_2 - \sigma_h \hat{h} \right) \\
 &= -\beta |\dot{q}_2| \tilde{h} - \gamma \dot{q}_2 \left(\left| \hat{h} \right| - |h| \right) + \eta_h \left(-s_2 - \sigma_h \tilde{h} - \sigma_h h \right).
 \end{aligned} \tag{7.24}$$

Con lo cual, teniendo en cuenta la ecuación (7.24), se deduce que

$$\begin{aligned}
 \mathbf{s}^T \mathbf{G}_{nl} \tilde{\mathbf{p}}_{nl} + \frac{\varsigma}{\eta_h} \tilde{h} \dot{\tilde{h}} &= \varsigma s_2 \tilde{h} + \frac{\varsigma}{\eta_h} \tilde{h} \left[-\beta |\dot{q}_2| \tilde{h} - \gamma \dot{q}_2 \left(\left| \hat{h} \right| - |h| \right) \right. \\
 &\quad \left. + \eta_h \left(-s_2 - \sigma_h \tilde{h} - \sigma_h h \right) \right] \\
 &= \frac{\varsigma}{\eta_h} \tilde{h} \left[-\beta |\dot{q}_2| \tilde{h} - \gamma \dot{q}_2 \left(\left| \hat{h} \right| - |h| \right) \right. \\
 &\quad \left. + \eta_h \left(-\sigma_h \tilde{h} - \sigma_h h \right) \right] \quad (\text{ver Ec. (5.17) para desigualdad siguiente}) \\
 &\leq -\frac{\varsigma}{\eta_h} (\beta - |\gamma|) |\dot{q}_2| \tilde{h}^2 - \sigma_h \varsigma \tilde{h}^2 - \sigma_h \varsigma \tilde{h} h \quad (\text{nota: } |\gamma| < \beta) \\
 &\leq -\sigma_h \varsigma \tilde{h}^2 - \sigma_h \varsigma \tilde{h} h \\
 &\leq -\sigma_h \varsigma \tilde{h}^2 + \sigma_h \varsigma \left| \tilde{h} \right| |h| \quad (\text{nota: } |h(t)| \leq \bar{H} \quad \forall t \in [0, \infty)) \\
 &\leq -\sigma_h \varsigma \left| \tilde{h} \right|^2 + \sigma_h \varsigma \left| \tilde{h} \right| \bar{H}.
 \end{aligned} \tag{7.25}$$

Además, teniendo en cuenta las conclusiones mencionadas en la Sección

7.3.2 respecto a la cota superior de la señal de coordinación, resulta

$$\begin{aligned}
 \mathbf{s}^T(t) \left[\left(\mathbf{I} - \mathbf{J}^T \mathbf{J}^{T^G} \right) \boldsymbol{\tau}_0(t) + \mathbf{p}_d(t) \right] &= \sum_{i=1}^2 s_i(t) (P_{i_N}(t) + p_{i_d}(t)) \\
 &\leq \sum_{i=1}^2 |s_i(t)| |P_{i_N}(t) + p_{i_d}(t)| \\
 &\leq \sum_{i=1}^2 |s_i(t)| (|P_{i_N}(t)| + |p_{i_d}(t)|) \quad (7.26) \\
 &\leq \sum_{i=1}^2 |s_i(t)| (\bar{N}_i + \bar{Y}_i) \\
 &= \sum_{i=1}^2 |s_i(t)| \bar{D}_i \\
 &= \mathbf{abs}(\mathbf{s}(t))^T \bar{\mathbf{D}}.
 \end{aligned}$$

Luego, definiendo como $\mu_{K_p} = \chi(\mathbf{K}_p)$, $\mu_{\sigma_s} = \chi(\boldsymbol{\sigma}_s)$ y $\mu_{\sigma_d} = \chi(\boldsymbol{\sigma}_d)$, siendo $\chi(\mathbf{A}) = \sqrt{\lambda_{\min}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})}$ y $\lambda_{\min}(\bullet)$ el mínimo valor singular y el menor autovalor de la matriz $\mathbf{A}$, respectivamente, y teniendo en cuenta las desigualdades halladas en las ecuaciones (7.25) y (7.26), la ecuación (7.23) puede expresarse como

$$\begin{aligned}
 \dot{V} &\leq -\mu_{K_p} \|\mathbf{s}\|^2 - \mathbf{s}^T \hat{\mathbf{\Gamma}} \mathbf{sat}(\hat{\mathbf{\Gamma}}, \mathbf{s}) + \mathbf{abs}(\mathbf{s})^T \bar{\mathbf{D}} - \mu_{\sigma_s} \|\tilde{\mathbf{p}}_s\|^2 + \mu_{\sigma_s} \|\tilde{\mathbf{p}}_s\| \|\mathbf{p}_s\| \\
 &\quad + \mathbf{abs}(\mathbf{s})^T \tilde{\mathbf{D}} - \mu_{\sigma_d} \|\tilde{\mathbf{D}}\|^2 + \mu_{\sigma_d} \|\tilde{\mathbf{D}}\| \|\bar{\mathbf{D}}\| - \sigma_{h\zeta} \left| \tilde{h} \right|^2 + \sigma_{h\zeta} \left| \tilde{h} \right| \bar{H}. \quad (7.27)
 \end{aligned}$$

Al considerar el cuadrado de la diferencia entre las variable simbólicas $\boldsymbol{\theta}$ y $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$ dada por

$$\left(\frac{1}{\xi} \|\tilde{\boldsymbol{\theta}}\| - \xi \|\boldsymbol{\theta}\| \right)^2 = \frac{1}{\xi^2} \|\tilde{\boldsymbol{\theta}}\|^2 - 2 \|\tilde{\boldsymbol{\theta}}\| \|\boldsymbol{\theta}\| + \xi^2 \|\boldsymbol{\theta}\|^2, \quad \text{con } \xi > \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (7.28)$$

resulta

$$\|\tilde{\theta}\| \|\theta\| = \frac{1}{2\xi^2} \|\tilde{\theta}\|^2 + \frac{\xi^2}{2} \|\theta\|^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\xi} \|\tilde{\theta}\| - \xi \|\theta\| \right)^2 \leq \frac{1}{2\xi^2} \|\tilde{\theta}\|^2 + \frac{\xi^2}{2} \|\theta\|^2. \quad (7.29)$$

Con lo cual, atendiendo a la desigualdad expresada en la ecuación (7.29), la ecuación (7.27) puede escribirse como

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\mu_{K_p} \|\mathbf{s}\|^2 - \mathbf{s}^T \hat{\mathbf{\Gamma}} \mathbf{sat}(\hat{\mathbf{\Gamma}}, \mathbf{s}) + \mathbf{abs}(\mathbf{s})^T \bar{\mathbf{D}} - \mu_{\sigma_s} \|\tilde{\mathbf{p}}_s\|^2 \\ &\quad + \mu_{\sigma_s} \left(\frac{1}{2\xi_s^2} \|\tilde{\mathbf{p}}_s\|^2 + \frac{\xi_s^2}{2} \|\mathbf{p}_s\|^2 \right) + \mathbf{abs}(\mathbf{s})^T \tilde{\mathbf{D}} - \mu_{\sigma_d} \|\tilde{\mathbf{D}}\|^2 \\ &\quad + \mu_{\sigma_d} \left(\frac{1}{2\xi_d^2} \|\tilde{\mathbf{D}}\|^2 + \frac{\xi_d^2}{2} \|\bar{\mathbf{D}}\|^2 \right) - \sigma_{h\varsigma} |\tilde{h}|^2 + \sigma_{h\varsigma} \left(\frac{1}{2\xi_h^2} |\tilde{h}|^2 + \frac{\xi_h^2}{2} \bar{H}^2 \right) \\ &= -\mu_{K_p} \|\mathbf{s}\|^2 - \mathbf{s}^T \hat{\mathbf{\Gamma}} \mathbf{sat}(\hat{\mathbf{\Gamma}}, \mathbf{s}) + \mathbf{abs}(\mathbf{s})^T \bar{\mathbf{D}} + \mathbf{abs}(\mathbf{s})^T \tilde{\mathbf{D}} \\ &\quad - \mu_{\sigma_s} \left(1 - \frac{1}{2\xi_s^2} \right) \|\tilde{\mathbf{p}}_s\|^2 - \mu_{\sigma_d} \left(1 - \frac{1}{2\xi_d^2} \right) \|\tilde{\mathbf{D}}\|^2 - \sigma_{h\varsigma} \left(1 - \frac{1}{2\xi_h^2} \right) |\tilde{h}|^2 \\ &\quad + \frac{\mu_{\sigma_s} \xi_s^2}{2} \|\mathbf{p}_s\|^2 + \frac{\mu_{\sigma_d} \xi_d^2}{2} \|\bar{\mathbf{D}}\|^2 + \frac{\sigma_{h\varsigma} \xi_h^2}{2} \bar{H}^2. \end{aligned} \quad (7.30)$$

Dado que la función vectorial $\mathbf{sat}(\hat{\mathbf{\Gamma}}, \mathbf{s})$ se ha definido por partes para cada una de sus coordenadas según lo establecido en la ecuación (7.10), en lo que sigue se detalla el análisis para cada uno de los tres casos posibles de suceder, donde se considera $\Phi = \max\{\phi_1, \phi_2\}$.

Caso I donde se verifica $\hat{D}_j |s_j| \geq \phi_j$, para $j = 1, 2$: En este caso, se tiene que $\mathbf{sat}(\hat{\mathbf{\Gamma}}, \mathbf{s}) = \mathbf{sgn}(\mathbf{s}) = [\mathbf{sgn}(s_1) \ \mathbf{sgn}(s_2)]^T$, donde se verifica que $\mathbf{s}^T \hat{\mathbf{\Gamma}} \mathbf{sat}(\hat{\mathbf{\Gamma}}, \mathbf{s}) = \mathbf{abs}(\mathbf{s})^T \hat{\mathbf{D}}$. Luego, notar que

$$\begin{aligned} -\mathbf{s}^T \hat{\mathbf{\Gamma}} \mathbf{sat}(\hat{\mathbf{\Gamma}}, \mathbf{s}) + \mathbf{abs}(\mathbf{s})^T \bar{\mathbf{D}} + \mathbf{abs}(\mathbf{s})^T \tilde{\mathbf{D}} &= -\mathbf{abs}(\mathbf{s})^T \hat{\mathbf{D}} + \mathbf{abs}(\mathbf{s})^T \bar{\mathbf{D}} + \mathbf{abs}(\mathbf{s})^T \tilde{\mathbf{D}} \\ &= -\mathbf{abs}(\mathbf{s})^T \tilde{\mathbf{D}} + \mathbf{abs}(\mathbf{s})^T \tilde{\mathbf{D}} \\ &= 0, \end{aligned} \quad (7.31)$$

obteniéndose que

$$\begin{aligned}
\dot{V} \leq & -\mu_{K_p} \|\mathbf{s}\|^2 - \mu_{\sigma_s} \left(1 - \frac{1}{2\xi_s^2}\right) \|\tilde{\mathbf{p}}_s\|^2 - \mu_{\sigma_d} \left(1 - \frac{1}{2\xi_d^2}\right) \|\tilde{\mathbf{D}}\|^2 \\
& - \sigma_h \varsigma \left(1 - \frac{1}{2\xi_h^2}\right) \|\tilde{h}\|^2 + \frac{\mu_{\sigma_s} \xi_s^2}{2} \|\mathbf{p}_s\|^2 + \frac{\mu_{\sigma_d} \xi_d^2}{2} \|\bar{\mathbf{D}}\|^2 + \frac{\sigma_h \varsigma \xi_h^2}{2} \bar{H}^2
\end{aligned} \tag{7.32}$$

Caso II donde se verifica $\hat{D}_i |s_i| < \phi_i$ y $\hat{D}_j |s_j| \geq \phi_j$, con $i \neq j$: En este caso, se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathbf{abs}(\mathbf{s})^T \bar{\mathbf{D}} + \mathbf{abs}(\mathbf{s})^T \tilde{\mathbf{D}} &= (|s_1| \bar{D}_1 + |s_2| \bar{D}_2) + (|s_1| \tilde{D}_1 + |s_2| \tilde{D}_2) \\
&= |s_i| \hat{D}_i + |s_j| \hat{D}_j.
\end{aligned} \tag{7.33}$$

Además, notar que $\mathbf{s}^T \hat{\mathbf{\Gamma}} \mathbf{sat}(\hat{\mathbf{\Gamma}}, \mathbf{s}) = \frac{\hat{D}_i s_i^2}{\phi_i} + \hat{D}_j |s_j|$. Luego, para el caso aquí considerado, resulta

$$\begin{aligned}
\dot{V} \leq & -\mu_{K_p} \|\mathbf{s}\|^2 - \frac{\hat{D}_i^2 s_i^2}{\phi_i} - \hat{D}_j |s_j| + |s_i| \hat{D}_i + |s_j| \hat{D}_j - \mu_{\sigma_s} \left(1 - \frac{1}{2\xi_s^2}\right) \|\tilde{\mathbf{p}}_s\|^2 \\
& - \mu_{\sigma_d} \left(1 - \frac{1}{2\xi_d^2}\right) \|\tilde{\mathbf{D}}\|^2 - \sigma_h \left(1 - \frac{1}{2\xi_h^2}\right) \|\tilde{h}\|^2 + \frac{\mu_{\sigma_s} \xi_s^2}{2} \|\mathbf{p}_s\|^2 \\
& + \frac{\mu_{\sigma_d} \xi_d^2}{2} \|\bar{\mathbf{D}}\|^2 + \frac{\sigma_h \xi_h^2}{2} \bar{H}^2 \\
\leq & -\mu_{K_p} \|\mathbf{s}\|^2 - \frac{1}{\phi_i} \left(|s_i| \hat{D}_i - \frac{1}{2} \phi_i\right)^2 + \frac{\phi_i}{4} - \mu_{\sigma_s} \left(1 - \frac{1}{2\xi_s^2}\right) \|\tilde{\mathbf{p}}_s\|^2 \\
& - \mu_{\sigma_d} \left(1 - \frac{1}{2\xi_d^2}\right) \|\tilde{\mathbf{D}}\|^2 - \sigma_h \left(1 - \frac{1}{2\xi_h^2}\right) \|\tilde{h}\|^2 + \frac{\mu_{\sigma_s} \xi_s^2}{2} \|\mathbf{p}_s\|^2 \\
& + \frac{\mu_{\sigma_d} \xi_d^2}{2} \|\bar{\mathbf{D}}\|^2 + \frac{\sigma_h \xi_h^2}{2} \bar{H}^2,
\end{aligned} \tag{7.34}$$

donde $-\frac{1}{\phi_i} \left(|s_i| \hat{D}_i - \frac{1}{2} \phi_i\right)^2 \leq 0$ puesto que se trata del producto de dos

cantidades no negativas multiplicadas por (-1) . Con lo cual, se deduce que

$$\begin{aligned}
 \dot{V} &\leq -\mu_{K_p} \|\mathbf{s}\|^2 + \frac{\phi_i}{4} - \mu_{\sigma_s} \left(1 - \frac{1}{2\xi_s^2}\right) \|\tilde{\mathbf{p}}_s\|^2 - \mu_{\sigma_d} \left(1 - \frac{1}{2\xi_d^2}\right) \|\tilde{\mathbf{D}}\|^2 \\
 &\quad - \sigma_h \left(1 - \frac{1}{2\xi_h^2}\right) |\tilde{h}|^2 + \frac{\mu_{\sigma_s} \xi_s^2}{2} \|\mathbf{p}_s\|^2 + \frac{\mu_{\sigma_d} \xi_d^2}{2} \|\bar{\mathbf{D}}\|^2 + \frac{\sigma_h \xi_h^2}{2} \bar{H}^2 \\
 &\leq -\mu_{K_p} \|\mathbf{s}\|^2 + \frac{\Phi}{4} - \mu_{\sigma_s} \left(1 - \frac{1}{2\xi_s^2}\right) \|\tilde{\mathbf{p}}_s\|^2 - \mu_{\sigma_d} \left(1 - \frac{1}{2\xi_d^2}\right) \|\tilde{\mathbf{p}}_d\|^2 \\
 &\quad - \sigma_h \left(1 - \frac{1}{2\xi_h^2}\right) |\tilde{h}|^2 + \frac{\mu_{\sigma_s} \xi_s^2}{2} \|\mathbf{p}_s\|^2 + \frac{\mu_{\sigma_d} \xi_d^2}{2} \|\bar{\mathbf{D}}\|^2 + \frac{\sigma_h \xi_h^2}{2} \bar{H}^2 \\
 &\leq -\mu_{K_p} \|\mathbf{s}\|^2 + \frac{\Phi}{2} - \mu_{\sigma_s} \left(1 - \frac{1}{2\xi_s^2}\right) \|\tilde{\mathbf{p}}_s\|^2 - \mu_{\sigma_d} \left(1 - \frac{1}{2\xi_d^2}\right) \|\tilde{\mathbf{D}}\|^2 \\
 &\quad - \sigma_h \left(1 - \frac{1}{2\xi_h^2}\right) |\tilde{h}|^2 + \frac{\mu_{\sigma_s} \xi_s^2}{2} \|\mathbf{p}_s\|^2 + \frac{\mu_{\sigma_d} \xi_d^2}{2} \|\bar{\mathbf{D}}\|^2 + \frac{\sigma_h \xi_h^2}{2} \bar{H}^2.
 \end{aligned} \tag{7.35}$$

Caso III donde se verifica $\hat{D}_j |s_j| < \phi_j$, para $j = 1, 2$: En este caso, se tiene que $\mathbf{s}^T \hat{\Gamma} \text{sat}(\hat{\Gamma}, \mathbf{s}) = \sum_{i=1}^2 \frac{\hat{D}_i s_i^2}{\phi_i}$ y $\mathbf{abs}(\mathbf{s})^T \bar{\mathbf{D}} + \mathbf{abs}(\mathbf{s})^T \tilde{\mathbf{D}} = \sum_{i=1}^2 |s_i| \hat{D}_i$. Luego, notar que

$$\begin{aligned}
 \dot{V} &\leq -\mu_{K_p} \|\mathbf{s}\|^2 + \sum_{i=1}^2 \left(-\frac{\hat{D}_i s_i^2}{\phi_i} + |s_i| \hat{D}_i \right) - \mu_{\sigma_s} \left(1 - \frac{1}{2\xi_s^2}\right) \|\tilde{\mathbf{p}}_s\|^2 \\
 &\quad - \mu_{\sigma_d} \left(1 - \frac{1}{2\xi_d^2}\right) \|\tilde{\mathbf{D}}\|^2 - \sigma_h \left(1 - \frac{1}{2\xi_h^2}\right) |\tilde{h}|^2 + \frac{\mu_{\sigma_s} \xi_s^2}{2} \|\mathbf{p}_s\|^2 \\
 &\quad + \frac{\mu_{\sigma_d} \xi_d^2}{2} \|\bar{\mathbf{D}}\|^2 + \frac{\sigma_h \xi_h^2}{2} \bar{H}^2 \\
 &\leq -\mu_{K_p} \|\mathbf{s}\|^2 + \sum_{i=1}^2 \left[-\frac{1}{\phi_i} \left(|s_i| \hat{D}_i - \frac{1}{2} \phi_i \right)^2 + \frac{\phi_i}{4} \right] - \mu_{\sigma_s} \left(1 - \frac{1}{2\xi_s^2}\right) \|\tilde{\mathbf{p}}_s\|^2 \\
 &\quad - \mu_{\sigma_d} \left(1 - \frac{1}{2\xi_d^2}\right) \|\tilde{\mathbf{D}}\|^2 - \sigma_h \left(1 - \frac{1}{2\xi_h^2}\right) |\tilde{h}|^2 + \frac{\mu_{\sigma_s} \xi_s^2}{2} \|\mathbf{p}_s\|^2 \\
 &\quad + \frac{\mu_{\sigma_d} \xi_d^2}{2} \|\bar{\mathbf{D}}\|^2 + \frac{\sigma_h \xi_h^2}{2} \bar{H}^2,
 \end{aligned} \tag{7.36}$$

donde $\sum_{i=1}^2 \left[-\frac{1}{\phi_i} \left(|s_i| \hat{D}_i - \frac{1}{2} \phi_i \right)^2 \right] \leq 0$ por tratarse de la suma de dos términos no negativos multiplicados por (-1) . Con lo cual, se deduce que

$$\begin{aligned}
 \dot{V} &\leq -\mu_{K_p} \|\mathbf{s}\|^2 + \frac{\phi_1}{4} + \frac{\phi_2}{4} - \mu_{\sigma_s} \left(1 - \frac{1}{2\xi_s^2} \right) \|\tilde{\mathbf{p}}_s\|^2 \\
 &\quad - \mu_{\sigma_d} \left(1 - \frac{1}{2\xi_d^2} \right) \|\tilde{\mathbf{D}}\|^2 - \sigma_h \left(1 - \frac{1}{2\xi_h^2} \right) |\tilde{h}|^2 + \frac{\mu_{\sigma_s} \xi_s^2}{2} \|\mathbf{p}_s\|^2 \\
 &\quad + \frac{\mu_{\sigma_d} \xi_d^2}{2} \|\bar{\mathbf{D}}\|^2 + \frac{\sigma_h \xi_h^2}{2} \bar{H}^2 \\
 &\leq -\mu_{K_p} \|\mathbf{s}\|^2 - \mu_{\sigma_s} \left(1 - \frac{1}{2\xi_s^2} \right) \|\tilde{\mathbf{p}}_s\|^2 \quad \left(\text{nota: } \frac{\phi_1}{4} + \frac{\phi_2}{4} \leq \frac{\Phi}{2} \right) \\
 &\quad - \mu_{\sigma_d} \left(1 - \frac{1}{2\xi_d^2} \right) \|\tilde{\mathbf{D}}\|^2 - \sigma_h \left(1 - \frac{1}{2\xi_h^2} \right) |\tilde{h}|^2 + \left(\frac{\mu_{\sigma_s} \xi_s^2}{2} \|\mathbf{p}_s\|^2 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\mu_{\sigma_d} \xi_d^2}{2} \|\bar{\mathbf{D}}\|^2 + \frac{\sigma_h \xi_h^2}{2} \bar{H}^2 + \frac{\Phi}{2} \right).
 \end{aligned} \tag{7.37}$$

Luego, teniendo en cuenta todos los casos posibles (**I-III**), de los resultados obtenidos en las ecuaciones (7.32), (7.35) y (7.37) se deduce que

$$\begin{aligned}
 \dot{V} &\leq -\mu_{K_p} \|\mathbf{s}\|^2 - \mu_{\sigma_s} \left(1 - \frac{1}{2\xi_s^2} \right) \|\tilde{\mathbf{p}}_s\|^2 - \mu_{\sigma_d} \left(1 - \frac{1}{2\xi_d^2} \right) \|\tilde{\mathbf{D}}\|^2 \\
 &\quad - \sigma_h \left(1 - \frac{1}{2\xi_h^2} \right) |\tilde{h}|^2 + \left(\frac{\mu_{\sigma_s} \xi_s^2}{2} \|\mathbf{p}_s\|^2 + \frac{\mu_{\sigma_d} \xi_d^2}{2} \|\bar{\mathbf{D}}\|^2 + \frac{\sigma_h \xi_h^2}{2} \bar{H}^2 + \frac{\Phi}{2} \right).
 \end{aligned} \tag{7.38}$$

Ahora, definiendo $\beta_{V_1} = \frac{1}{2} \vartheta_M$, $\beta_{V_2} = \frac{1}{2} \vartheta_{\eta_{s-1}}$, $\beta_{V_3} = \frac{1}{2} \vartheta_{\eta_{d-1}}$ y $\beta_{V_4} = \frac{\varsigma}{2\eta_h}$, donde $\vartheta_A = \sqrt{\lambda_{\max}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})}$ representa el máximo valor singular de la matriz $\mathbf{A}$, de la ecuación (7.17) se tiene que

$$V \leq \beta_{V_1} \|\mathbf{s}\|^2 + \beta_{V_2} \|\tilde{\mathbf{p}}_s\|^2 + \beta_{V_3} \|\tilde{\mathbf{D}}\|^2 + \beta_{V_4} \tilde{h}^2 \tag{7.39}$$

Luego, llamando

$$\begin{cases} \alpha_{V_1} \triangleq \mu_{K_p} \\ \alpha_{V_2} \triangleq \mu_{\sigma_s} \left(1 - \frac{1}{2\xi_s^2}\right) \\ \alpha_{V_3} \triangleq \mu_{\sigma_d} \left(1 - \frac{1}{2\xi_d^2}\right) \\ \alpha_{V_4} \triangleq \sigma_h \varsigma \left(1 - \frac{1}{2\xi_h^2}\right), \end{cases} \quad (7.40)$$

$$\Lambda \triangleq \min \left\{ \frac{\alpha_{V_1}}{\beta_{V_1}}, \frac{\alpha_{V_2}}{\beta_{V_2}}, \frac{\alpha_{V_3}}{\beta_{V_3}}, \frac{\alpha_{V_4}}{\beta_{V_4}} \right\} \quad (7.41)$$

y

$$\delta \triangleq \frac{\mu_{\sigma_s} \xi_s^2}{2} \|\mathbf{p}_s\|^2 + \frac{\mu_{\sigma_d} \xi_d^2}{2} \|\bar{\mathbf{D}}\|^2 + \frac{\sigma_h \xi_h^2}{2} \bar{H}^2 + \frac{\Phi}{2} \quad (\text{valor finito}), \quad (7.42)$$

a partir de las ecuaciones (7.38) y (7.39) se consigue escribir

$$\dot{V}(t) \leq -\Lambda V(t) + \delta, \quad \text{con } \Lambda > 0 \quad \text{y} \quad 0 \leq \delta < \infty. \quad (7.43)$$

Al integrar la desigualdad de la ecuación (7.43) entre 0 y t , se obtiene

$$0 \leq V(t) \leq \exp(-\Lambda t) \left[V(0) - \frac{\delta}{\Lambda} \right] + \frac{\delta}{\Lambda} \triangleq B_V(t), \quad (7.44)$$

donde se cumple la condición $0 \leq V(t) \leq \max \{ V(0), \frac{\delta}{\Lambda} \} \forall t \in [0, \infty)$. Luego, definiendo como

$$\mathbf{r}(t) \triangleq \begin{bmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \\ \tilde{p}_{1_s}(t) \\ \tilde{p}_{2_s}(t) \\ \tilde{P}_{1_d}(t) \\ \tilde{P}_{2_d}(t) \\ \tilde{h}(t) \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{Q} \triangleq \begin{bmatrix} \frac{J_e/\rho_r^2}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_2}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2\eta_{1_s}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2\eta_{2_s}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2\eta_{1_d}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2\eta_{2_d}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\varsigma}{2\eta_h} \end{bmatrix}, \quad (7.45)$$

de la ecuación (7.44) resulta

$$0 \leq \lambda_{\min}(\mathbf{Q}) \|\mathbf{r}(t)\|_2^2 \leq \mathbf{r}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{r}(t) = V(t) \leq B_V(t), \quad (7.46)$$

donde $\lambda_{\min}(\mathbf{Q})$ expresa el mínimo autovalor de la matriz $\mathbf{Q}$ y $\|\mathbf{r}(t)\|_2$ la Norma Euclídea del vector $\mathbf{r}(t)$. Luego, de la desigualdad dada en la ecuación (7.46) se consigue escribir

$$\|\mathbf{r}(t)\|_2 \leq \sqrt{\frac{B_V(t)}{\lambda_{\min}(\mathbf{Q})}} \quad \forall t \in [0, \infty). \quad (7.47)$$

Dado que $B_V(t) \rightarrow \frac{\delta}{\Lambda}$ para $t \rightarrow \infty$, se tiene que $\|\mathbf{r}(t)\|_2$ resulta finalmente acotado. Por lo tanto, la ecuación (7.47) implica que $\mathbf{s}(t)$, $\tilde{\mathbf{p}}_s(t)$, $\tilde{\mathbf{D}}(t)$ y $\tilde{h}(t)$ están finalmente acotados en el tiempo. Notar que, el vector $\mathbf{s}(t)$ contiene información de la dinámica del error de posición. Con lo cual, estableciendo parámetros de diseño para sus coordenadas tales que $\lambda_{j_p} > 0$ y $\lambda_{j_i} \geq 0$, con $j = 1, 2$, resultan superficies de deslizamiento estables en el tiempo. Luego, sabiendo que $s_j \in L_\infty$ (ver Definición 2 del Apéndice A), por lo indicado en [Ioannou and Sun, 1996] para sistemas lineales estrictamente propios, se tiene que $\tilde{q}_j \in L_\infty$, lo cual asegura mantener acotada la dinámica del error en torno a cero $\forall t \in [0, \infty)$. Por su parte, notar que δ es función de los parámetros de la regla modificación- σ y de $\Phi = \max\{\phi_1, \phi_2\}$ (ver ecuación (7.42)), en donde estos resultan valores arbitrarios. Luego, de la ecuación (7.43) se deduce que s_j , con $j = 1, 2$, y los errores de estimación pueden disminuirse seleccionando σ_{j_k} y ϕ_j con valores pequeños (positivos) cercanos a cero.

7.5. Efecto de $\mathbf{u}_N(t)$ en la dinámica global del sistema

Notar que, la acción de control propuesta a partir de la ecuación (7.5) involucra la suma de dos señales de control expresadas en forma vectorial, $\mathbf{u}_C(t)$ y $\mathbf{u}_N(t)$, calculadas a partir del algoritmo de control SMC y del Proyector sobre el Espacio Nulo de $\mathbf{J}$, respectivamente. En esta Sección, se expone las cualidades que tiene el vector de señales auxiliares $\mathbf{u}_N(t) = \mathbf{B}^{-1} \left[\left(\mathbf{I} - \mathbf{J}^T \mathbf{J}^{T^G} \right) \boldsymbol{\tau}_0(t) \right]$ de la ley de control propuesta.

7.5.1. Incidencia de $\mathbf{u}_N(t)$ en la dinámica del espacio operacional del sistema

Considérese la acción de control dada por la ecuación (7.5). Luego, al multiplicar en ambos miembros de la ecuación (7.3) por $\mathbf{J}^{T^G} = \bar{\mathbf{M}}\mathbf{J}\mathbf{M}^{-1}$ y teniendo en cuenta que $\ddot{\mathbf{x}}(t) = \ddot{\mathbf{q}}_1(t) + \ddot{\mathbf{q}}_2(t) = \mathbf{J}\ddot{\mathbf{q}}(t)$, se llega a expresar

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{J}^{T^G}\mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{J}^{T^G}\mathbf{K}\mathbf{q}(t) &= \mathbf{J}^{T^G}\{\mathbf{B}\mathbf{u}(t) - \mathbf{G}_{nl}\mathbf{p}_{nl}(t) + \mathbf{p}(t)\} \\ &= \mathbf{J}^{T^G}\mathbf{B}[\mathbf{u}_C(t) + \mathbf{u}_N(t)] - \mathbf{J}^{T^G}\mathbf{G}_{nl}\mathbf{p}_{nl}(t) \\ &\quad + \mathbf{J}^{T^G}\mathbf{p}(t) \\ &= \mathbf{J}^{T^G}\mathbf{B}\mathbf{u}_C(t) + \mathbf{J}^{T^G}\mathbf{B}\mathbf{u}_N(t) - \mathbf{J}^{T^G}\mathbf{G}_{nl}\mathbf{p}_{nl}(t) \\ &\quad + \mathbf{J}^{T^G}\mathbf{p}(t). \end{aligned} \quad (7.48)$$

Al multiplicar en ambos miembros de la ecuación (7.48) por $\bar{\mathbf{M}}^{-1}$ y luego de efectuar las cancelaciones algebraicas correspondientes al considerar la definición de $\mathbf{u}_C(t)$ y $\mathbf{u}_N(t)$ de la ecuación (7.5), se obtiene

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{x}}(t) &= \bar{\mathbf{M}}^{-1}\left\{\mathbf{J}^{T^G}\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_r - \mathbf{J}^{T^G}\mathbf{M}\mathbf{A}_p\dot{\mathbf{q}}(t) - \mathbf{J}^{T^G}\mathbf{M}\mathbf{A}_i\tilde{\mathbf{q}}(t) - \mathbf{J}^{T^G}\mathbf{K}_p\mathbf{s}(t) \right. \\ &\quad + \mathbf{J}^{T^G}\mathbf{G}_{nl}\hat{\mathbf{p}}_{nl}(t) - \mathbf{J}^{T^G}\hat{\mathbf{p}}_s(t) - \mathbf{J}^{T^G}\hat{\mathbf{\Gamma}}\mathbf{sat}(\mathbf{s}, \hat{\mathbf{\Gamma}}) + \mathbf{J}^{T^G}\left[(\mathbf{I} - \mathbf{J}^T\mathbf{J}^{T^G})\boldsymbol{\tau}_0(t)\right] \\ &\quad \left. - \mathbf{J}^{T^G}\mathbf{G}_{nl}\mathbf{p}_{nl}(t) + \mathbf{J}^{T^G}\mathbf{p}(t)\right\}. \end{aligned} \quad (7.49)$$

Teniendo en cuenta que la matriz $\mathbf{J}^{T^G}$ es $\{2\}$ -inversa de $\mathbf{J}^T$ (ver Sección D.3.2 del Apéndice D), el único término que involucra a $\boldsymbol{\tau}_0(t)$ en la ecuación (7.49) resulta

$$\mathbf{J}^{T^G}\left[(\mathbf{I} - \mathbf{J}^T\mathbf{J}^{T^G})\boldsymbol{\tau}_0(t)\right] = \left(\mathbf{J}^{T^G} - \underbrace{\mathbf{J}^{T^G}\mathbf{J}^T\mathbf{J}^{T^G}}_{\mathbf{J}^{T^G}}\right)\boldsymbol{\tau}_0(t) = 0, \quad (7.50)$$

lo cual implica que el vector $\mathbf{u}_N(t)$ no modifica la aceleración del punto considerado como extremo operativo del posicionador. Para más detalles sobre este resultado teórico, se puede consultar la Sección D.2.2 del Apéndice

D. Notar que, por lo expuesto en la Sección 7.3.2, el vector $\mathbf{u}_N(t) = \mathbf{B}^{-1} \left[\left(\mathbf{I} - \mathbf{J}^T \mathbf{J}^{T^G} \right) \boldsymbol{\tau}_0(t) \right]$ resulta nulo únicamente para cuando $q_2 = \bar{q}_2$. Con lo cual, $\mathbf{u}_N(t)$ contempla acciones de control que únicamente modifican la estructura interna del posicionador bajo el criterio establecido en la definición de $\boldsymbol{\tau}_0(t)$, el cual ha sido obligar a que la etapa fina de actuación opere en todo momento lo más cercana posible a su valor medio $\bar{q}_2$ a los efectos de evitar su saturación.

7.5.2. Incidencia de $\mathbf{u}_N(t)$ en el espacio articular del sistema

Con la definición de $\boldsymbol{\tau}_0(t)$ dada en la ecuación (7.12), se tiene que (se omite la variable t)

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_N &= \left\{ \mathbf{B}^{-1} \left[\left(\mathbf{I} - \mathbf{J}^T \mathbf{J}^{T^G} \right) \boldsymbol{\tau}_0 \right] \right\}_{\text{Null}} \\ &= \left[\begin{pmatrix} \rho_r \left(\frac{J_e}{\rho_r^2} \right) k_N \\ K_c m_2 \left(\frac{J_e}{\rho_r^2} + m_2 \right) \end{pmatrix} \cdot \text{sat} (q_2 - \bar{q}_2) \quad \begin{pmatrix} -k_N \\ k_2 K_2 \left(\frac{J_e}{\rho_r^2} + m_2 \right) \end{pmatrix} \cdot \text{sat} (q_2 - \bar{q}_2) \right]^T. \end{aligned} \quad (7.51)$$

Luego, si $q_2 > \bar{q}_2$, la primer coordenada del vector $\mathbf{u}_N$ es positiva mientras que la segunda coordenada resulta negativa. Esta situación obliga a la etapa gruesa a avanzar y a la etapa fina retroceder hasta cumplirse la condición $q_2 = \bar{q}_2$. Al analizar el caso para el cual se cumple $q_2 < \bar{q}_2$, se observa que la primer coordenada del vector $\mathbf{u}_N$ resulta negativa y su segunda coordenada positiva, haciendo que el sistema grueso retroceda y el sistema fino avance hasta verificarse la condición $q_2 = \bar{q}_2$. Con lo cual, las señales auxiliar dadas por el vector $\mathbf{u}_N(t)$ son tales que coordinan los movimientos de ambas etapas en simultáneo, obligando en todo momento que q_2 (posición de la etapa fina respecto al marco de referencia no inercial) se encuentre lo más cercana posible de su valor medio $\bar{q}_2$. Cabe señalar que, como hipótesis de trabajo, se asume que la etapa gruesa de movimiento posee una resolución suficiente para ajustarse en el rango de movimiento requerido para cumplir con las exigencias de la etapa fina, lo cual se verifica experimentalmente para el sistema experimental considerado en esta tesis. Por su parte, es importante señalar que en algunas condiciones de carga, es probable que los errores de posicionamiento de la etapa gruesa resulten mayores que el rango de movimiento disponible a partir del valor medio de actuación de la etapa fina. Para estos casos, debe preverse un ajuste mayor de la ganancia k_N para

volver más agresivo al controlador y, de esta manera, prevenir esta situación dado que la señal del bloque de coordinación se encuentra operativa en todo instante de tiempo. Para todo el análisis aquí desarrollado, se asume que la etapa gruesa se encuentra muy alejada de sus límites operativos de actuación, disponiendo de la carrera suficiente en ambos sentido de movimiento para permitir el reajuste de la posición relativa entre ambas etapas.

7.5.3. Independencia de la carga para resolución de redundancia

Notar que, la señal de control $\mathbf{u}_N(t)$ de la ecuación (7.5), referida a la tarea de coordinación, se ha establecido a partir de $\mathbf{J}^{TG} = (\mathbf{J}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{J}^T)^{-1}\mathbf{J}\mathbf{M}^{-1}$, la cual involucra a la matriz de inercia del sistema $\mathbf{M} = \text{Diag}\left\{\frac{J_e}{\rho_r^2}, m_2\right\}$ (ver ecuación (6.17)) y ésta depende de la masa objetivo a ser desplazada por el sistema. En aplicaciones prácticas, la masa de la carga a ser desplazada puede llegar a ser desconocida. Luego, por el Lema D.2 del Apéndice D queda garantizada la condición de que el sistema de control propuesto permite que el sistema sea dinámicamente consistente (ver Definición 10 del Apéndice D). Esto hace que no se tenga que recalculer la inversa generalizada utilizada en el controlador, quedando asegurada la condición de que las señales auxiliares de coordinación, calculadas con parámetros originales del sistema, no producen aceleraciones en el punto operativo de interés del sistema, estando éstas únicamente asociadas con cuestiones referidas a la coordinación de movimiento entre ambos subsistemas de actuación.

7.6. Resultados

En esta Sección se exponen resultados tanto de simulación como experimentales al considerar la ley de control expuesta en la Sección 7.3 para comandar al sistema experimental detallado en el Capítulo 3.

7.6.1. Simulaciones

En simulación, se evaluó el desempeño de la ley de control propuesta al considerar la presencia de perturbaciones y dinámicas no modeladas. Para el sistema grueso, se ha considerado el fenómeno de fricción a partir del modelo

LuGre [Johanastrom and Canudas-De-Wit, 2008], considerando para el modelo dado por la ecuación (6.17) que

$$F_{fs}(t) = \sigma_{0z}z(t) + \sigma_{1z}\dot{z}(t), \quad (7.52)$$

donde $z(t)$ es la variable que representa el estado medio de deformación de los elementos de contacto tipo cerdas del modelo LuGre y σ_{0z} y σ_{1z} son parámetros que están asociados a la rigidez de las cerdas y al coeficiente de amortiguación, respectivamente. Luego, la variable interna $z(t)$ de este modelo se especifica como

$$\dot{z}(t) = \dot{q}_1(t) - \sigma_{0z} \frac{|\dot{q}_1(t)|}{g(\dot{q}_1(t))} z(t), \quad (7.53)$$

siendo $g(\dot{q}_1(t))$ la función que caracteriza el efecto de Stribeck, definida mediante la expresión

$$g(\dot{q}_1(t)) = F_c + (F_s - F_c) e^{-\left|\frac{\dot{q}_1(t)}{v_s}\right|^\epsilon}, \quad (7.54)$$

donde F_c es el parámetro de fricción Coulombiana, F_s el parámetro de fricción estática tal que $F_s > F_c$, y v_s la velocidad de Stribeck.

Para el desarrollo de las simulaciones, se ha tenido en cuenta los parámetros de fricción señalados en [Hoshino et al., 2012], donde $\sigma_{0z} = 5 \cdot 10^4$ N/m, $\sigma_{1z} = 6 \cdot 10^2$ kg/s, $F_c = 3,5$ N, $F_s = 9$ N, $v_s = 7,5 \cdot 10^{-2}$ m/s y $\epsilon = 1$. Por su parte, el término de perturbaciones de la etapa gruesa se ha establecido como

$$F_{pc}(t) = 0,45 \sin\left(3\pi t - \frac{\pi}{2}\right) + 1,8 \sin\left(8\pi t - \frac{\pi}{2}\right) + 0,9 \text{ N}, \quad (7.55)$$

y el término de perturbaciones incidente sobre la etapa fina se ha considerado igual al expuesto en la Sección 5.7.1, considerándose

$$p_2(t) = m_2 d(t) = m_2 \cdot 10^{-1} \left\{ 3,7 + 4,25 \sin\left(\pi t - \frac{\pi}{2}\right) + 2,9 \sin\left(4\pi t - \frac{\pi}{2}\right) + 10 \cdot [1 - \exp(-t)] \right\} \text{ N}, \quad (7.56)$$

donde $m_2 = 0,163$ kg.

Los parámetros del controlador de la etapa fina se han ajustado con los mismos valores señalados en la Sección 5.7. Por su parte, los parámetros del controlador de la etapa gruesa se han establecido con valores tales que garanticen un error de posición máximo absoluto dentro del rango de actuación de la

Ref.	Valor del error	
	$e_{\text{rms}} [\mu\text{m}]$	$e_{\text{max}} [\mu\text{m}]$
G	25.89	71.84
G+F	8.46	44.16
G+F (Null)	0.04	0.39

Tabla 7.1: Índices de desempeño de errores de posición. G: Etapa Gruesa únicamente; G+F: Etapa Gruesa y Fina sin bloque de coordinación; G+F (Null): Etapa Gruesa y Fina con bloque de coordinación.

etapa fina de movimiento. Teniendo en cuenta esto, se ha especificado $\mathbf{K}_p = \mathbf{Diag}\{1200, 1\}$, $\mathbf{\Lambda}_p = \mathbf{Diag}\{200, 420\}$, $\mathbf{\Lambda}_i = \mathbf{Diag}\{1, 0\}$, $\boldsymbol{\eta}_s = \mathbf{Diag}\{7, 27\}$, $\boldsymbol{\eta}_d = \mathbf{Diag}\{10, 345\}$, $\boldsymbol{\sigma}_s = \mathbf{Diag}\{0,002, 0,02\}$, $\boldsymbol{\sigma}_d = \mathbf{Diag}\{0,002, 0,008\}$, $\eta_h = 1$, $\sigma_h = 0,005$, $\phi_1 = 560$ y $\phi_2 = 360$. Para el bloque referido al proyector sobre el Espacio Nulo encargado de la coordinación entre ambos subsistemas de actuación, se ha establecido $k_N = 5 \cdot 10^5$, $q_{2\min} = 0 \mu\text{m}$ y $q_{2\max} = 48 \mu\text{m}$, tal que $\bar{q}_2 = 24 \mu\text{m}$.

Para el desarrollo de las simulaciones, se establecieron las condiciones iniciales $\mathbf{q}(0) = [-3 \cdot 10^{-3} \quad 5 \cdot 10^{-6}]^T \text{ m}$, $\dot{\mathbf{q}}(0) = [0 \quad -1 \cdot 10^{-6}]^T \text{ m/s}$, $z(0) = 0$ y $h(0) = 4$, tal que $\hat{h}(0) \neq h(0)$.

Simulaciones comparativas entre algoritmos de control

En una primera instancia se comparó el desempeño del algoritmo de control propuesto contra una estrategia de control Maestro Esclavo sin coordinación mediante Proyección sobre Espacio Nulo, y con un controlador asociado únicamente a la etapa gruesa de movimiento. En la Figura 7.3 se muestra la señal de referencia establecida, la cual involucra tanto el problema de regulación como de seguimiento de trayectoria. En la Figura 7.4 se muestra el error de posición y en la Tabla 7.1 se muestran los índices de desempeño a partir del instante de tiempo de 1 s.

En la Figura 7.5 se exhibe la posición de la etapa fina de movimiento para ambos algoritmos de control que involucran a ambas etapas de movimiento. Como se puede apreciar de la Figura 7.5, la estrategia de control Maestro Esclavo sin bloque de coordinación adolece el problema de saturación de la etapa fina de movimiento, perdiéndose de esta manera la capacidad de compensar el error de

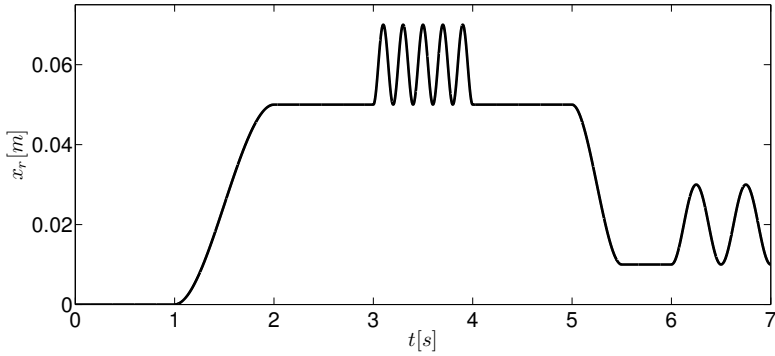


Figura 7.3: Señal de referencia con grandes desplazamientos utilizada en simulación.

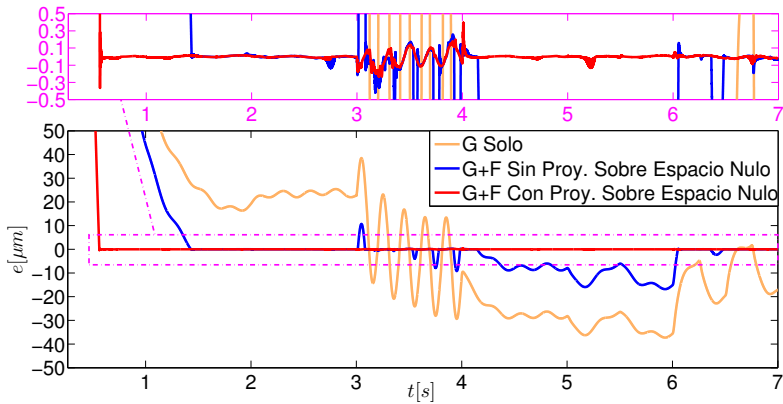


Figura 7.4: Error de posición del sistema para los diferentes controladores considerados.

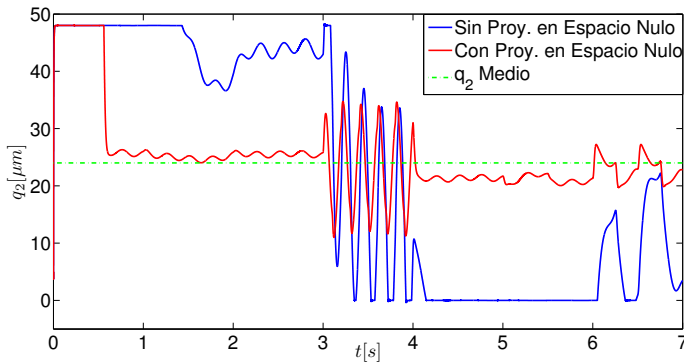


Figura 7.5: Posición de la etapa fina de accionamiento obtenida en simulación.

la etapa gruesa de movimiento. Esto ocasiona el incremento del error de posición del punto de interés sobre el sistema, tal y como se observa en la Figura 7.4 para dichos instantes de tiempo donde la etapa fina se encuentra saturada. Este inconveniente no ocurre en la estrategia de control con proyección sobre Espacio Nulo diseñada en esta tesis, dado que la misma establece una coordinación entre ambos sistemas de actuación tal que obliga a que el sistema fino opere próximo al valor medio $\bar{q}_2$ de su rango de actuación, disponiéndose en todo momento de su accionamiento en ambos sentidos de actuación y pueda ser utilizada para compensar los errores generados por la etapa gruesa de movimiento. Luego, de la Figura 7.4 se observa que de todas las estrategias de control consideradas en simulación, la propuesta en esta tesis es la que ofrece el menor error de posicionamiento.

Simulación con variación en la masa desplazada

Para analizar el impacto que ocasiona el cambio de la masa a ser desplazada en el desempeño del algoritmo de control, en simulación se comparó la ley de control propuesto para el caso en el que se considera el sistema sin carga, y dos casos con masa adicional: uno contemplando una carga de 0,1 kg y el otro de 0,2 kg. En la Figura 7.6 se muestra el desempeño del sistema controlado.

Como se aprecia de la Figura 7.6, a pesar de considerarse un valor desconocido en la masa a ser desplazada, el algoritmo de control propuesto

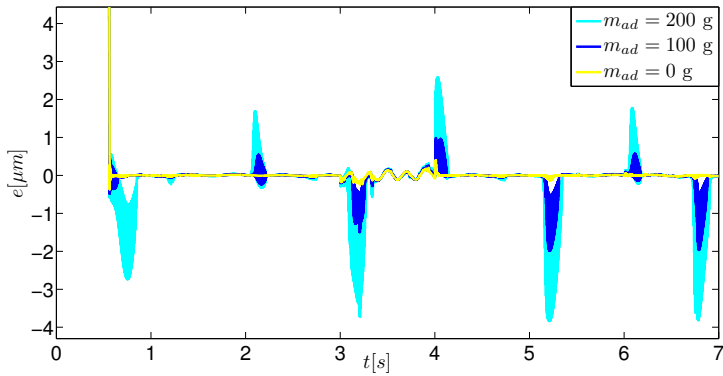


Figura 7.6: Desempeño del algoritmo de control propuesto al considerar variaciones en la masa a ser desplazada.

Ref.	Valor del error	
	$e_{rms} [\mu m]$	$e_{max} [\mu m]$
$m = 0 \text{ kg}$	0.04	0.39
$m = 0,1 \text{ kg}$	0.26	1.98
$m = 0,2 \text{ kg}$	0.64	3.84

Tabla 7.2: Índices de desempeño de errores de posición al considerar distintos valores de masa como carga a ser desplazada.

consigue llevar el error a un entorno cercano de cero, garantizando errores submicrométricos. En la Tabla 7.2 se exhiben los índices de desempeño para cada uno de los casos de masa contemplados, en donde los valores asociados con el error cuadrático medio se consideran razonables y aceptables para los casos analizados.

En la Figura 7.7 se exhibe la posición de la etapa fina de movimiento para cada uno de los casos señalados. Como se aprecia de esta Figura, el algoritmo de control propuesto permite que la etapa fina de movimiento opere alrededor de su valor medio del rango de actuación a pesar de que la masa de la carga resulta desconocida, como se esperaba.

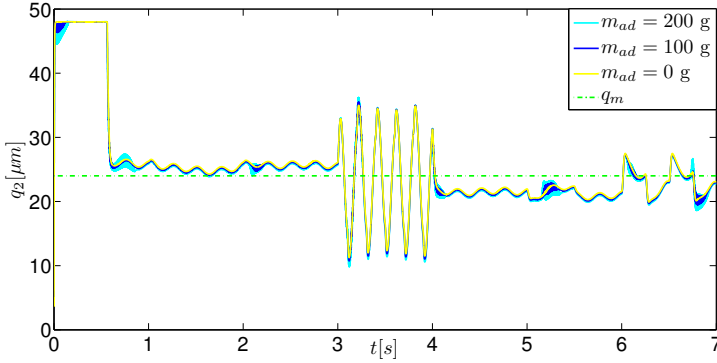


Figura 7.7: Posición de la etapa fina de accionamiento al considerar el algoritmo de control propuesto con incertidumbre en la masa a ser desplazada.

7.6.2. Pruebas experimentales

Dado que el sistema experimental considerado en esta tesis dispone únicamente de sensores de posición, para el cálculo de las señales de velocidad y aceleración requeridas en la ley de control diseñada en este Capítulo, se ha considerado la propuesta algorítmica de estimación de estas señales por medio de los filtros digitales indicados en [Altintas et al., 2000]. Según estos algoritmos, para estimar la velocidad $v(t)$ y aceleración $a(t)$, pueden considerarse las estimaciones dadas por

$$\hat{v}(k) = \alpha_v \hat{v}(k-1) + (1 - \alpha_v) \left[\frac{x_p(k) - x_p(k-1)}{\Delta t} \right] \quad (7.57)$$

y

$$\hat{a}(k) = \alpha_a \hat{a}(k-1) + (1 - \alpha_a) \left[\frac{\hat{v}(k) - \hat{v}(k-1)}{\Delta t} \right], \quad (7.58)$$

siendo Δt el periodo de muestreo utilizado y $\alpha_v, \alpha_a \in [0, 1]$ parámetros de diseño a partir de los cuales se regula la estimación como una ponderación entre la diferencia de valores de posición x_p o estimación de velocidad $\hat{v}$ consecutivos, y el valor previo de la estimación de la velocidad o aceleración, según corresponda. Los valores de α_v y α_a se ajustan mediante prueba y error, debiéndose ajustar un valor cercano a uno para el caso en que la incidencia

del ruido en la medición resulta significativo. Para el sistema experimental en consideración, se estableció una elección preliminar cercana a cero para priorizar el cómputo mediante diferencia finitas, y luego se realizó un ajuste fino de las mismas durante la etapa de implementación del controlador a los efectos de aminorar vibraciones del sistema a lazo cerrado. Por su parte, para suavizar la señal error de la etapa gruesa, considerada ésta como parte de la señal de referencia del controlador de la etapa fina de movimiento como se muestra en la Figura 7.2, se ha dispuesto un filtro digital de primer orden con ancho de banda de 200 Hz. Sobre esta señal filtrada, se ha considerado el cálculo de velocidad y aceleración de referencia para comandar la etapa fina de movimiento a partir de los algoritmos de estimación señalados en las ecuaciones (7.57) y (7.58). Cabe señalar que, la frecuencia de muestreo utilizado para las pruebas experimentales ha sido de 8 kHz.

Para las pruebas experimentales, en una primer instancia se ajustaron los parámetros de la etapa gruesa hasta conseguir errores de posicionado dentro del rango de actuación de la etapa fina de movimiento considerada en este trabajo. Para lo que respecta al controlador de la etapa fina de movimiento, se han considerado los parámetros establecidos en la Sección 5.7 del Capítulo 5, efectuando un ajuste fino de los mismos para lograr el seguimiento de la señal de referencia solicitada en esta ocasión para este sistema a lazo cerrado, la cual viene dada por el error de posición de la etapa gruesa de movimiento. Teniendo en cuenta esto, para el algoritmo de control dado a partir de las ecuaciones (7.4)-(7.13) se ha especificado los parámetros $\mathbf{K}_p = \mathbf{Diag}\{40550, 1\}$, $\mathbf{\Lambda}_p = \mathbf{Diag}\{100, 420\}$, $\mathbf{\Lambda}_i = \mathbf{Diag}\{500, 0\}$, $\boldsymbol{\eta}_s = \mathbf{Diag}\{7, 27\}$, $\boldsymbol{\eta}_d = \mathbf{Diag}\{100, 345\}$, $\boldsymbol{\sigma}_s = \mathbf{Diag}\{0,0001, 0,02\}$, $\boldsymbol{\sigma}_d = \mathbf{Diag}\{0,01, 0,08\}$, $\eta_h = 1$, $\sigma_h = 0,05$, $\phi_1 = 1860$ y $\phi_2 = 360$. Para el bloque referido al proyector sobre el Espacio Nulo encargado de la coordinación entre ambos subsistemas de actuación, se ha establecido $k_N = 5000 \cdot \left(\frac{J_s}{\rho_r^2} + m_2 \right)$. Resulta oportuno señalar que, a modo de precaución, durante las pruebas realizadas se ha impuesto un valor medio de actuación de la etapa fina de movimiento de $\bar{q}_2 = 21 \mu\text{m}$, de manera tal de que se considera la saturación del sistema fino en los valores $0 \mu\text{m}$ para la posición más baja y $42 \mu\text{m}$ para la posición más grande del mismo.

Para el desarrollo de las pruebas experimentales, se propuso el seguimiento de una trayectoria de baja velocidad que implique mover al sistema desde la posición $x_r = 0 \text{ m}$ hasta $x_r = 0,05 \text{ m}$ y luego regresar a la posición $x_r = 0 \text{ m}$, con un perfil tipo sinusoidal como se muestra en la Figura 7.8. Para evidenciar los beneficios que se obtienen con el algoritmo de control desarrollado en

este Capítulo, expresado a partir de las ecuaciones (7.4)-(7.13) y asociado con el esquema de control indicado en la Figura 7.2, se ha comparado la ley de control diseñada contra el sistema constituido únicamente por la etapa gruesa, y también con la disposición Maestro-Eslavo sin el bloque de coordinación por Proyección en Espacio Nulo (esquema de color rojo de la Figura 7.2), contemplando los mismos valores en los parámetros comunes de las propuestas de control consideradas. En lo que sigue, en una primera instancia se muestran los errores de posición e índices de desempeño del algoritmo de control propuesto y de los comparativos, y luego se presenta un análisis de las señales de control del algoritmo propuesto en este Capítulo.

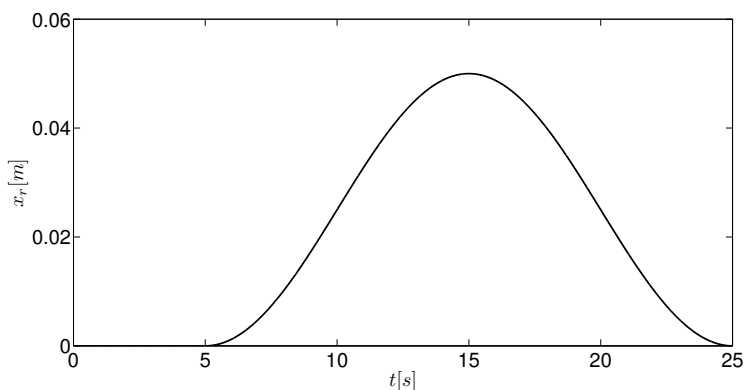


Figura 7.8: Señal de referencia con grandes desplazamientos utilizada en prueba experimental.

Errores de posición e índices de desempeño

En la Figura 7.9 se exhiben los errores de posición obtenidos para la señal de referencia establecida, en donde puede observarse que los errores generados por la configuración dual de accionamiento resultan significativamente inferiores que el obtenido al considerar únicamente la etapa gruesa de movimiento. Notar que, los errores de posicionado con y sin bloque de coordinación por Proyección sobre Espacio Nulo resultan muy similares entre ellos, salvo en aquellos puntos en los cuales el error de la etapa gruesa resulta muy grande, como se muestra en más detalles en la Figura 7.10. Luego, de los resultados exhibidos en la Figura 7.10,

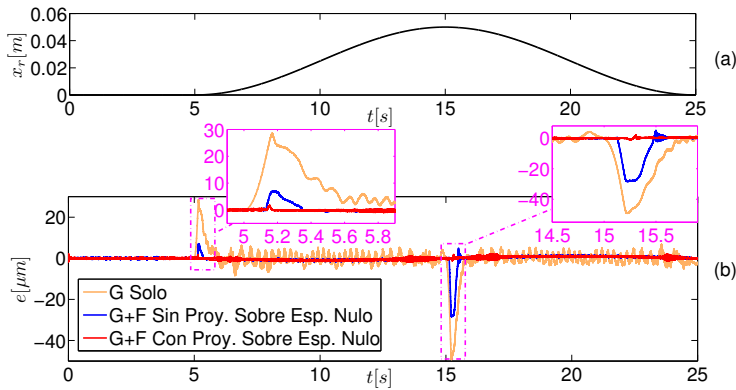


Figura 7.9: (a) Señal de referencia con grandes desplazamientos utilizada en prueba experimental. (b) Errores de posicionado.

se observa que la propuesta de control con señales auxiliares de coordinación establecida en este Capítulo es la arquitectura de control que exhibe errores de menor amplitud.

En la Tabla 7.3 se presentan en forma comparativa los índices de desempeño para cada estrategia de control considerada en esta Sección, en donde se observa que los errores de posicionado más pequeños se han obtenido con la estrategia de control propuesta en esta tesis.

Ref.	Valor del error	
	$e_{\text{rms}} [\mu\text{m}]$	$e_{\text{max}} [\mu\text{m}]$
G	5.48	49.22
G+F	2.44	28.38
G+F (Null)	0.65	2.12

Tabla 7.3: Índices de desempeño de errores de posición. G: Etapa Gruesa únicamente; G+F: Etapa Gruesa y Fina sin bloque de coordinación; G+F (Null): Etapa Gruesa y Fina con bloque de coordinación.

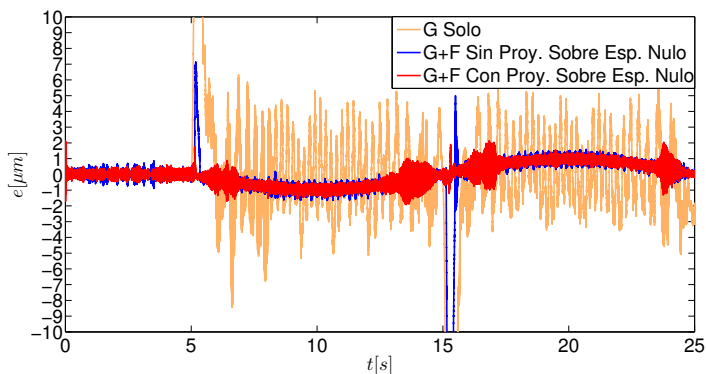


Figura 7.10: Detalle del error de posicionamiento para el algoritmo propuesto.

Análisis de señales de control

En la Figura 7.11 se exhibe el error de posicionado de la etapa gruesa de movimiento. Se hace notar que, los errores de mayor amplitud de este subsistema de actuación se producen cuando el mismo debe iniciar su movimiento o bien, invertir su sentido de marcha (comparar con la señal de referencia de la Figura 7.8). Este hecho se asocia con el fenómeno de fricción, en donde sólo se ha considerado una compensación del efecto viscoso de este fenómeno en todos los controladores aquí considerados. Observar que, la arquitectura de control con etapa Gruesa solamente y Gruesa + Fina sin bloque de coordinación, salvo al inicio de la prueba, resultan muy similares entre ellas puesto que sólo interviene la señal del controlador robusto en el accionamiento de esta etapa de actuación. Respecto a la discrepancia de ambas señales en los primeros segundos, se hace notar que la propuesta Gruesa + Fina sin bloque de coordinación contempla una modificación de la señal de referencia $x_r(t)$ tal que se le resta $\bar{q}_2$ a la misma para ser utilizada como entrada del lazo de control de la etapa gruesa de movimiento. Esto hace que, al inicializar la prueba, se solicite al sistema grueso que se mueva hacia atrás, permitiendo de esta manera que el sistema fino pueda operar dentro de su rango de actuación y compensar los errores producidos por el sistema grueso.

En la Figura 7.12 se muestra la posición de la etapa fina de movimiento, en donde claramente se observa que el algoritmo de control propuesto con bloque

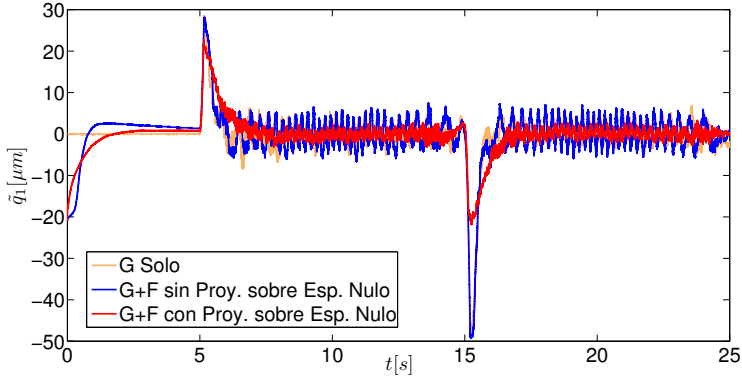


Figura 7.11: Error de posicionado de la etapa gruesa de movimiento para cada controlador considerado.

de coordinación previene su saturación, mientras que la propuesta de control sin este bloque de coordinación no consigue evitar este efecto indeseado para el sistema. Luego, esta condición de no saturación de la etapa fina de movimiento es el causante de la diferencia de error mostrada en la Figura 7.10.

En la Figura 7.13 se muestra la acción de control calculada para la etapa gruesa de movimiento, en donde se observa que el bloque de coordinación por proyección sobre Espacio Nulo modifica notoriamente la acción de control especificada por el algoritmo SMC en los instantes de tiempo en los que el error de posición tiende a crecer significativamente. Esto puede observarse al comparar cualitativamente la tasa de crecimiento / decrecimiento de la señal de control $u_1(t)$ en torno a los 5 s y 15 s, instantes de tiempo en los que ocurre la salida de la etapa gruesa de su situación de reposo y el cambio de marcha en su sentido de movimiento, respectivamente.

Los resultados mostrados en la Figura 7.13 se condicen con lo expuesto en la Sección 7.5.2 y lo exhibido en la Figura 7.12 respecto a la posición de la etapa fina. En más detalles, notar que a los 5 s, la posición de la etapa fina tiende a su valor superior de saturación (cumpliéndose $\bar{q}_2 < q_2 \leq q_{2\max}$), haciendo que la señal de coordinación requerida para la etapa gruesa, establecida a partir de la

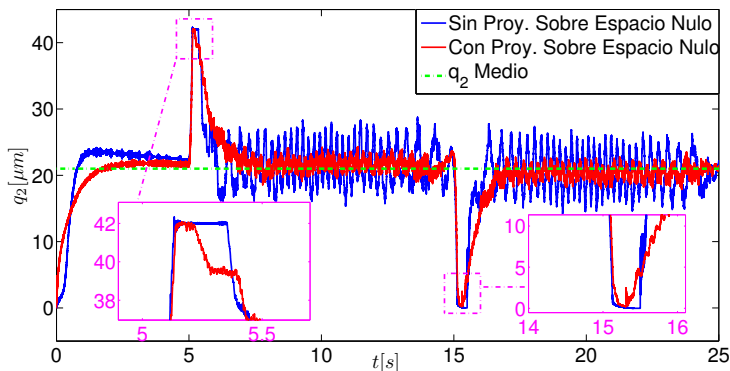


Figura 7.12: Posición de la etapa fina de accionamiento obtenida experimentalmente.

ecuación (7.51), resulte

$$u_{1_N} = \frac{\rho_r \left(\frac{J_e}{\rho_r^2} \right) k_N}{K_c m_2 \left(\frac{J_e}{\rho_r^2} + m_2 \right)} \cdot \text{sat} (q_2 - \bar{q}_2) > 0, \quad (7.59)$$

siendo esta señal incorporada como suma a la obtenida a partir del algoritmo de control por modo deslizante tal y como se expresa en la ecuación (7.5). Esto se condice con el rápido crecimiento de la acción de control mostrado en el detalle de la Figura 7.13 correspondiente a este instante de tiempo señalado, en comparación con las otras señales de control obtenidas a partir de los esquemas de control comparativos considerados. Un caso similar ocurre para cuando la etapa fina tiende a su condición de saturación inferior a los 15 s (verificándose $q_{2_{\min}} \leq q_2 < \bar{q}_2$), donde para este caso resulta

$$u_{1_N} = \frac{\rho_r \left(\frac{J_e}{\rho_r^2} \right) k_N}{K_c m_2 \left(\frac{J_e}{\rho_r^2} + m_2 \right)} \cdot \text{sat} (q_2 - \bar{q}_2) < 0, \quad (7.60)$$

observándose en el detalle de la Figura 7.13 correspondiente a este instante de tiempo que la acción de control de la etapa gruesa, decrece mucho más rápido que las señales obtenidas a partir de las estrategias de control comparativas.

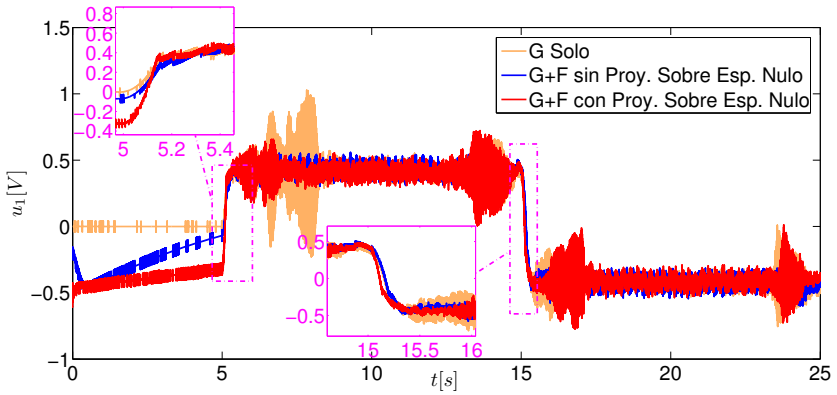


Figura 7.13: Acción de control de la etapa gruesa.

Por último, en la Figura 7.14 se muestran los términos adaptativos involucrados en la acción de control de la etapa gruesa, mientras que en la Figura 7.15 se exhiben los correspondientes a la acción de control de la etapa fina de movimiento. Como se puede apreciar de la Figura 7.14 y de la Figura 7.15, todas las variables adaptativas involucradas en el algoritmo de control propuesto permanecen acotadas en el tiempo, como se esperaba.

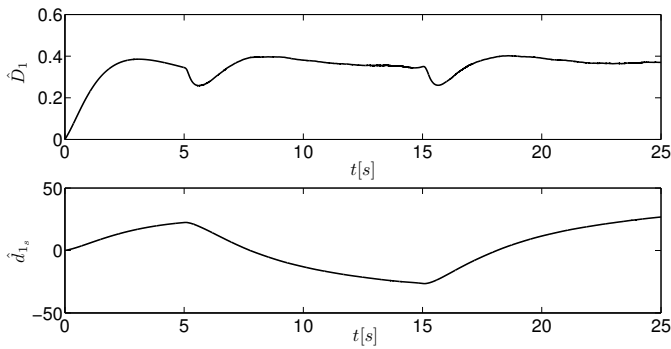


Figura 7.14: Variables estimadas involucradas en la ley de control de la etapa gruesa de movimiento.

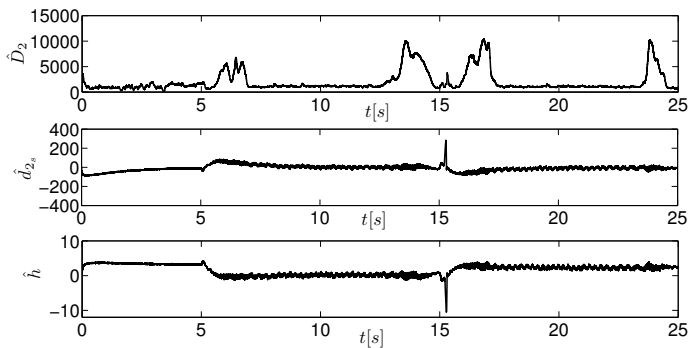


Figura 7.15: Variables estimadas involucradas en la ley de control de la etapa fina de movimiento.

7.7. Conclusiones

En este Capítulo se ha presentado una estrategia de control para comandar un sistema dual de posicionamiento con disposición tipo tándem. El diseño del algoritmo de control se ha establecido a partir de un modelo de sistema representado mediante una estructura vecto-matricial con dinámica desacoplada entre ambas etapas de actuación, a partir del cual se consigue especificar distintos parámetros en las leyes SMC establecidas para comandar a cada subsistema de movimiento. De la prueba de estabilidad presentada, se observa que las reglas de estimación propuestas garantizan la estabilidad global del sistema sin requerir del conocimiento de una cota superior de las cantidades que están siendo estimadas, donde únicamente se requiere que las mismas permanezcan acotadas en el tiempo.

El algoritmo de control desarrollado en este Capítulo permite incorporar de manera directa y sin ningún tipo de modificación el compensador de histéresis diseñado en el Capítulo 5. Por su parte, para lograr que la etapa fina de movimiento opere lejos de sus valores límites de funcionamiento y de esta manera prevenir su saturación, se ha considerado señales auxiliares de coordinación entre ambos subsistemas de actuación. Estas señales auxiliares establecidas a partir del algoritmo de Proyección sobre espacio Nulo del Sistema no resultan conflictivas con la tarea principal de conseguir la posición deseada para el punto operativo del posicionador, siendo el algoritmo de control robusto

SMC el encargado de cumplir con esta última tarea.

De las simulaciones efectuadas al considerar incertidumbre en la masa objetivo a ser movilizadada, se aprecia que el algoritmo de control permite lidiar con esta incertidumbre paramétrica sin requerir de un reajuste en la sintonización del algoritmo de coordinación encargado de evitar la saturación de la etapa fina de movimiento. Por su parte, de las pruebas experimentales llevadas a cabo, se observa que el algoritmo de control propuesto con bloque de coordinación mediante Proyección sobre Espacio Nulo es capaz de prevenir la saturación de la etapa fina de movimiento, garantizando de esta manera un error de posición menor que el caso en el que no se contemplan señales de coordinación auxiliares en la arquitectura de control Maestro-Eslavo desacoplada considerada como base para el diseño de la arquitectura de control considerada en esta tesis. De las pruebas realizadas, se observa que el algoritmo de control propuesto es capaz de ofrecer errores de posicionamiento submicrométricos con una adecuada coordinación entre ambos subsistemas de actuación al considerar el problema de seguimiento de trayectorias que impliquen realizar grandes desplazamientos. Además, se ha podido verificar que todas las variables involucradas en el cómputo de la acción de control, permanecen acotadas en el tiempo como se esperaba.

CAPÍTULO 8

Conclusiones

En el presente trabajo de investigación se abordó el problema de modelado y control de sistemas de nanoposicionamiento de estructura flexible accionados por piezoeléctricos, haciendo especial énfasis en la compensación del fenómeno de histéresis presente en estos sistemas.

En lo referido al modelado, se han establecido las ecuaciones dinámicas de un sistema flexible tipo brazo palanca con amplificación de recorrido, contemplando las dinámicas más relevantes que se evidencian en estos sistemas en aplicaciones habituales de nanoposicionamiento señaladas en la literatura. Para contemplar el fenómeno de la histéresis presente en estos sistemas, se ha recurrido a la utilización del modelo Bouc-Wen, en donde se ha propuesto una metodología de identificación paramétrica que permite ajustar de manera rápida y efectiva los parámetros del modelo considerado.

Respecto al diseño del controlador, en esta tesis se ha presentado un algoritmo SMC adaptativo con compensación de la histéresis, donde el compensador se ha diseñado a través de un observador de dicho fenómeno incorporando la superficie de deslizamiento en el modelo Bouc-Wen para efectuar la estimación. A diferencia de los trabajos tomados como referencia para el diseño del algoritmo presentado, se distinguen dos aportes significativos. Por un lado, los algoritmos de estimación propuestos se han establecido prescindiendo del conocimiento acerca de una cota superior de las cantidades que son estimadas, donde solamente se requiere que estas permanezcan acotadas en el tiempo. Por otro lado, se ha considerado un algoritmo de control pensado desde su síntesis en aplicaciones

de tiempo real para el control de este tipo de sistemas, en donde a partir del formalismo teórico desarrollado se garantiza la estabilidad global del sistema. Esto último implica que, con el algoritmo de control propuesto, formulado a partir de una modificación de los algoritmos SMC tomados como referencia, se consigue mantener acotadas en torno a cero tanto la variable controlada (posición) como los errores de estimación para el caso en el que se considera una ley SMC con función continua en el término robusto. De las pruebas realizadas tanto en simulación como de pruebas experimentales, se concluye que el algoritmo de control propuesto permite un correcto desempeño con errores submicrométricos, a partir del cual se consigue mitigar el efecto indeseado del *chattering* y mantener acotadas todas las variables estimadas, tal y como se esperaba.

Referido al control de un sistema dual de accionamiento para macro / micro posicionado, se ha considerado un modelo de sistema apto para ser utilizado en el diseño de controladores bajo la arquitectura de control Maestro-Esclavo. En más detalles, el modelo establecido permite considerar de manera desacoplada la dinámica de cada subsistema de actuación a partir de la consideración de aspectos que tienen que ver con cuestiones del dominio mecánico de ambas etapas de actuación. En este sentido, se han documentado las consideraciones que deben tenerse en cuenta para despreciar el fenómeno de interferencia mecánica entre ambas etapas de accionamiento, gruesa y fina, respectivamente, las cuales en la práctica se verifican en los sistemas físicos que se consideran en esta tesis. Por su parte, la estructura matemática vecto-matricial utilizada para representar la dinámica del sistema dual, permite contemplar en el diseño del controlador el compensador de la histéresis previamente señalado sin necesidad de modificar el algoritmo adaptativo establecido para contrarrestar este fenómeno no lineal. En más detalles sobre esta cuestión, la estructura matemática considerada facilita el diseño del controlador del sistema dual de posicionamiento, permitiendo incorporar de manera directa el algoritmo de estimación propuesto para la etapa fina en el diseño del controlador de la etapa gruesa del sistema dual de posicionamiento. Por su parte, el algoritmo de control propuesto facilita la sintonización del controlador del sistema dual de posicionamiento, puesto que se han establecido leyes de control para ambos subsistemas de actuación con términos similares entre ellos y con parámetros independientes.

Para evitar la saturación de la etapa fina de movimiento en sistemas duales de actuación, se ha considerado un algoritmo de coordinación diseñado desde el concepto de proyección sobre Espacio Nulo. De las pruebas realizadas, se observa que el algoritmo de control propuesto es capaz de ofrecer un desempeño

con errores de posicionamiento submicrométricos. Además, se evidencia una coordinación de accionamiento tal que obliga al actuador de la etapa fina de movimiento a operar lejos de sus extremos operativos, sin interferir en el objetivo de control abordado por los controladores principales de cada etapa de actuación, encargándose únicamente de prevenir la saturación de la etapa fina como se esperaba.

Un aspecto importante de destacar respecto a los algoritmos de estimación considerados en esta tesis, es que los mismos no dependen de la definición de la superficie deslizante considerada en el diseño del controlador. Esto permite contemplar otros diseños para la superficie de deslizamiento, como puede ser el caso de superficies deslizantes de mayor orden y/o no lineales tendientes a mejorar el tiempo de respuesta o precisión del sistema a lazo cerrado (ver Sección 2.9.1), sin la necesidad de modificar la estructura algorítmica establecida para el cómputo de la estimación. De igual manera, los algoritmos adaptativos aquí presentados pueden ser utilizados con otra función continua de conmutación en el término robusto, los cuales por su construcción son capaces de mantener acotadas las estimaciones en las hipótesis consideradas sobre las cantidades estimadas siempre y cuando la ley de control garantice una dinámica estable para el error de posición.

Las líneas de trabajo futuro que se desprenden de este trabajo de investigación son las siguientes. Por un lado, se pretende ampliar los algoritmos de control desarrollados, contemplando dinámicas que no han sido consideradas en el modelo presentado en este trabajo. En más detalles, para aquellos sistemas actuados por piezoeléctricos con rigidez limitada en la base que sirve como dispositivo de precarga del actuador, se buscará incorporar esta dinámica en el modelo mecánico para contemplar los desplazamientos que ocurren en la parte posterior del sistema de actuación. Luego, dado que sólo se dispone de un sensor de posición en el punto de interés del sistema, se pretende diseñar un observador de todos los estados no medibles del modelo desarrollado. Por su parte, para contrarrestar el efecto Stribeck de la fricción del sistema grueso de movimiento, se pretende incorporar un algoritmo de estimación de este fenómeno a partir de un algoritmo adaptativo desarrollado sobre el modelo de fricción LuGre. Este estimador de fricción se pretende diseñar de manera tal de poder incorporarse de manera directa en la primera coordenada del vector $\hat{\mathbf{p}}_{nl}(t)$ en la ley de control de la ecuación (7.5), sin requerir algún tipo de modificación en los demás términos del algoritmo de control presentado en esta tesis. Para dar respuesta a aquellos casos en los que pudiesen existir incertidumbres paramétricas en los modelos considerados en este trabajo (ver Capítulo 4 y Capítulo 6), en el algoritmo de

control propuesto se pretende incorporar reglas adaptativas para la estimación de la masa, el coeficiente de fricción viscosa, la rigidez equivalente del sistema o la ganancia que multiplica a la acción de control.

APÉNDICE A

Preliminares Matemáticos sobre estabilidad de sistemas

Este Apéndice presenta cuestiones matemáticas referidas a la estabilidad de sistemas, los cuales son utilizados en el Apéndice B. En este Apéndice, se ha omitido el desarrollo de las demostraciones por considerarse como resultados clásicos dentro de la Teoría de Modelado y Control de Sistemas. Para detalles sobre la demostración de los Lemas y Teoremas aquí presentados, puede consultarse [Desoer and Vidyasagar, 1975; Khalil, 2000; Krstic et al., 1995].

Definición 1. Para todo $p \in [0, \infty\}$ se define el espacio de funciones L_p de manera tal que:

- Si $p \in [0, \infty)$,

$$L_p = \left\{ f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} / \int_0^\infty |f(\tau)|^p d\tau < \infty \right\}. \quad (\text{A.1})$$

- Si $p = \infty$,

$$L_\infty = \left\{ f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} / \sup_{\tau \in [0, \infty)} \{|f(\tau)|\} < \infty \right\}. \quad (\text{A.2})$$

Definición 2. Para $p \in [1, \infty)$ se define la norma $\|\cdot\| : L_p \rightarrow [0, \infty)$ como

$$\|f(\cdot)\|_p = \left(\int_0^\infty |f(\tau)|^p d\tau \right)^{1/p}. \quad (\text{A.3})$$

Para $p = \infty$ se define

$$\|f(\cdot)\|_\infty = \sup_{\tau} \{|f(\tau)|\}. \quad (\text{A.4})$$

Definición 3. Sea $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Para todo $T \geq 0$, la función truncada f_T se define como

$$f_T(t) = \begin{cases} f(t), & 0 \leq t \leq T \\ 0, & t > T \end{cases}. \quad (\text{A.5})$$

Definición 4. Un espacio L_p extendido, con $p \in [0, \infty]$, se define como el conjunto de funciones

$$L_{pe} = \{f : f_T \in L_p \quad \forall T \in [0, \infty)\}, \quad (\text{A.6})$$

donde f_T es la función truncada establecida a partir de la Definición 3.

TEOREMA A.1. Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ un dominio que contenga el origen y sea $V : [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable tal que

$$\alpha_1(\|\mathbf{x}\|) \leq V(t, \mathbf{x}) \leq \alpha_2(\|\mathbf{x}\|) \quad (\text{A.7})$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} f(t, \|\mathbf{x}\|) \leq 0, \quad \forall \|\mathbf{x}\| \geq \mu > 0 \quad (\text{A.8})$$

para todo $t \geq 0$ y para todo $\mathbf{x} \in D$, donde $\|\mathbf{x}\|$ representa la norma Euclidiana del vector $\mathbf{x}$, donde $\alpha_1(\cdot)$ y $\alpha_2(\cdot)$ son funciones continuas crecientes tales que $\alpha_1(0) = \alpha_2(0) = 0$. Luego, considérese $r > 0$ tal que $B_r = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| < r\} \subset D$ y supóngase que se verifica $\mu < \alpha_2^{-1}(\alpha_1(r))$. Bajo estas consideraciones, para todo estado inicial $\mathbf{x}(t_0)$ tal que satisfaga $\|\mathbf{x}(t_0)\| < \alpha_2^{-1}(\alpha_1(r))$, existe algún $T \in [0, \infty]$ tal que

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq \alpha_1^{-1}(\alpha_2(\mathbf{x}(t_0))), \quad \forall \quad t_0 \leq t \leq t_0 + T \quad (\text{A.9})$$

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq \alpha_1^{-1}(\alpha_2(\mu)), \quad \forall \quad t \geq t_0 + T. \quad (\text{A.10})$$

Definición 5. Una función sin memoria $h : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se dice que pertenece al sector:

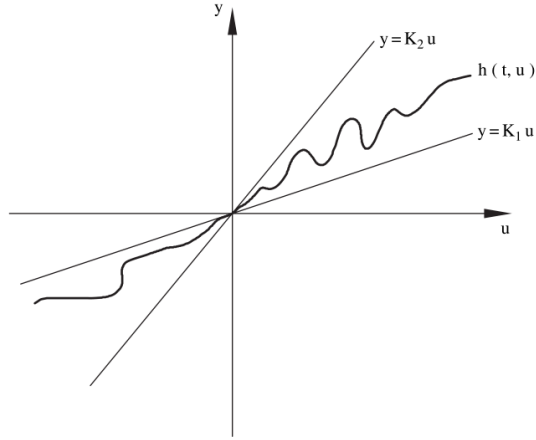


Figura A.1: Ejemplo de función que pertenece a la región $[K_1, K_2]$.

- $[0, \infty]$ si $uh(t, u) \geq 0$;
- $[K_1, \infty]$ si $u[h(t, u) - K_1u] \geq 0$;
- $[0, K_2]$ con $K_2 > 0$ si $h(t, u)[h(t, u) - K_2u] \leq 0$;
- $[K_1, K_2]$, con $K_2 > K_1$ si $[h(t, u) - K_1u][h(t, u) - K_2u] \leq 0$. Un ejemplo de una función que pertenece al sector $[K_1, K_2]$ se muestra en la Figura A.1.

Definición 6. *Estabilidad Absoluta.* Considérese el sistema representado mediante las ecuaciones

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \quad (\text{A.11})$$

$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + Du(t) \quad (\text{A.12})$$

$$u(t) = -\psi(t, y(t)), \quad (\text{A.13})$$

donde $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$, $D \in \mathbb{R}$, $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ y $u(t), y(t) \in \mathbb{R}$, tal que ψ es sin memoria, continua por tramos y localmente Lipschitz en $y(t)$, la cual satisface la condición del sector expresada en la Definición 5. Para el sistema dado por las ecuaciones (A.11) y (A.12), se considera que el par $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ es

controlable y el par (A, C) es observable. Se dice que el sistema es absolutamente estable si el origen es globalmente uniformemente asintóticamente estable para cualquier no linealidad en el sector considerado, y es absolutamente estable con un dominio finito si el origen es uniformemente asintóticamente estable.

TEOREMA A.2. Una función de transferencia $G(s)$ es estrictamente real positiva (SPR por sus siglas en inglés *Strictly Positive Real*) si y solo si,

- (1) $G(s)$ es una función de transferencia estrictamente estable (autovalores de G estrictamente en el semiplano izquierdo);
- (2) La parte real de $G(s)$ es estrictamente positiva en el eje $j\omega$, o sea $\operatorname{Re}[G(j\omega)] > 0$ para todo $\omega \geq 0$.

TEOREMA A.3. El sistema representado a partir de las ecuaciones (A.11)-(A.13) tal que $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$, es absolutamente estable (ver Definición 6) si

- (a) $\psi \in [K_1, \infty]$ y $G(s)/[1 + K_1G(s)]$ es SPR, o bien
- (b) $\psi \in [K_1, K_2]$ con $K_2 > K_1$ y $[1 + K_2G(s)]/[1 + K_1G(s)]$ es SPR.

En este caso, el origen es globalmente exponencialmente estable. Si la condición del sector se cumple solo en un conjunto $Y \subset \mathbb{R}$, entonces las condiciones anteriores aseguran que el sistema es absolutamente estable con un dominio finito. En este caso, el origen es exponencialmente estable.

Lema A.1. Sea f una función diferenciable tal que $\dot{f} \in L_1$ (ver Definición 1). Luego resulta $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = l < \infty$, es decir, el límite existe y es finito.

Lema A.2. Sea $H(s)$ una función de transferencia estable y estrictamente propia, con entrada $u(t)$ y salida $x(t)$ tal que $X(s) = H(s)U(s)$. Por lo tanto se obtiene lo siguiente (tener en cuenta Definición 1):

- (a) Si $u \in L_1$, entonces $x \in L_1 \cap L_\infty$, $\dot{x} \in L_1$, x es absolutamente continua tal que $x(t) \rightarrow 0$ para $t \rightarrow \infty$;
- (b) Si $u \in L_\infty$, luego $x \in L_\infty$, $\dot{x} \in L_\infty$ y x es uniformemente continua.

Lema A.3. (Barbalat). Considérese la función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$. Si $f, \dot{f} \in L_\infty$ (ver Definición 1) y $f \in L_p$ para algún $p \in [1, \infty)$, resulta que $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$.

Definición 7. *Considere un sistema dinámico con entrada u y salida y dadas por las ecuaciones*

$$\dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x}, u) \quad (\text{A.14})$$

$$y = G(\mathbf{x}, u), \quad (\text{A.15})$$

donde $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es localmente Lipschitz, $G : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ resulta continua y $F(0, 0) = 0$, $G(0, 0) = 0$. Se dice que este sistema es pasivo si existe una función $V(\mathbf{x})$ semi-definida positiva y continuamente diferenciable (llamada función de almacenamiento) tal que

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} F(\mathbf{x}, u) \leq uy, \quad \forall (\mathbf{x}, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}. \quad (\text{A.16})$$

APÉNDICE B

Modelo de histéresis Bouc-Wen

B.1. Introducción

En este Apéndice se expone el modelo de histéresis Bouc-Wen y sus principales características para el desarrollo de esta tesis. En más detalles, se expone la estructura matemática del modelo como ecuación diferencial de primer orden no lineal y se detallan propiedades del mismo referidas con la estabilidad, disipancia y comportamiento dinámico del modelo. La demostración de los Teoremas que aquí se exponen se ha extraído de [Ikhoulane and Rodellar, 2007], realizando las adaptaciones correspondientes para atender cuestiones de interés referidas al modelo Bouc-Wen perteneciente a la Clase I considerado para representar la histéresis de los sistemas físicos contemplados en este trabajo, procurando de esta manera que esta tesis sea autocontenida respecto a las propiedades más importantes que presenta este modelo.

B.2. Descripción matemática del modelo Bouc-Wen

Considérese un sistema mecánico con histéresis representada a través del mapeo $w(t) \rightarrow \Phi(w(t))$. El modelo Bouc-Wen se define como

$$\Phi_{BW}(w(t)) = \alpha_w k_w w(t) + (1 - \alpha_w) D k_w h(t) \quad (\text{B.1})$$

$$\dot{h}(t) = D^{-1} \left(A\dot{w}(t) - \beta |\dot{w}(t)| |h(t)|^{n-1} h(t) - \gamma \dot{w}(t) |h(t)|^n \right), \quad (\text{B.2})$$

donde $n \geq 1$, $D > 0$, $k_w > 0$ y $\alpha_w \in (0, 1)$ son parámetros del modelo. La variable $h(t)$ es la encargada de establecer los ciclos de histéresis en el modelo, la cual impone una memoria en el sistema. En la ecuación (B.2) A , β y γ son parámetros adimensionales que gobiernan la forma y el tamaño de los ciclos de histéresis, mientras que n es un escalar que interviene en la suavidad de la transición entre la respuesta elástica y plástica del modelo. La influencia de estos parámetros en los ciclos de histéresis del modelo Bouc-Wen se expone en la Sección B.3.

B.3. Influencia de los parámetros del modelo en la descripción de los ciclos de histéresis

Las Figuras B.1-B.4 muestran cómo intervienen los parámetros más importantes de la ecuación (B.2) del modelo Bouc-Wen en la forma general de los ciclos de histéresis, considerando $w(t) = x(t)$, siendo $x(t)$ la posición del sistema. En cada caso, solo se modifica un parámetro, mientras que los demás tienen los siguientes valores elegidos arbitrariamente de manera tal de que los ciclos resulten apreciables: $\beta = 0,5$, $\gamma = 2$, $A = 0,8$ y $n = 1$. De la Figura B.1 se observa que conforme aumenta el parámetro A , los ciclos de histéresis se hacen más anchos y la pendiente se vuelve más pronunciada. Por otro lado, de la Figura B.2 se puede observar que, conforme aumenta el parámetro n , la transición entre las regiones elástica y plástica de los ciclos se vuelve más abrupta. En la Figura B.3 y Figura B.4 se exhiben ciclos de histéresis para distintos valores de los parámetros γ y β , respectivamente. Un aspecto importante sobre la implicancia de los parámetros β y γ se muestra en la Figura B.5, en donde puede apreciarse distintos ciclos de histéresis atendiendo a diferentes relaciones entre ellos. Cabe señalar que, los ciclos de histéresis de los sistemas accionados mediante piezoeléctricos tratados en esta tesis presentan la morfología que se muestra en la Figura B.5.(a).

B.4. Estabilidad BIBO del modelo Bouc-Wen

La estabilidad del modelo Bouc-Wen queda garantizada por el Teorema B.1 que se expone a continuación.

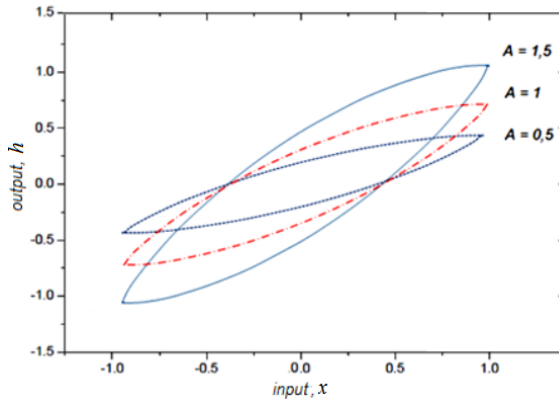


Figura B.1: Forma de los ciclos de histéresis del modelo Bouc-Wen para distintos valores de A . Extraído de [Zablotskaya, 2020].

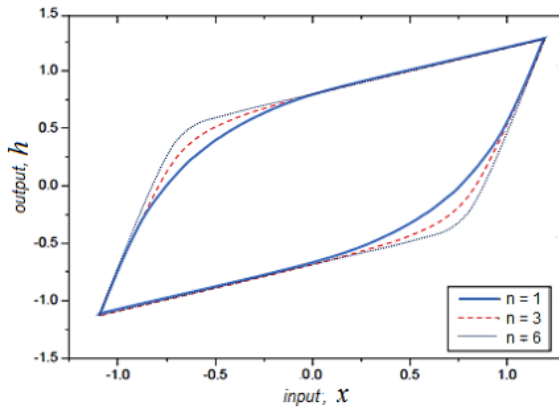


Figura B.2: Forma de los ciclos de histéresis del modelo Bouc-Wen para distintos valores de n . Extraído de [Zablotskaya, 2020].

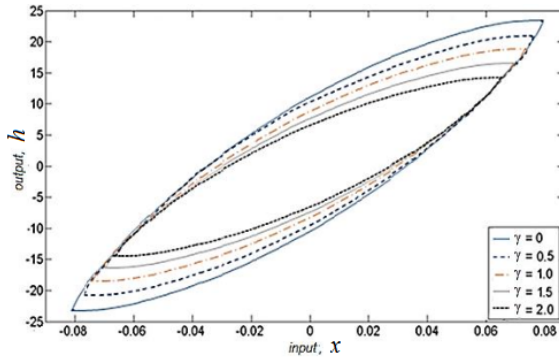


Figura B.3: Forma de los ciclos de histéresis del modelo Bouc-Wen para distintos valores de γ . Extraído de [Zablotskaya, 2020].

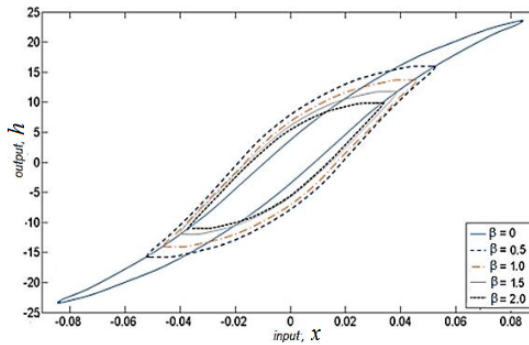


Figura B.4: Forma de los ciclos de histéresis del modelo Bouc-Wen para distintos valores de β . Extraído de [Zablotskaya, 2020].

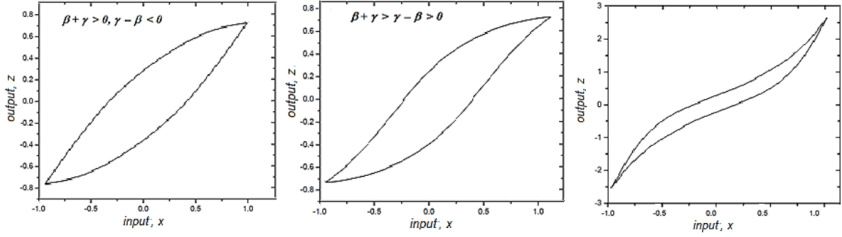


Figura B.5: Forma de los ciclos de histéresis del modelo Bouc-Wen para distintas relaciones entre β y γ . Extraído de [Zablotskaya, 2020].

Caso	Ω	Cota superior de $ h(t) $	Clase
$A > 0, \beta + \gamma > 0$ y $\beta - \gamma \geq 0$	$\mathbb{R}$	$\max\{ h(0) , h_0\}$	I
$A > 0, \beta - \gamma > 0$ y $\beta \geq 0$	$[-h_1, h_1]$	$\max\{ h(0) , h_0\}$	II
$A < 0, \beta - \gamma > 0$ y $\beta + \gamma \geq 0$	$\mathbb{R}$	$\max\{ h(0) , h_1\}$	III
$A < 0, \beta + \gamma < 0$ y $\beta \geq 0$	$[-h_0, h_0]$	$\max\{ h(0) , h_1\}$	IV
$A = 0, \beta + \gamma > 0$ y $\beta - \gamma \geq 0$	$\mathbb{R}$	$ h(0) $	V
Otro caso	$\emptyset$	-	-

Tabla B.1: Clasificación de los modelos Bouc-Wen respecto a la condición de estabilidad BIBO.

TEOREMA B.1. *Considérese el conjunto*

$$\Omega = \{h(0) \in \mathbb{R} : \Phi_{BW}(\cdot) \text{ es BIBO estable } \forall w \in C^1 \text{ con valores fijos en los parámetros } D, A, \beta, \gamma, n\} \quad (\text{B.3})$$

Sea $w(t)$ una señal de clase C^1 , con $t \in [0, \infty)$. Atendiendo a las cantidades

$$h_0 \triangleq \sqrt[n]{\frac{A}{\beta + \gamma}} \quad \text{y} \quad h_1 \triangleq \sqrt[n]{\frac{A}{\beta - \gamma}}, \quad (\text{B.4})$$

se verifica que la variable $h(t)$ de la ecuación (B.2) es BIBO estable con los parámetros que se muestran en la Tabla B.1.

Demostración. La demostración sobre existencia y unicidad de la solución del modelo Bouc-Wen, puede consultarse en [Dutta, 2004]. En esta tesis, se limitará la demostración de la estabilidad BIBO exclusivamente al modelo Bouc-Wen de

la Clase I, el cual es el más relevante teniendo en cuenta los sistemas físicos que se abordan en este trabajo. La demostración de estabilidad BIBO para las Clases II-V puede consultarse en [Ikhouane and Rodellar, 2007].

Para la demostración de estabilidad de la Clase I, considérese la función candidata de Lyapunov $V(t) = \frac{(h(t))^2}{2}$. Al calcular la derivada temporal de V resulta

$$\dot{V} = h\dot{h} = hD^{-1} \left(A\dot{w} - \beta |\dot{w}| |h|^{n-1} h - \gamma \dot{w} |h|^n \right). \quad (\text{B.5})$$

Luego, para el desarrollo de la demostración se especifican los casos

$$\begin{aligned} Q_1 &= \{(\dot{w}, h) \in \mathbb{R}^2 : \dot{w} \geq 0 \text{ y } h \geq 0\}, \\ Q_2 &= \{(\dot{w}, h) \in \mathbb{R}^2 : \dot{w} \geq 0 \text{ y } h \leq 0\}, \\ Q_3 &= \{(\dot{w}, h) \in \mathbb{R}^2 : \dot{w} \leq 0 \text{ y } h \geq 0\}, \\ Q_4 &= \{(\dot{w}, h) \in \mathbb{R}^2 : \dot{w} \leq 0 \text{ y } h \leq 0\}. \end{aligned}$$

En lo que sigue, se denotará como $\dot{V}|_{Q_i}$ para indicar que la derivada temporal de la función V es evaluada con los valores que se indican en Q_i , con $1 \leq i \leq 4$. Luego, resulta

$$\dot{V}|_{Q_1} = h\dot{w}D^{-1} [A - (\beta + \gamma) h^n], \quad (\text{B.6})$$

donde se consigue que $\dot{w}|_{Q_i} \leq 0$ si se verifica $h \geq h_0$. Por otro lado, se tiene que

$$\dot{V}|_{Q_2} = h\dot{w}D^{-1} [A + (\beta - \gamma) |h|^n], \quad (\text{B.7})$$

en donde se verifica que $\dot{V}|_{Q_2} \leq 0$ para todo $h \in \mathbb{R}$. A esta misma conclusión se llega para la condición Q_3 , dado que

$$\dot{V}|_{Q_3} = h\dot{w}D^{-1} [A + (\beta - \gamma) |h|^n]. \quad (\text{B.8})$$

Finalmente, para el último caso se tiene que

$$\dot{V}|_{Q_4} = h\dot{w}D^{-1} [A - (\beta + \gamma) |h|^n], \quad (\text{B.9})$$

con lo cual, resulta $\dot{V}|_{Q_4} \leq 0$ para todo $|h| \geq h_0$.

A partir del análisis presentado para cada uno de los casos anteriormente mencionados, se deduce que para todas las posibilidades en los signos de $\dot{w}$ y h , resulta que $\dot{V} \leq 0$ para todo $|h| \geq h_0$. Luego, apelando al Teorema A.1 del Apéndice A, se concluye que $h(t)$ está acotado para toda función continua $\dot{w}(t)$ y para cualquier condición inicial $h(0) \in \mathbb{R}$, lo cual significa que $\Omega = \mathbb{R}$. Las cotas de $h(t)$ se puede deducir desde el Teorema A.1 del Apéndice A, resultando que:

- Si la condición inicial de h es tal que $|h(0)| \leq h_0$, se verifica que $|h(t)| \leq h_0 \quad \forall t \geq 0$.
- Si la condición inicial de h es tal que $|h(0)| \geq h_0$, se verifica que $|h(t)| \leq h_0 \quad \forall t \geq 0$.

con lo cual, se consigue el resultado expuesto en la Tabla B.1 para la Clase I aquí considerada. $\square$

B.5. Convergencia asintótica de sistemas con histéresis contemplada con modelo Bouc-Wen

Considérese el sistema mecánico de la Figura B.6 en el que interviene una fuerza tal que posee un ciclo de histéresis, en donde la fuerza $f(t)$ se considera como la entrada y la variable posición $x(t)$ como la salida de interés. El parámetro $m > 0$ representa la masa y $c > 0$ la constante de amortiguamiento viscoso.

Luego, el sistema de la Figura B.6 puede expresarse mediante la ecuación diferencial de segundo orden

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + \phi(w(t)) = f(t) \quad \text{con} \quad x(0), \dot{x}(0), \phi(w(0)) \in \mathbb{R}, \quad (\text{B.10})$$

siendo $\phi(w(t))$ el efecto de la histéresis en el sistema. En lo que sigue, se supone que la fuerza con cualidades de histéresis está representada por el modelo Bouc-Wen dado por las ecuaciones (B.1) y (B.2), con la consideración de que $w(t) = x(t)$, quedando la ecuación (B.10) como

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + \alpha_w k_w x(t) + (1 - \alpha_w) D k_w h(t) = f(t) \quad (\text{B.11})$$

$$\dot{h}(t) = D^{-1} \left(A \dot{x}(t) - \beta |\dot{x}(t)| |h(t)|^{n-1} h(t) - \gamma \dot{x}(t) |h(t)|^n \right), \quad (\text{B.12})$$

con $x(0), \dot{x}(0) \in \mathbb{R}$ y $h(0) \in \Omega$ (ver Tabla B.1), donde se considera $n \geq 1$, $D > 0$, $k_w > 0$, $0 < \alpha_w < 1$ y $\beta + \gamma \neq 0$.

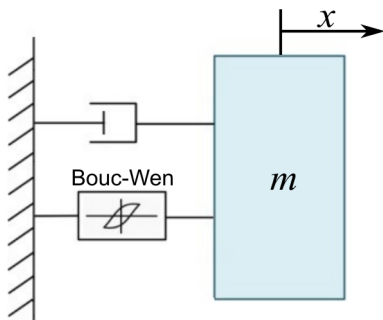


Figura B.6: Sistema mecánico de un grado de libertad con histéresis en fuerza restauradora.

Luego, la convergencia de las trayectorias del sistema a un valor finito bajo movimiento libre (es decir, $u(t) = f(t) \equiv 0$) para $t \rightarrow \infty$, queda garantizada por lo expuesto en el Teorema B.2 expresado a continuación.

TEOREMA B.2. *Considérese el sistema de la Figura B.6 descrito por las ecuaciones (B.11) y (B.12), con $f(t) = 0$ para todo $t \geq 0$. Para toda condición inicial $x(0), \dot{x}(0) \in \mathbb{R}$, y $h(t) \in \Omega \neq \emptyset$, se verifica que:*

- (a) *Para las Clases I-IV de la Tabla B.1, las señales $x(t)$, $\dot{x}(t)$ y $h(t)$ están acotadas y son funciones de clase C^1 .*
- (b) *Supóngase que el modelo Bouc-Wen pertenece a las Clases I. Entonces, existen constantes x_∞ y h_∞ que dependen de los parámetros del modelo Bouc-Wen $\alpha_w, D, k_w, A, \beta, \gamma$ y n ; de los parámetros del sistema m y c y de las condiciones iniciales $(x(0), \dot{x}(0)$ y $h(0))$, tal que existe una constante $\bar{c}$ que depende de los parámetros $m, k_w, A, \alpha_w, \beta$ y γ , en donde para todo $c \geq \bar{c}$ resulta*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_\infty, \quad (\text{B.13})$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = h_\infty, \quad (\text{B.14})$$

y

$$\alpha_w x_\infty + (1 - \alpha_w) D h_\infty = 0. \quad (\text{B.15})$$

Además,

$$\dot{x} \in L_1 \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{x}(t) = 0. \quad (\text{B.16})$$

Demostración. Para la demostración de la parte (a) del Teorema B.2, se convierten las ecuaciones (B.10)-(B.12) a un sistema descrito mediante variables de estados, expresado como

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (\text{B.17})$$

$$\dot{x}_2 = m^{-1} [-cx_2 - \alpha_w k_w x_1 - (1 - \alpha_w) k_w D h] \quad (\text{B.18})$$

$$\dot{h} = D^{-1} \left(A x_2 - \beta |x_2| |h|^{n-1} h - \gamma x_2 |h|^n \right), \quad (\text{B.19})$$

donde $x_1 = x$. Dado que las ecuaciones (B.17)-(B.19) son localmente Lipschitz (ver demostración del Teorema B.1), existe una única solución de la forma $(x_1(t), x_2(t), h(t))$, siendo todas funciones coordenadas de clase C^1 , durante algún intervalo de tiempo $[0, t_0)$. En el Teorema B.1 se ha probado que $h(t)$ dado por la ecuación (B.12) resulta acotada para cualquier señal $x \in C^1$ (no necesariamente acotada) para $h(0)$ perteneciente al conjunto $\Omega \neq \emptyset$. Por lo tanto, la ecuación (B.10) se puede escribir como

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + \alpha_w k_w x = -(1 - \alpha_w) D k_w h, \quad (\text{B.20})$$

que puede verse como un sistema lineal de segundo orden exponencialmente estable excitado por una señal de entrada externa $-(1 - \alpha_w) D k_w h(t)$ acotada en el tiempo. Por el Lema A.2 del Apéndice A se tiene que las señales $x_1(t)$, $x_2(t)$ y $h(t)$ están acotadas en el tiempo, y por lo tanto $t_0 = \infty$. Esto prueba la parte (a) del Teorema B.2.

Para la parte (b) del Teorema B.2 se procede en dos Pasos:

- (I) Primero se demuestra que $\dot{x}(t) \in L_1$;
- (II) Luego, se utiliza el Paso (I) para completar la demostración del Teorema.

Demostración del Paso (I). Se consideran los dos casos siguientes:

C_1 : $|h(t)| > h_0$ para todo $t \geq 0$;

C_2 : Existe algún $t_0 < \infty$ tal que $|h(t_0)| \leq h_0$.

El caso C_1 se trata primero. Se hace notar que, en la demostración del Teorema B.1, al considerar la función de Lyapunov $V = \frac{1}{2}h^2$ y la Clase I de la Tabla B.1 se llegó a la conclusión de que $\dot{V} \leq 0$ para $|h| \geq h_0$, con lo cual se deduce que para el caso C_1 y la Clase I la función $h(t)^2$ no es creciente, siendo de

esta manera una función acotada. Con lo cual, se verifica que $h(t)^2 \rightarrow h_\infty^2$ para $t \rightarrow \infty$, de manera tal que $h_\infty^2 \geq h_0^2$ para la Clases I. Considérese el caso donde $h(0) > 0$ (el análisis para el caso $h(0) < 0$ resulta similar). Por la continuidad de $h(t)$, se tiene que $h(t) \geq h_\infty \geq h_0 > 0$ para todo $t \geq 0$. Tomando $\varepsilon_h > 0$, existe algún $t_1 < \infty$ tal que

$$h_\infty^n \leq h(t)^n \leq h_\infty^n + \varepsilon_h \quad \forall t \geq t_1. \quad (\text{B.21})$$

Multiplicando la ecuación (B.21) por $x_2(t) > 0$ se consigue escribir

$$h_\infty^n x_2 - \varepsilon_h |x_2| \leq h_\infty^n x_2 \leq h^n x_2 \leq h_\infty^n x_2 + \varepsilon_h x_2 = h_\infty^n x_2 + \varepsilon_h |x_2| \quad (\text{B.22})$$

Por otro lado, multiplicando la ecuación (B.21) por $x_2(t) < 0$ se llega a que

$$h_\infty^n x_2 + \varepsilon_h |x_2| \geq h_\infty^n x_2 \geq h^n x_2 \geq h_\infty^n x_2 + \varepsilon_h x_2 = h_\infty^n x_2 - \varepsilon_h |x_2| \quad (\text{B.23})$$

Luego, de las ecuaciones (B.22)-(B.23) se deduce que

$$h_\infty^n x_2 - \varepsilon_h |x_2| \leq h^n x_2 \leq h_\infty^n x_2 + \varepsilon_h |x_2| \quad (\text{B.24})$$

para cualquier valor de $x_2(t)$. Integrando la ecuación (B.24) entre $[t_1, t_1 + T]$, siendo $T \geq 0$, se consigue expresar

$$\begin{aligned} h_\infty^n \int_{t_1}^{t_1+T} x_2(t) dt - \varepsilon_h \int_{t_1}^{t_1+T} |x_2(t)| dt &\leq \int_{t_1}^{t_1+T} x_2(t) h(t)^n dt \\ &\leq h_\infty^n \int_{t_1}^{t_1+T} x_2(t) dt \\ &\quad + \varepsilon_h \int_{t_1}^{t_1+T} |x_2(t)| dt. \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

Teniendo en cuenta que $\beta \geq 0$ (por hipótesis se considera la Clase I de la Tabla B.1), de las ecuaciones (B.19) y (B.21) se obtiene

$$\beta |x_2| h_\infty^n \leq \beta |x_2| h^n = -D\dot{h} + Ax_2 - \gamma x_2 h^n \quad (\text{B.26})$$

En este punto se deben analizar dos situaciones: $\beta = 0$ y $\beta > 0$. Atendiendo a los alcances de esta tesis, solo se considera la demostración para $\beta > 0$, pudiéndose consultar en [Ikhouane and Rodellar, 2007] la demostración para el caso en que $\beta = 0$. Luego, para el caso $\beta > 0$, integrando ambas partes de la desigualdad de la ecuación (B.26) y usando la ecuación (B.25), se sigue que

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_1+T} |x_2(t)| dt &\leq -\frac{D}{\beta h_\infty^n} [h(t_1 + T) - h(t_1)] \\ &\quad + \left(\frac{A}{\beta h_\infty^n} - \frac{\gamma}{\beta} \right) [x_1(t_1 + T) - x_1(t_1)] \\ &\quad + \frac{|\gamma| \varepsilon_h}{\beta h_\infty^n} \int_{t_1}^{t_1+T} |x_2(t)| dt \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

Si $\gamma = 0$, usando la Parte (a) del Teorema B.2, de la ecuación (B.27) se concluye que $x_2 \in L_1$ con $T \geq 0$ arbitrario. Si $\gamma \neq 0$, eligiendo $\varepsilon_h = \beta h_\infty^n / (2|\gamma|)$, de la ecuación (B.27) se deduce que $x_2 \in L_1$.

En lo que sigue se trata el caso C_2 . Al considerar la derivada temporal de la ecuación (B.18), resulta

$$\lambda_{2_h} \ddot{x}_2 + \lambda_{1_h} \dot{x}_2 + \lambda_{0_h} x_2 = -\dot{h}, \quad (\text{B.28})$$

donde

$$\lambda_{2_h} = \frac{m}{(1 - \alpha_w) D k_w}, \quad \lambda_{1_h} = \frac{c}{(1 - \alpha_w) D k_w}, \quad \lambda_{0_h} = \frac{\alpha_w}{(1 - \alpha_w) D} \quad (\text{B.29})$$

Con la suposición establecida en C_2 , resulta $|h(t_0)| \leq h_0$ para algún $t_0 < \infty$. Usando las conclusiones arribadas en la demostración del Teorema B.1 para $A > 0$ ($V = \frac{1}{2}h^2 \Rightarrow \dot{V} \leq 0$ si $|h| \geq h_0$ para las Clase I), resulta que $|h(t)| \leq h_0$ para todo $t \geq t_0$. Al considerar la Clase I y la ecuación (B.19) se tiene que, para todo $t \geq t_0$ se verifica

$$0 \leq D\dot{h}x_2 = [A - (\beta + \gamma) |h|^n] x_2^2 \leq Ax_2^2, \quad hx_2 \geq 0 \quad (\text{B.30})$$

$$Ax_2^2 \leq D\dot{h}x_2 = [A + (\beta - \gamma) |h|^n] x_2^2 \leq \frac{2A\beta}{\beta + \gamma} x_2^2, \quad hx_2 \leq 0. \quad (\text{B.31})$$

Con lo cual, se cumple que

$$0 \leq \dot{h}x_2 \leq \delta_h x_2^2, \quad (\text{B.32})$$

donde $\delta_h = (A/D) \max\{1, 2\beta/(\beta + \gamma)\}$. Luego, el sistema descrito a partir de las ecuaciones (B.17)-(B.19) se puede representar mediante el diagrama en bloques de la Figura B.7, donde la señal de referencia es $r = 0$, la señal de entrada del bloque lineal es $u = -\dot{h}$, la señal de salida es $y = x_2$ y la función de transferencia es $G(s)$ dada por

$$G(s) = \frac{1}{\lambda_{2_h} s^2 + \lambda_{1_h} s + \lambda_{0_h}}. \quad (\text{B.33})$$

De la ecuación (B.32) se deduce que $x_2 (\dot{h} - \delta_h x_2) \leq 0$, en donde al multiplicar en ambos miembros de esta desigualdad por $\frac{\dot{h}}{x_2} \geq 0$ (cociente no negativo teniendo en cuenta el resultado de la primer desigualdad de la ecuación

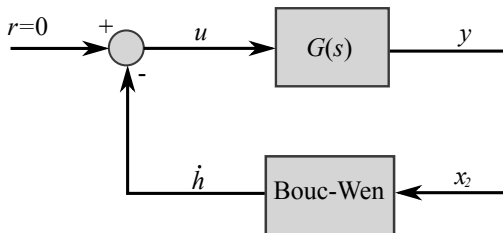


Figura B.7: Descripción equivalente del sistema dada por las ecuaciones (B.17)-(B.19).

(B.32)), con $x_2 \neq 0$ (caso de interés a los efectos de la demostración), se llega a que

$$\dot{h} \left(\dot{h} - \delta_h x_2 \right) \leq 0. \quad (\text{B.34})$$

Luego, atendiendo al resultado de la ecuación (B.34), por lo expuesto en la Definición 5 del Apéndice A, la no linealidad que representa el modelo Bouc-Wen pertenece al sector $[0, \delta_h]$. La idea es usar esa definición para probar que la conexión realimentada es tal que las funciones coordenadas del vector $(x_2, \dot{x}_2)$ convergen exponencialmente a cero usando el Teorema A.2 y el Teorema A.3 del Apéndice A. Entonces, deben analizarse las condiciones bajo las cuales $\text{Re} [1 + \delta_h G(j\omega)] > 0$ para todo $\omega \in [0, \infty)$. Esto es equivalente a verificar las condiciones para las cuales

$$f(\eta) = \lambda_{2_h}^2 \eta^2 + (-2\lambda_{0_h} \lambda_{2_h} + \lambda_{1_h}^2 - \delta_h \lambda_{2_h}) \eta + \lambda_{0_h}^2 + \delta_h \lambda_{0_h} > 0 \quad \forall \eta = \omega^2. \quad (\text{B.35})$$

La ecuación (B.35) es una expresión algebraica de segundo orden en la variable η . Si el discriminante $\Delta_f < 0$, entonces la función $f(\eta)$ es siempre positiva. Si $\Delta_f \geq 0$, entonces $f(\eta) = 0$ tiene raíces reales η_{1_f} y η_{2_f} con el mismo signo. Si $\eta_{1_f} < 0$ y $\eta_{2_f} < 0$, entonces $f(\eta) > 0$ para todo $\eta = \omega^2 \geq 0$. El único caso en que $f(\eta) < 0$ con $\eta \geq 0$ ocurre cuando la suma de las raíces es positiva. Esta situación sucede para cuando

$$c < \sqrt{mk_w \left[A(1 - \alpha_w) \max \left(1, \frac{2\beta}{\beta + \gamma} + 2\alpha_w \right) \right]} \triangleq \bar{c}. \quad (\text{B.36})$$

Así, finalmente se ha probado que $c \geq \bar{c}$ implica que $\text{Re} [1 + \delta_h G(j\omega)] > 0$ para todo $\omega \in [0, \infty)$. Luego, usando el Teorema A.3 del Apéndice A, se sigue

que el estado x_2 tiende exponencialmente a cero. Esto implica que $x_2 = \dot{x} \in L_1$. Por lo tanto, se ha demostrado que, en ambos casos C_1 y C_2 , resulta $\dot{x} \in L_1$, concluyendo así el Paso (I) de la demostración.

Demostración del Paso (II). El hecho de que $x_2 \in L_1$, junto con la ecuación (B.17), muestra que $x_1 = x$ tiende a un límite finito (Lema A.1 del Apéndice A), lo que establece el resultado expuesto en la ecuación (B.13). Como x_2 es acotada (Parte (a) del Teorema B.2) y $\dot{x}_2$ es acotada (por la ecuación (B.18) y Parte (a) del Teorema B.2) con $x_2 \in L_1$, por el Lema de Barbalat (Lema A.3 del Apéndice A) se puede asegurar que $\lim_{t \rightarrow \infty} x_2(t) = 0$. Ahora, considerando la derivada temporal de la ecuación (B.18) resulta

$$m\ddot{x}_2 + c\dot{x}_2 + \alpha_w k_w x_2 = -(1 - \alpha_w) k_w D\dot{h}, \quad (\text{B.37})$$

que puede interpretarse como un sistema de segundo orden estable excitado por la entrada $-(1 - \alpha_w) k_w D\dot{h}(t)$. Como $x_2 \in L_1$, por la Parte (a) del Teorema B.2 y la ecuación (B.19) se tiene que $\dot{h} \in L_1 \cap L_\infty$. Luego, apelando al Lema A.2 del Apéndice A y teniendo en cuenta la ecuación (B.37) se deduce que $\dot{x}_2 \in L_1$. Luego, como $\dot{x}_2$ es acotada (por la ecuación (B.18) y Parte (a) del Teorema B.2), de la ecuación (B.37) se deduce que $\ddot{x}_2$ es acotada. Seguidamente, por el Lema de Barbalat (Lema A.3 del Apéndice A), se deduce que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{x}_2(t) = 0. \quad (\text{B.38})$$

Usando esta propiedad en la ecuación (B.18) junto a la ecuación (B.16) se llega a que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [\alpha_w k_w x_1(t) + (1 - \alpha_w) k_w D\dot{h}(t)] = 0. \quad (\text{B.39})$$

como x_1 tiende a un límite finito, la ecuación (B.39) establece los resultados dados en las ecuaciones (B.14) y (B.15). Esto completa la demostración del Teorema B.2. $\square$

B.6. Pasividad del modelo Bouc-Wen en paralelo

El tratamiento de la histéresis bajo el paradigma de modelado en paralelo impone una realimentación negativa en el modelo del sistema (ver Figura B.7). Para este caso, cuando el sistema está sometido a una señal de excitación (fuerza) externa no nula, el modelo debe poseer la propiedad de no generar energía, sino

de transformar aquella que se le ha suministrado. En lo que sigue, por lo expuesto en el Teorema B.3 se tiene que el modelo Bouc-Wen en paralelo ($w(t) = x(t)$, siendo $x(t)$ la posición del sistema) correspondiente a la Clase I señalada en la Tabla B.1, es pasivo.

TEOREMA B.3. *Considérese la Definición 7 del Apéndice A respecto a la pasividad de un sistema. Luego, el modelo Bouc-Wen con parámetros pertenecientes a la Clase I de la Tabla B.1, para el caso en que $w(t) = x(t)$ (posición) y $\alpha_w \in (0, 1)$, resulta pasivo.*

Demostración. Llamando $\dot{w}(t) = \dot{x}(t) = u(t)$ y teniendo en cuenta las cantidades indicadas en la Definición 7 del Apéndice A, el modelo Bouc-Wen dado por las ecuaciones (B.1) y (B.2) puede escribirse como

$$\dot{h} = D^{-1} \left(Au - \beta |u| |h|^{n-1} h - \gamma u |h|^n \right) = F(h, u), \quad (\text{B.40})$$

$$\begin{aligned} y &= \Phi_{BW}(x) \\ &= \alpha_w k_w x + (1 - \alpha_w) Dk_w h \\ &= \alpha_w k_w \left(\int_0^t u(\tau) d\tau + x(0) \right) + (1 - \alpha_w) Dk_w h \\ &= G(h, u), \end{aligned} \quad (\text{B.41})$$

es decir, se está considerando como entrada a la variable $\dot{x}(t)$ y como salida la función definida por el modelo no lineal Bouc-Wen. De la ecuación (B.41) se observa que

$$yu = \alpha_w k_w (xu) + (1 - \alpha_w) Dk_w (hu). \quad (\text{B.42})$$

Luego, atendiendo a los parámetros del modelo Bouc-Wen pertenecientes a la Clase I de la Tabla B.1, se definen las cantidades

$$a_h = \frac{(1 - \alpha_w) D^2 k_w}{2A} > 0 \quad \text{y} \quad a_x = \frac{\alpha_w k_w}{2} > 0, \quad (\text{B.43})$$

y se establece la función de almacenamiento de energía

$$V_e = a_h h^2 + a_x x^2, \quad (\text{B.44})$$

donde se verifica que V_e es definida positiva y continuamente diferenciable, siendo

$$\dot{V}_e = 2a_h h \dot{h} + 2a_x x \dot{x}. \quad (\text{B.45})$$

Luego, teniendo en cuenta los parámetros de la Clase I de la Tabla B.1, resulta

$$\begin{aligned}
 h\dot{h} &= hD^{-1} \left(A\dot{x} - \beta |\dot{x}| |h|^{n+1} - \gamma \dot{x} |h|^n \right) \\
 &\leq D^{-1} \left(Ah\dot{x} - \beta |\dot{x}| |h|^{n-1} h^2 + |\gamma| |\dot{x}| |h|^n |h| \right) \\
 &\leq D^{-1} \left(Ah\dot{x} - \beta |\dot{x}| |h|^{n+1} + |\gamma| |\dot{x}| |h|^n |h| \right) \\
 &\leq D^{-1} \left(Ah\dot{x} + (|\gamma| - \beta) |\dot{x}| |h|^{n+1} \right) \quad (|\gamma| \leq \beta) \\
 &\leq D^{-1} Ah\dot{x}.
 \end{aligned} \tag{B.46}$$

Con lo cual, la derivada temporal de V_e dada por la ecuación (B.45) resulta

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_e &= 2a_h h\dot{h} + 2a_x x\dot{x} \\
 &\leq 2 \left(\frac{(1 - \alpha_w) D^2 k_w}{2A} \right) (D^{-1} Ah\dot{x}) + 2 \left(\frac{\alpha_w k_w}{2} \right) x\dot{x} \\
 &= (1 - \alpha_w) Dk_w (h\dot{x}) + \alpha_w k_w (x\dot{x}) \\
 &= (1 - \alpha_w) Dk_w (hu) + \alpha_w k_w (xu).
 \end{aligned} \tag{B.47}$$

Teniendo en cuenta la ecuación (B.42) se consigue expresar $\dot{V}_e \leq \gamma u$. Considerando la Definición 7 del Apéndice A respecto a la pasividad de un sistema, se deduce que el modelo Bouc-Wen con valores en los parámetros dados por la Clase I de la Tabla B.1 es pasivo. $\square$

B.7. Cambio de constante de modulación en modelo Bouc-Wen

Lema B.1. Sea $h_1(t)$ la variable de histéresis Bouc-Wen de un sistema tal que

$$\dot{h}_1(t) = A_1 \dot{x}(t) - \beta_1 |\dot{x}(t)| h_1(t) - \gamma_1 \dot{x}(t) |h_1(t)|, \tag{B.48}$$

donde se ha supuesto el parámetro $n = 1$ para la potencia en la ecuación (B.2). Luego, si se considera la variable de histéresis $h_2(t) = K_h h_1(t)$, siendo $K_h > 0$ una constante de modulación, entonces

$$\dot{h}_2(t) = A_2 \dot{x}(t) - \beta_2 |\dot{x}(t)| h_2(t) - \gamma_2 \dot{x}(t) |h_2(t)|, \tag{B.49}$$

donde $A_2 = K_h A_1$, $\beta_2 = \beta_1$ y $\gamma_2 = \gamma_1$.

Demostración. Sea $K_h > 0$ una constante tal que $h_2(t) = K_h h_1(t)$. Luego, resulta que

$$\begin{aligned}
 \dot{h}_2(t) &= K_h \dot{h}_1(t) \\
 &= K_h (A_1 \dot{x}(t) - \beta_1 |\dot{x}(t)| h_1(t) - \gamma_1 \dot{x}(t) |h_1(t)|) \\
 &= K_h A_1 \dot{x}(t) - \beta_1 |\dot{x}(t)| K_h h_1(t) - \gamma_1 \dot{x}(t) |K_h h_1(t)| \\
 &= K_h A_1 \dot{x}(t) - \beta_1 |\dot{x}(t)| h_2(t) - \gamma_1 \dot{x}(t) |h_2(t)|
 \end{aligned} \tag{B.50}$$

□

B.8. Independencia de la frecuencia

Como se expresa en [Ismail et al., 2009], el modelo Bouc-Wen exhibe un comportamiento de ciclo límite cuando se considera una señal de entrada periódica. Por su parte, en [Ikhouane and Rodellar, 2007] se demuestra que el ciclo límite al que converge la solución es independiente de la frecuencia de la señal de excitación utilizada para activar el sistema. Esto significa que, para señales periódicas con igual amplitud pero diferente frecuencia, el modelo Bouc-Wen exhibe los mismos ciclos de histéresis.

B.9. Modelo Bouc-Wen normalizado

En esta sección se considera una manera conveniente de expresar al modelo Bouc-Wen para propósitos de identificación, denominado modelo Bouc-Wen normalizado.

Lema B.2. *Considérese dos modelos Bouc-Wen dados por las ecuaciones (B.1)-(B.2) con parámetros tales que*

$$n_2 = n_1 = n, \quad A_2 = A_1, \quad \beta_2 = \nu^n \beta_1, \quad \gamma_2 = \nu^n \gamma_1, \tag{B.51}$$

$$D_2 = \nu D_1, \quad \alpha_{w_2} = \alpha_{w_1} \quad \text{y} \quad k_{w_2} = k_{w_1}, \tag{B.52}$$

donde ν es una constante positiva, y las condiciones iniciales son $h_2(0) = h_1(0)$. Entonces ambos modelos pertenecen a la misma clase, y para cualquier señal de entrada $w(t) \in C^1$ producen exactamente la misma salida $\phi_{BW}(w(t))$.

Demostración. El hecho de que ambos modelos pertenezcan a la misma clase se deduce directamente de la Tabla B.1. Luego, considérese una señal de entrada

$w(t)$ de clase C^1 . Entonces la salida de ambos modelos de histéresis están dadas por

$$\phi_{BW1}(w(t)) = \alpha_{w_1} k_{w_1} w(t) + (1 - \alpha_{w_1}) D_1 k_{w_1} h_1(t) \quad (\text{B.53})$$

$$\dot{h}_1 = D_1^{-1} \left(A_1 \dot{w} - \beta_1 |\dot{w}| |h_1|^{n-1} h_1 - \gamma_1 \dot{w} |h_1|^n \right) \quad (\text{B.54})$$

y

$$\phi_{BW2}(w(t)) = \alpha_{w_2} k_{w_2} w(t) + (1 - \alpha_{w_2}) D_2 k_{w_2} h_2(t) \quad (\text{B.55})$$

$$\dot{h}_2 = D_2^{-1} \left(A_2 \dot{w} - \beta_2 |\dot{w}| |h_2|^{n-1} h_2 - \gamma_2 \dot{w} |h_2|^n \right). \quad (\text{B.56})$$

De la ecuación (B.56) se consigue escribir

$$\dot{h}_2 = \nu^{-1} D_1^{-1} \left(A_1 \dot{w} - \nu^n \beta_1 |\dot{w}| |h_2|^{n-1} h_2 - \nu^n \gamma_1 \dot{w} |h_2|^n \right). \quad (\text{B.57})$$

Luego, considerando la variable $h_\nu(t) = \nu h_2(t)$, la ecuación (B.57) se puede expresar como

$$\dot{h}_\nu = D_1^{-1} \left(A_1 \dot{w} - \beta_1 |\dot{w}| |h_\nu|^{n-1} h_\nu - \gamma_1 \dot{w} |h_\nu|^n \right). \quad (\text{B.58})$$

Obsérvese que las ecuaciones (B.54) y (B.58) son exactamente iguales. Como tienen el mismo estado inicial $h_\nu(0) = h_1(0)$, luego $h_\nu(t) = h_1(t)$ para todo $t \geq 0$ debido a la unicidad de la solución del modelo Bouc-Wen por lo expuesto al inicio de la demostración del Teorema B.1. Luego, usando que $h_\nu(t) = \nu h_2(t)$, se sigue que $h_2(t) = \nu^{-1} h_1(t)$. Combinando este resultado con la ecuación (B.55), se consigue

$$\phi_{BW2}(w(t)) = \alpha_{w_1} k_{w_1} w(t) + (1 - \alpha_{w_1}) (\nu D_1) k_{w_1} (\nu^{-1} h_1(t)). \quad (\text{B.59})$$

Las ecuaciones (B.53) y (B.59) expresan que $\phi_{BW2}(w(t)) = \phi_{BW1}(w(t))$ para todo $t \geq 0$. $\square$

El Lema B.2 muestra que el comportamiento del modelo Bouc-Wen no se describe por un único conjunto de parámetros $\{\alpha_w, k_w, D, A, \beta, \gamma, n\}$. Esto hace que los parámetros del modelo sean funcionalmente redundantes, existiendo combinaciones entre ellos que producen una respuesta dinámica idéntica del sistema. Un inconveniente que ocasiona este hecho se ve reflejado en los procedimientos de identificación que utilizan datos de entrada-salida para ajustar los valores más convenientes del modelo, pudiendo ocasionar problemas de convergencia durante el proceso de identificación. Por este motivo, se ha

Caso	Ω	Cota superior de $ h_N(t) $	Clase
$\sigma_N \geq 0$	$\mathbb{R}$	$\max\{ h_N(0) , 1\}$	I

Tabla B.2: Condición de estabilidad BIBO para el modelo Bouc-Wen de Clase I normalizado.

recurrido a la elaboración de un modelo equivalente que define de forma unívoca el comportamiento de entrada-salida de este modelo, de modo que a su vez permite comparar el desempeño de los métodos de identificación.

Atendiendo a lo expuesto en el párrafo anterior, se define el cambio de variable

$$h_N(t) = \frac{h(t)}{h_0}. \quad (\text{B.60})$$

Luego, con esta consideración es posible reescribir el modelo Bouc-Wen establecido a partir de las ecuaciones (B.1) y (B.2) como

$$\Phi_{BW}(w(t)) = k_{w_N} w(t) + k_N h_N(t) \quad (\text{B.61})$$

$$\dot{h}_N(t) = \rho \left(\dot{w}(t) - \sigma_N |\dot{w}(t)| |h_N(t)|^{n-1} h_N(t) + (\sigma_N - 1) \dot{w}(t) |h_N(t)|^n \right), \quad (\text{B.62})$$

donde $\rho = \frac{A}{Dh_0} > 0$, $\sigma_N = \frac{\beta}{\beta+\gamma} \geq 0$, $k_{w_N} = \alpha_w k_w > 0$ y $k_N = (1 - \alpha_w) Dk_w h_0 > 0$, siendo $h_N(t)$ la variable normalizada del modelo Bouc-Wen. Luego, la descripción normalizada del modelo Bouc-Wen dadas por las ecuaciones (B.61) y (B.62) define una relación biyectiva entre el comportamiento de entrada-salida del modelo y sus parámetros. Para esta definición del modelo Bouc-Wen, la Clase I queda como se muestra en la Tabla B.2 [Ikhouane and Rodellar, 2007].

APÉNDICE C

Control por Modos Deslizantes

C.1. Introducción

En la formulación de cualquier problema de control, es común que se establezcan discrepancias entre el sistema real y el modelo matemático utilizado para el diseño del controlador. Estas discrepancias, pueden surgir debido a dinámicas no consideradas en el modelo debido a la necesidad de aproximar u omitir un comportamiento complejo del sistema considerando un modelo simplificado, al producirse variaciones en los parámetros del sistema, o simplemente por la existencia de perturbaciones externas. Al establecer un algoritmo de control, es imprescindible garantizar que el controlador satisfaga las especificaciones de rendimiento requeridas, incluso bajo la presencia de dinámicas no modeladas o mal compensadas y de eventuales interacciones del sistema con el medio en el que se encuentra operando. Esto ha motivado a los investigadores al desarrollo de estrategias de control robustas que pretenden resolver este problema de incertidumbres, tanto paramétricas como estructurales del modelo de sistema, y poder lidiar con la presencia de eventuales perturbaciones externas. Una de estas estrategias de control robusto se conoce con el nombre de control por modos deslizantes (*Sliding Mode Control*, SMC).

En este Apéndice se exponen los conceptos básicos relacionados con la filosofía de diseño de un algoritmo SMC convencional ideal, para el control de sistemas no lineales de una única entrada. Parte del desarrollo

matemático aquí presentado, ha sido extraído de [Edwards and Spurgeon, 1998; Plestan et al., 2010b], teniendo en cuenta algunas adaptaciones referidas a notación y cuestiones afines, a los efectos de expresar una idea clara y sencilla de la metodología de diseño de los algoritmos SMC considerados en esta tesis. En este sentido, la formulación teórica aquí presentada ha sido formulada a partir de un modelo de sistema con representación dinámica similar al de los sistemas físicos tratados en este trabajo.

C.2. Filosofía del algoritmo SMC

El nombre de modos deslizantes proviene de que, en esta estrategia de control, los estados del sistema son forzados a evolucionar sobre un subespacio del espacio de estados, el cual se denomina superficie deslizante. El diseño de un control por modo deslizante ideal involucra tres pasos: el modelado del sistema, la definición de la superficie de deslizamiento y la selección de una lógica de conmutación, la cual asegure que las trayectorias del sistema se dirijan hacia la superficie de deslizamiento y la alcancen en un tiempo finito (condición ideal), para luego permitir que las mismas se muevan (deslicen) sobre dicha superficie.

C.3. Diseño de Algoritmo SMC

Considérese el sistema, posiblemente no lineal, con incertidumbre estructural y/o paramétrica dado por

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t) + \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), t)u(t) + \mathbf{d}(\mathbf{x}(t), t), \quad (\text{C.1})$$

siendo $\mathbf{x}(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ \cdots \ x_n(t)]^T \in X \subseteq \mathbb{R}^n$ y $u(t) \in \mathbb{R}$ el vector de estados y la entrada del sistema, respectivamente, para el cual se considera como salida $y(t) = x_1(t)$. La función vectorial $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^n$ contempla parte de la dinámica conocida del sistema, $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^n$ expresa las ganancias que modifican a la señal de entrada del sistema en la ecuación de estados, y $\mathbf{d}(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^n$ un término de perturbaciones, el cual representa dinámicas no modeladas y eventuales perturbaciones externas incidentes sobre el sistema. Para lo que sigue, se considera que $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$ y $\mathbf{d}(\mathbf{x}, t)$ resultan acotadas para todo $(\mathbf{x}, t) \in X \times [0, \infty)$, en donde $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t) \neq 0$ en dicho dominio (es decir, el sistema descrito por la ecuación (C.1) es controlable para todos $\mathbf{x} \in X$ y para todo $t \in [0, \infty)$).

Sea $\mathbf{r}(t) = [r_1(t) \ r_2(t) \ \cdots \ r_n(t)]^T$ la señal de referencia considerada para el sistema. El objetivo de control a lazo cerrado es conseguir que $\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{r}(t) \rightarrow \mathbf{0}$ para $t \rightarrow \infty$, lo cual garantiza que $y(t) \rightarrow r(t)$ para $t \rightarrow \infty$.

Definición 8. *Extraído de [Plestan et al., 2010b]. Considérese el sistema no lineal dado por la ecuación (C.1), para el cual se establece una ley de control a lazo cerrado por medio de un algoritmo posiblemente con dinámica discontinua. Considérese la variable $s(\mathbf{e}, t) \in \mathbb{R}$ continua, a partir de la cual se define*

$$S = \{(\mathbf{e}, t) \in E \subset \mathbb{R}^n \times [t_s, \infty) : s(\mathbf{e}, t) = 0\}, \quad (\text{C.2})$$

llamado conjunto “superficie deslizante”, el cual se asume distinto del conjunto vacío. El movimiento de las trayectorias del sistema sobre S se denomina modo deslizante respecto a la variable superficie de deslizamiento $s(\mathbf{e}, t)$.

Sin pérdida de generalidad respecto a lo abordado en esta tesis, en lo que sigue se considerará la dependencia de la variable s respecto al tiempo t únicamente a través de los estados del sistema, es decir, $s(\mathbf{e}(t), t) = s(\mathbf{e}(t))$ para todo $t \geq 0$.

Como se ha mencionado previamente, las leyes SMC se componen de dos ideas conceptuales asociadas a las trayectorias de los estados del sistema: la primera, relacionada con lo que se conoce como modo de alcance a la superficie de deslizamiento desde cualquier punto en el espacio de estados; y la segunda, referida al modo de deslizamiento, la cual permite a las trayectorias del sistema deslizarse sobre la superficie previamente definida. Estas ideas relacionadas al modo de alcance y deslizamiento se representan cualitativamente en la Figura C.1 para un sistema de segundo orden.

C.3.1. Modo de deslizamiento

Para el modo de deslizamiento, se establece la ley de control de manera tal que obligue a las trayectorias del sistema a deslizarse sobre la superficie, la cual garantiza un desempeño deseado para el sistema a lazo cerrado. Esto implica que, para lograr el objetivo de control $\mathbf{e} \rightarrow \mathbf{0}$ para $t \rightarrow 0$, dicha superficie debe garantizar una dinámica del sistema controlado tal que funcione como un atractor hacia el origen de coordenadas en el plano de fase de la dinámica del error, para que la misma tienda a cero conforme transcurre el tiempo.

En cuanto al diseño de la superficie de deslizamiento, existen diversos criterios que se pueden encontrar en la literatura. Los criterios tradicionales inclu-

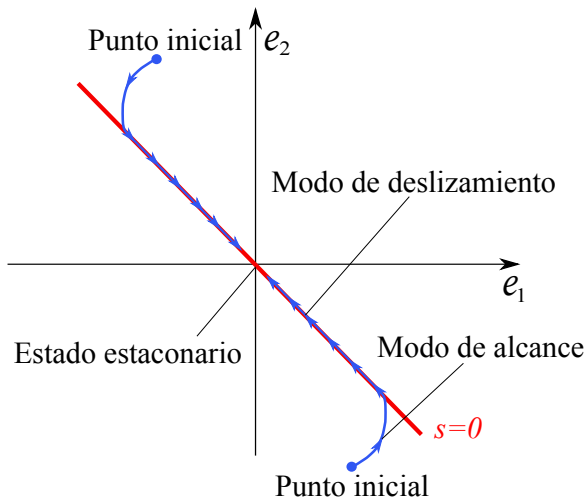


Figura C.1: Representación gráfica cualitativa del modo de alcance y deslizamiento de un algoritmo SMC, al considerar $s(\mathbf{e}) = e_2 + \lambda e_1$, con $\lambda > 0$.

yen superficies lineales, como los hiperplanos deslizantes de tipo Proporcional-Derivativos (PD), como se muestra en la Figura C.1.

En lo que sigue de este Apéndice, se asume que el diseño de la superficie de deslizamiento es tal que garantiza un correcto desempeño del sistema a lazo cerrado, es decir, que la superficie s garantiza una convergencia del error a cero para cuando se alcanza el modo de deslizamiento $s = 0$.

C.3.2. Modo de alcance

Atendiendo a lo mencionado con anterioridad, básicamente el objetivo de control en una ley SMC se centra en garantizar que las trayectorias del sistema puedan deslizarse sobre la superficie previamente diseñada, puesto que la misma garantiza un desempeño deseado del sistema a lazo cerrado. Para ello, resulta relevante encontrar las condiciones que garanticen el alcance de la superficie de deslizamiento. En este sentido, si se analiza el signo de la derivada temporal de la variable s , resulta

$$\dot{s}(\mathbf{e}(t)) = \frac{ds(\mathbf{e}(t))}{dt} = \frac{\partial s}{\partial \mathbf{e}} \bullet \dot{\mathbf{e}}(t), \quad (\text{C.3})$$

donde $\bullet$ expresa el operador producto escalar usual y $\frac{\partial s}{\partial \mathbf{e}} = \nabla_{\mathbf{e}} s(\mathbf{e}(t))$ (gradiente de s respecto a la variable $\mathbf{e}(t)$) es un vector normal a las curvas de nivel de $s(\mathbf{e}(t))$ con sentido en el que $s(\mathbf{e}(t))$ crece más rápidamente. El segundo vector de la ecuación (C.3) pertenece al campo vectorial

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t) - \dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{g}(\mathbf{x}, t)u(t) + \mathbf{d}(\mathbf{x}, t) - \dot{\mathbf{r}}(t), \quad (\text{C.4})$$

el cual claramente depende de las variables de estado del sistema. Luego, notar que, al considerar la ecuación (C.4) en la ecuación (C.3), se consigue

$$\dot{s}(\mathbf{e}(t)) = \frac{\partial s}{\partial \mathbf{e}} \bullet \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial s}{\partial \mathbf{e}} \bullet \mathbf{g}(\mathbf{x}, t)u(t) + \frac{\partial s}{\partial \mathbf{e}} \bullet \mathbf{d}(\mathbf{x}, t) - \frac{\partial s}{\partial \mathbf{e}} \bullet \dot{\mathbf{r}}(\mathbf{x}, t). \quad (\text{C.5})$$

Sin pérdida de generalidad para lo tratado en esta tesis, se considerará que $\Psi(\mathbf{e}, \mathbf{x}, t) = \frac{\partial s}{\partial \mathbf{e}} \bullet \mathbf{d}(\mathbf{x}, t)$ y $\Gamma(\mathbf{e}, \mathbf{x}, t) = \frac{\partial s}{\partial \mathbf{e}} \bullet \mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$ son acotadas, tales que

$$|\Psi(\mathbf{e}, \mathbf{x}, t)| \leq \Psi_M < \infty \quad \text{y} \quad 0 < \Gamma_m \leq \Gamma(\mathbf{e}, \mathbf{x}, t) \leq \Gamma_M < \infty \quad (\text{C.6})$$

para todo instante de tiempo $t \geq 0$.

Ahora bien, si $s(\mathbf{e}(t)) > 0$, la derivada dada por la ecuación (C.3) debería ser negativa para que $s(\mathbf{e}(t))$ disminuya y tienda a cero. En el caso contrario, para $s(\mathbf{e}(t)) < 0$, la derivada de la ecuación (C.3) debería ser positiva. Con lo cual, para alcanzar la superficie $s = 0$ (modo de deslizamiento según la Definición 8) es necesario que se verifiquen las siguientes reglas respecto a los signos de s y $\dot{s}$:

$$\begin{cases} \text{si } s(\mathbf{e}(t)) > 0 \Rightarrow \dot{s}(\mathbf{e}(t)) < 0 \\ \text{si } s(\mathbf{e}(t)) < 0 \Rightarrow \dot{s}(\mathbf{e}(t)) > 0 \end{cases} \quad (\text{C.7})$$

De las ecuaciones (C.3) y (C.4) se deduce que, la manera de modificar el signo de la derivada $\dot{s}(\mathbf{e}(t))$ para cumplir estrictamente con (C.7) se debe conseguir a través de la acción de control $u(t)$ (variable manipulable del sistema). Luego, las condiciones dadas por la ecuación (C.7) pueden resumirse en una única condición, dada por la regla

$$s(\mathbf{e}(t)) \cdot \dot{s}(\mathbf{e}(t)) < 0, \quad (\text{C.8})$$

la cual es necesaria, pero no suficiente, para garantizar la condición de deslizamiento a partir de un tiempo finito. Es decir, la condición dada por la ecuación (C.8) no garantiza que el sistema controlado se encuentre operando en el modo de deslizamiento. En lo que respecta a la condición de alcanzabilidad del modo de deslizamiento, la misma queda garantizada por el Teorema C.1.

TEOREMA C.1. *Una condición suficiente para garantizar la condición de deslizamiento a partir de en un tiempo finito t_s desde cualquier condición inicial $s(t_0)$, se logra cumpliendo con la desigualdad*

$$s(t)\dot{s}(t) \leq -\psi |s(t)| \quad \forall t \in [t_0, \infty), \quad \text{con } \psi > 0, \quad (\text{C.9})$$

verificándose que $t_s \leq \frac{|s(t_0)|}{\psi} + t_0$.

Demostración. En una primera instancia, se hace notar que la condición dada por la ecuación (C.9) garantiza cumplir con lo señalado en la ecuación (C.8). Luego, considérese la función candidata de Lyapunov

$$V(t) = \frac{a}{2} s^2(t), \quad \text{con } a > 0. \quad (\text{C.10})$$

Supóngase que $s(t_0) \neq 0$. Al establecer la derivada temporal de la ecuación (C.10) y asumiendo que se cumple con la condición dada por la ecuación (C.9), se consigue

$$\dot{V}(t) = as(t)\dot{s}(t) \leq -a\psi |s(t)| = -\frac{a\psi\sqrt{2}}{\sqrt{a}} \sqrt{V(t)}. \quad (\text{C.11})$$

Atendiendo a la desigualdad dada por la ecuación (C.11), para todo instante de tiempo $t > t_0 \geq 0$ tal que $V(t) \neq 0$, resulta

$$\frac{d\left(\sqrt{V(t)}\right)}{dt} = \frac{\dot{V}(t)}{2\sqrt{V(t)}} \leq -\frac{a\psi\sqrt{2}}{2\sqrt{a}}. \quad (\text{C.12})$$

Al integrar en ambos miembros de la ecuación (C.12) entre t_0 y t , siendo t_0 el instante inicial de tiempo, se obtiene

$$\sqrt{V(t)} - \sqrt{V(t_0)} \leq -\frac{a\psi\sqrt{2}}{2\sqrt{a}} (t - t_0), \quad (\text{C.13})$$

de donde se deduce que

$$0 \leq \sqrt{V(t)} \leq -\frac{a\psi\sqrt{2}}{2\sqrt{a}} (t - t_0) + \sqrt{V(t_0)}. \quad (\text{C.14})$$

De la ecuación (C.14) se observa que, la función $\sqrt{V(t)}$ está acotada por cero y por una función lineal decreciente en el tiempo (notar que la pendiente resulta del producto de cantidades positivas afectadas por el signo menos). Luego, la ecuación (C.14) implica que $V(t)$ alcanzará el valor cero en un tiempo finito $t_s \geq t_0$. Más aún, el tiempo de alcance t_s para el cual $\sqrt{V(t_s)} = \sqrt{\frac{a}{2}} |s(t_s)| = 0$ (es decir, $s(t_s) = 0$), se puede estimar como

$$t_s \leq \frac{2\sqrt{a}}{a\psi\sqrt{2}} \sqrt{V(t_0)} + t_0 = \frac{|s(t_0)|}{\psi} + t_0. \quad (\text{C.15})$$

Luego, la desigualdad dada por la ecuación (C.15) garantiza que, desde cualquier condición inicial $s(t_0)$, se logrará alcanzar a la superficie $s(t_s) = 0$ en un tiempo finito t_s , tal que

$$t_s \leq \frac{|s(t_0)|}{\psi} + t_0 \quad (\text{C.16})$$

En este punto, cabe recordar que $V(t) = \frac{1}{2} s^2(t) \geq 0$. Ahora, teniendo en cuenta la desigualdad hallada en la ecuación (C.11) y válida para cualquier instante de tiempo $t \geq t_0$, se deduce que $\dot{V}(t) \leq 0$ para todo $t \geq 0$. Luego, como V es cero en un instante de tiempo finito, siendo $V(t) \geq 0$ y $\dot{V}(t) \leq 0$ para todo instante de tiempo considerado, necesariamente se cumplirá con la condición $V(t) = 0$ para todo $t \geq t_s \geq t_0$. Esto último implica que $s(t) = 0$ para $t \geq t_s \geq t_0$. $\square$

C.4. Construcción de algoritmo SMC

Dado el sistema descrito por la ecuación (C.1), y definida la superficie de deslizamiento $s(\mathbf{e}(t))$ tal que garantiza un desempeño deseado del sistema a lazo cerrado, se establece la ley SMC como

$$u(t) = \frac{1}{\left(\frac{\partial s}{\partial \mathbf{e}} \bullet \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) \right)} \left[-\frac{\partial s}{\partial \mathbf{e}} \bullet \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial s}{\partial \mathbf{e}} \bullet \dot{\mathbf{r}} - K \operatorname{sgn}(s(\mathbf{e}(t))) \right], \quad (\text{C.17})$$

siendo $K > \Psi_M$ la ganancia de conmutación de la ley de control propuesta, donde Ψ_M representa una cota superior que tiene en cuenta todas las dinámicas no modeladas y perturbaciones del sistema (ver ecuación (C.6)). Bajo estas

condiciones, al considerar la ley de control de la ecuación (C.17) en la ecuación (C.5), resulta

$$\dot{s}(\mathbf{e}(t)) = \frac{\partial s}{\partial \mathbf{e}} \bullet \mathbf{d}(\mathbf{x}, t) - K \operatorname{sgn}(s(\mathbf{e}(t))) = \Psi(\mathbf{x}, t) - K \operatorname{sgn}(s(\mathbf{e}(t))). \quad (\text{C.18})$$

Ahora, nótese que

$$\begin{aligned} s(t)\dot{s}(t) &= s(\mathbf{e}(t))\dot{s}(\mathbf{e}(t)) \\ &= s(\mathbf{e}(t)) [\Psi(\mathbf{x}, t) - K \operatorname{sgn}(s(\mathbf{e}(t)))] \\ &= s(\mathbf{e}(t))\Psi(\mathbf{x}, t) - K |s(\mathbf{e}(t))| \\ &\leq |s(\mathbf{e}(t))\Psi(\mathbf{x}, t)| - K |s(\mathbf{e}(t))| \\ &= |s(\mathbf{e}(t))| \Psi_M - K |s(\mathbf{e}(t))| \\ &= -(K - \Psi_M) |s(\mathbf{e}(t))| \\ &= -\psi |s(\mathbf{e}(t))|, \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

con $\psi = (K - \Psi_M) > 0$, pues $K > \Psi_M$. Luego, por el Teorema C.1 queda garantizada la convergencia a la superficie de deslizamiento $s = 0$ en un tiempo finito.

En el diseño de la ley de control expresada en la ecuación, la cantidad $u_{ro}(t) = -K \operatorname{sgn}(s(\mathbf{e}(t)))$ se considera como el término robusto de la ley SMC, el cual obliga a las trayectorias a dirigirse hacia la superficie de deslizamiento preestablecida y alcancen a la misma en un tiempo finito, y $u_{eq}(t) = \frac{\partial s}{\partial \mathbf{e}} \bullet \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial s}{\partial \mathbf{e}} \bullet \dot{\mathbf{r}}$ es el término equivalente que permite el deslizamiento de las trayectorias del sistema sobre la superficie considerada. Para más detalles sobre la incidencia de $u_{ro}(t)$ y $u_{eq}(t)$ en lo que respecta al desempeño del sistema a lazo cerrado, puede consultarse [Edwards and Spurgeon, 1998].

Lo expresado anteriormente en esta Sección, hace referencia a cuestiones técnicas que deben tenerse en cuenta para el diseño de los algoritmos SMC. A los efectos de facilitar la etapa de diseño de estos algoritmos, comúnmente se recurre a técnicas de Lyapunov aplicadas sobre un funcional asociado con el estado energético del sistema. Teniendo en cuenta esta idea, considérese la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V(t) = \frac{1}{2} s^2(t). \quad (\text{C.20})$$

Al considerar la primer derivada temporal de la ecuación (C.20), se consigue

$$\dot{V}(t) = s(t)\dot{s}(t). \quad (\text{C.21})$$

A partir de una comparación simple con lo expresado en la ecuación (C.19), se deduce que $u(t)$ debe elegirse de manera tal que, en la derivada temporal de la variable superficie de deslizamiento (es decir, en $\dot{s}(t)$), queden dos términos confrontados entre ellos: uno dependiente de las perturbaciones del sistema y otro asociado con el término robusto $u_{ro}(t)$ del algoritmo SMC señalado en la Sección anterior. Con lo cual, para el diseño de un algoritmo SMC convencional e ideal, teniendo en cuenta el grado relativo del sistema dinámico a controlar se diseña la superficie de deslizamiento $s(t)$ en función de los estados del sistema, para luego considerar su derivada temporal. Al desarrollar algebraicamente la expresión de $\dot{s}(t)$, aparecerá la entrada del sistema $u(t)$. Seguidamente, se establece $u(t)$ de manera tal de generar cancelaciones dinámicas convenientes hasta conseguir que en $\dot{s}(t)$ aparezcan sólo dos términos: $\frac{\partial s}{\partial \mathbf{e}} \bullet \mathbf{d}(\mathbf{x}, t)$ asociado con las perturbaciones del sistema y $u_{ro}(t) = -K \operatorname{sgn}(s(\mathbf{e}(t)))$ referido al término robusto del algoritmo SMC. Esta metodología de trabajo es la que se ha tenido en cuenta para el diseño de los algoritmos SMC presentados en esta tesis, y es la que comúnmente se suele adoptar para el diseño de este tipo de controladores.

C.5. Diseño de algoritmo SMC para un sistema mecánico tipo masa-resorte amortiguado

En esta Sección, se expone el diseño de un algoritmo SMC ideal para un sistema mecánico simple, el cual se considera perturbado y con cierta dinámica desconocida. El objetivo de lo expuesto en esta Sección radica esencialmente en exponer la metodología de diseño considerada en esta tesis para la construcción de los algoritmos SMC oportunamente indicados en este trabajo, la cual se basa en la filosofía indicada en la Sección C.4 mediante técnicas de Lyapunov. Cabe señalar que, el sistema mecánico aquí considerado, resulta relevante puesto que presenta una estructura matemática de segundo orden tenida en cuenta para el modelado de los sistemas físicos contemplados en esta tesis.

Considérese el sistema mecánico de la Figura C.2, en donde $x(t)$ representa la posición del sistema, m la masa a ser desplazada, k la rigidez del muelle, c el coeficiente de fricción viscosa del amortiguador y $d(x(t), \dot{x}(t), t)$ un término de perturbaciones, el cual contempla dinámicas no contempladas del sistema y eventuales perturbaciones. En el modelo de la Figura C.2, la variable $F(t)$ representa una fuerza de control, expresada como $F(t) = K_u u(t)$, donde $K_u > 0$ es una ganancia de conversión de lo que se considera como la entrada

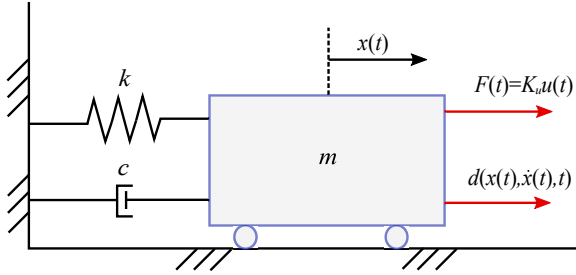


Figura C.2: ilustración de sistema masa-resorte amortiguado a controlar, el cual se considera perturbado por $d(x(t), \dot{x}(t), t)$.

$u(t)$ (variable manipulable) del sistema.

Para el sistema de la Figura C.2 se desea controlar la posición $x(t)$, de manera tal de lograr el objetivo de control asociado con el seguimiento de referencia $r(t)$, tal que $e(t) = x(t) - r(t) \rightarrow 0$ para $t \rightarrow \infty$.

Apelando a la primera ley de Newton, resulta

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = K_u u(t) + d(x(t), \dot{x}(t), t). \quad (\text{C.22})$$

Notar que, el sistema dinámico de la ecuación (C.22) puede expresarse en notación vectorial como

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \ddot{x}(t) \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \frac{1}{m}(-c\dot{x}(t) - kx(t)) \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_u}{m} \end{bmatrix}}_{\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)} u(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m}d(x(t), \dot{x}(t), t) \end{bmatrix}}_{\mathbf{d}(\mathbf{x}, t)}, \quad (\text{C.23})$$

la cual corresponde a la expresada en la ecuación (C.1). Luego, se asumirá que $|d(\mathbf{x}, t)| \leq D < \infty$ para todo $(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^2 \times [0, \infty)$.

Para el problema de control considerado, se considerará que la señal de referencia $r(t)$ presenta derivada segunda continua por tramos y definida en todo instante de tiempo $t \geq 0$. Luego, contemplando el error de posición como $e(t) = x(t) - r(t)$, se construye la superficie de deslizamiento $s(t) = s(\mathbf{e}(t)) = \dot{e}(t) + \lambda e(t)$, siendo $\lambda > 0$ un parámetro de diseño (notar que $\mathbf{e}(t) = [e(t) \quad \dot{e}(t)]^T$ para el caso aquí considerado). Para el diseño de la ley de control, se tiene en cuenta la metodología expresada en la Sección C.4, requiriéndose de esta manera el cálculo de la derivada temporal de la variable superficie de

deslizamiento $s(t)$. Luego, para la superficie de deslizamiento considerada en este ejemplo, resulta que

$$\begin{aligned}\dot{s}(t) &= \ddot{e}(t) + \lambda \dot{e}(t) \\ &= \ddot{x}(t) - \ddot{r}(t) + \lambda \dot{e}(t) \\ &= -\frac{c}{m} \dot{x}(t) - \frac{c}{m} x(t) + \frac{K_u}{m} u(t) + \frac{1}{m} d(x(t), \dot{x}(t), t) - \ddot{r}(t) + \lambda \dot{e}(t).\end{aligned}\quad (\text{C.24})$$

Con lo cual, por lo señalado en la Sección C.4, se establece la ley de control

$$u(t) = \frac{1}{(K_u/m)} \left[\frac{c}{m} \dot{x}(t) + \frac{k}{m} x(t) - \lambda \dot{e}(t) + \ddot{r}(t) - K \operatorname{sgn}(s(t)) \right], \quad (\text{C.25})$$

donde la ganancia del término robusto se selecciona de manera tal de que $K > Dm^{-1}$, es decir, mayor a la cota superior del término que contempla las perturbaciones del sistema. Luego, al reemplazar la expresión de $u(t)$ dada en la ecuación (C.25) en la ecuación (C.24), produce

$$\dot{s}(t) = m^{-1} d(x(t), \dot{x}(t), t) - K \operatorname{sgn}(s(t)). \quad (\text{C.26})$$

Al considerar la derivada temporal de la función candidata de Lyapunov $V(t) = \frac{1}{2} s^2(t)$, resulta

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) &= s(t) \dot{s}(t) \\ &= s(t) (m^{-1} d(x(t), \dot{x}(t), t) - K \operatorname{sgn}(s(t))) \\ &= s(t) m^{-1} d(x(t), \dot{x}(t), t) - K |s(t)| \\ &\leq |s(t)| m^{-1} |d(x(t), \dot{x}(t), t)| - K |s(t)| \\ &\leq |s(t)| Dm^{-1} - K |s(t)| \\ &\leq -(K - Dm^{-1}) |s(t)| \\ &= -\psi |s(t)|,\end{aligned}\quad (\text{C.27})$$

donde $\psi = (K - Dm^{-1}) > 0$ puesto que se ha especificado $K > Dm^{-1}$. Luego, por el Teorema C.1, resulta que la condición de deslizamiento $s = 0$ se alcanza en un instante de tiempo finito. Esto implica que, a partir de un instante de tiempo $0 \leq t_s < \infty$, resulta

$$\dot{e}(t) + \lambda e(t) = 0 \quad \forall t \in [t_s, \infty). \quad (\text{C.28})$$

Al resolver la ecuación diferencial de la ecuación (C.28) se obtiene

$$e(t) = e(t_s) \exp(-\lambda(t - t_s)). \quad (\text{C.29})$$

Luego, dado que se ha considerado $\lambda > 0$, se logra que el error $e \rightarrow 0$ (exponencialmente) para $t \rightarrow \infty$, cumpliéndose así con el objetivo de control aquí considerado.

APÉNDICE D

Sistemas sobreactuados

D.1. Introducción

En este Apéndice se exponen cuestiones relacionadas con la descripción dinámica de sistemas de posicionamiento sobreactuados. Principalmente se detalla el algoritmo de control con Proyección sobre Espacio Nulo que puede utilizarse para comandar a este tipo de sistemas, a partir del cual se aprovecha la redundancia de estos sistemas para mejorar alguna característica durante su funcionamiento. Dado que en este algoritmo de control con Proyección sobre Espacio Nulo se utiliza una inversa generalizada de la matriz Jacobiana de la cinemática del sistema, en este Apéndice se describen las principales características de dicha matriz.

D.2. Dinámica general de manipuladores para posicionamiento

Un manipulador consta de una cadena de cuerpos rígidos relacionados entre sí por articulaciones. Si q_i denota la variable que caracteriza el desplazamiento relativo del cuerpo i con respecto al cuerpo $i - 1$, el vector $\mathbf{q} = [q_1, \dots, q_m]^T$ describe de manera única la configuración de un manipulador con una cadena constituida por m articulaciones. La articulación i puede ser prismática o

giratoria, en cuyo caso q_i mide la traslación o rotación relativa de los enlaces adyacentes, respectivamente. Si bien el manipulador se describe naturalmente y se acciona en el espacio articular, su operación se especifica convenientemente en términos de la vector $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^T$, que típicamente define la ubicación del extremo del efector final del manipulador en un espacio de tareas adecuadamente definido. Las propiedades de inercia de un manipulador son generalmente expresadas con respecto a sus movimientos en el espacio articular. Para un manipulador de m grados de libertad, la propiedad de inercia en el espacio de las articulaciones son descritas por la matriz $\mathbf{M}(\mathbf{q})$, de dimensión $m \times m$, asociada con la forma cuadrática de la energía cinética, $\frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$, donde $\dot{\mathbf{q}}$ expresa el vector de velocidades articular del manipulador. Luego, las ecuaciones dinámicas en el espacio articular pueden expresarse en forma matricial como

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} + \mathbf{t}, \quad (\text{D.1})$$

siendo $\boldsymbol{\tau}$ el vector de fuerzas (torques) aplicados en el espacio de las articulaciones, $\mathbf{t}$ un vector de fuerzas (torques) constituido por dinámicas de mayor orden, fenómenos no lineales difíciles de modelar y perturbaciones, $\mathbf{K}(\mathbf{q})$ el vector de pares asociados a los campos elásticos y gravitacionales, y $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}$ el vector de torques asociados a las fuerzas centrífugas, de Coriolis y/o fricción actuantes sobre el sistema.

Por lo general, se suele cumplir que $m \geq n$ atendiendo a un adecuado diseño del manipulador, de manera tal de que el sistema articulado presente al menos el mismo número de grados de libertad especificados para la tarea definida en el espacio operacional. Si $m > n$, se dice que un manipulador es redundante¹.

D.2.1. Dinámica de manipuladores redundantes

Un análisis de la redundancia muestra que, en determinadas configuraciones, pueden existir infinitudes de desplazamientos elementales que pueden dar lugar a distintas configuraciones del sistema sin alterar la posición del efector final. Con lo cual, se pueden encontrar infinitos vectores de par articulares tal que al aplicarlos sobre el sistema no modifican la posición final del extremo operativo del manipulador. Desde un punto de vista del modelado a partir de una descripción vecto-matricial de la dinámica del sistema, estos desplazamientos corresponden a movimientos proyectados sobre el Espacio Nulo de la matriz

¹Para el caso tratado en esta tesis, $n = 1$ (movimiento unidimensional) y $m = 2$ (dos actuadores -grueso y fino-).

Jacobiana. Con la adición de pares articulares proyectados en lo que se considera el Espacio Nulo del sistema, la relación entre el vector de fuerza $\mathbf{F}$ desarrollado en el efector final y los pares $\boldsymbol{\tau}$ actuantes en las articulaciones, adoptan la forma general

$$\boldsymbol{\tau} = \underbrace{\mathbf{J}^T \mathbf{F}}_{\text{(Sol. Particular)}} + \underbrace{\left[\mathbf{I} - \mathbf{J}^T \mathbf{J}^{T^G} \right]}_{\text{(Sol. Homogénea)}} \boldsymbol{\tau}_0, \quad (\text{D.2})$$

donde $\mathbf{J}^{T^G}$ es una inversa generalizada de $\mathbf{J}^T$ y $\boldsymbol{\tau}_0$ es un vector de torque articular generalizado, el cual se proyecta ortogonalmente en $N((\mathbf{J}^T)^T) = N(\mathbf{J})$ (Espacio Nulo de $\mathbf{J}$).

Definición 9. (Extraído de [Dietrich et al., 2015]). Un Proyector de Espacio Nulo $\mathbf{N} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se dice que es estáticamente consistente si una sub tarea no genera fuerzas de interferencia en los espacios operativos de todas las tareas de mayor prioridad en cualquier equilibrio estático. La condición

$$(\mathbf{J}^G)^T \mathbf{N} = \mathbf{0} \quad (\text{D.3})$$

debe cumplirse para cualquier estado estacionario donde $\dot{\mathbf{q}} = \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$.

Definición 10. (Extraído de [Dietrich et al., 2015]). Un Proyector de Espacio Nulo $\mathbf{N} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se dice que es dinámicamente consistente si es estáticamente consistente y si una sub tarea nunca genera aceleraciones en los espacios operativos de todas las tareas de mayor prioridad. La condición

$$\mathbf{J} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{N} = \mathbf{0} \quad (\text{D.4})$$

debe verificarse para cualquier instante de tiempo.

Considérese un vector de par articular en la forma general dada a partir de la ecuación (D.2) aplicado sobre el sistema manipulador descripto a partir de la descripción dinámica dada por la ecuación (D.1). Para facilitar el análisis, en la ecuación (D.1) se considerará que $\mathbf{t} = \mathbf{0}$. Luego, para establecer la relación entre aceleración operativa y fuerza operativa, se multiplica la ecuación (D.1) en ambos miembros por la matriz $\mathbf{J}(\mathbf{q})\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q})$ y se usa la relación entre aceleración articular y aceleración operacional dada por $\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{J}}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$, pudiéndose escribir

$$\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{J} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{J}} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{J} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}(\mathbf{q}) = (\mathbf{J} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{J}^T) \mathbf{F} + \mathbf{J} \mathbf{M}^{-1} \left[\mathbf{I} - \mathbf{J}^T \mathbf{J}^{T^G} \right] \boldsymbol{\tau}_0. \quad (\text{D.5})$$

La ecuación (D.5) expresa la relación entre el vector de aceleración de las coordenadas operativas $\ddot{\mathbf{x}}$ del manipulador, y el vector de fuerzas operacionales $\mathbf{F}$. La matriz $(\mathbf{J}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{J}^T)$ que multiplica a $\mathbf{F}$ existe en todos los puntos que no es singular. Luego, la ecuación (D.5) muestra que la aceleración $\ddot{\mathbf{x}}$ del extremo operativo del manipulador es afectada por τ_0 a menos que el término que involucra a τ_0 sea nulo para cualquier instante de tiempo. Con lo cual, para que los pares τ_0 de la ecuación (D.2) no produzcan ninguna aceleración en el extremo operativo del manipulador, es condición suficiente que se verifique

$$\mathbf{J}\mathbf{M}^{-1} \underbrace{\left[\mathbf{I} - \mathbf{J}^T \mathbf{J}^{T^G} \right]}_{\mathbf{N}} = \mathbf{J}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N} = \mathbf{0} \quad \forall t \in [0, \infty), \quad (\text{D.6})$$

donde una inversa generalizada de $\mathbf{J}^T$ que satisface la ecuación (D.6) cumple con la Definición 10.

Lema D.1. (Extraído de [Khatib, 1987]) Una inversa generalizada $\mathbf{J}^{T^G}$ que verifica la condición dada por la ecuación (D.6), resulta

$$\mathbf{J}^{T^G} = \bar{\mathbf{M}}\mathbf{J}\mathbf{M}^{-1}, \quad (\text{D.7})$$

donde

$$\bar{\mathbf{M}} = (\mathbf{J}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{J}^T)^{-1}. \quad (\text{D.8})$$

Demostración. La prueba se basa en un análisis de la ecuación (D.6), la cual puede reescribirse como

$$\left[\mathbf{J}\mathbf{M}^{-1} - (\mathbf{J}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{J}^T) \mathbf{J}^{T^G} \right] = \mathbf{0}. \quad (\text{D.9})$$

Luego, considerando como $\bar{\mathbf{M}} = (\mathbf{J}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{J}^T)^{-1}$, de la ecuación (D.9) se deduce que

$$\mathbf{J}^{T^G} = (\mathbf{J}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{J}^T)^{-1} \mathbf{J}\mathbf{M}^{-1} = \bar{\mathbf{M}}\mathbf{J}\mathbf{M}^{-1}. \quad (\text{D.10})$$

□

D.2.2. Incidencia del vector τ_0 en la dinámica del sistema

Como consecuencia del Lema D.1, se deduce que al considerar la inversa generalizada $\mathbf{J}^{T^G} = \bar{\mathbf{M}}\mathbf{J}\mathbf{M}^{-1}$ en la ecuación dinámica (D.5), siendo $\bar{\mathbf{M}} =$

$(\mathbf{JM}^{-1}\mathbf{J}^T)^{-1}$, resulta

$$\begin{aligned}
 \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{JM}^{-1}\mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{J}}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{JM}^{-1}\mathbf{K}(\mathbf{q}) &= (\mathbf{JM}^{-1}\mathbf{J}^T)\mathbf{F} + \mathbf{JM}^{-1}\left[\mathbf{I} - \mathbf{J}^T\mathbf{J}^{TG}\right]\boldsymbol{\tau}_0 \\
 &= \bar{\mathbf{M}}^{-1}\mathbf{F} + \mathbf{JM}^{-1}\left[\mathbf{I} - \mathbf{J}^T\left((\mathbf{JM}^{-1}\mathbf{J}^T)^{-1}\mathbf{JM}^{-1}\right)\right]\boldsymbol{\tau}_0 \\
 &= \bar{\mathbf{M}}^{-1}\mathbf{F} + \left[\mathbf{JM}^{-1} - (\mathbf{JM}^{-1}\mathbf{J}^T)(\mathbf{JM}^{-1}\mathbf{J}^T)^{-1}\mathbf{JM}^{-1}\right]\boldsymbol{\tau}_0 \\
 &= \bar{\mathbf{M}}^{-1}\mathbf{F} + \underbrace{\left[\mathbf{JM}^{-1} - \mathbf{JM}^{-1}\right]}_{\mathbf{0}_{n \times m}}\boldsymbol{\tau}_0 \\
 &= \bar{\mathbf{M}}^{-1}\mathbf{F},
 \end{aligned} \tag{D.11}$$

donde claramente se observa que $\boldsymbol{\tau}_0$ no afecta $\ddot{\mathbf{x}}$. Con lo cual, a partir de la señal $\boldsymbol{\tau}_0$ de la ecuación (D.2), bajo algún criterio considerado, es posible generar pares articulares que permiten modificar la postura del manipulador sin afectar la posición final del punto de interés sobre el sistema. Cabe señalar que $\bar{\mathbf{M}}$ involucra la inversa de una matriz construida a partir de $\mathbf{M}^{-1}$ y la matriz Jacobiana $\mathbf{J}$ del sistema, tal y como se expresa en la ecuación (D.8). Luego, en el caso de un manipulador redundante, la matriz $\bar{\mathbf{M}}$ puede interpretarse como una pseudo matriz asociada con la energía cinética del sistema [Khatib, 1987].

Retomando la definición del vector de torques expresado en la ecuación (D.2), se deduce que la relación entre pares articulares y fuerzas operativas en un manipulador redundante, proporciona una descomposición de torques en dos vectores de señales de control: pares articulares correspondientes a las fuerzas que actúan en el efector final producidos por $\mathbf{J}^T\mathbf{F}$, y pares articulares dados por $\left[\mathbf{I} - \mathbf{J}^T\mathbf{J}^{TG}\right]\boldsymbol{\tau}_0$ que solo intervienen en lo que se considera la postura del manipulador, los cuales no modifican la posición del extremo operativo del sistema.

D.2.3. Criterio para elección de $\boldsymbol{\tau}_0(t)$

En el contexto de esta tesis, debe tenerse en cuenta los límites mecánicos del subsistema de actuación más susceptible de encontrarse próximo a sus límites extremos de operación, el cual resulta ser el sistema fino de actuación. En términos generales, si un sistema redundante presenta la condición de saturación en una de sus coordenadas articulares (rotacionales o de movimiento lineal),

puede perder su aptitudes de redundancia funcional que lo caracteriza. Para prevenir esta situación indeseada referida a la saturación de alguna coordenada articular del posicionador, en [Khatib, 1995] se propone La coordinación dinámica del sistema basada en combinar el control del espacio operativo con una minimización de la desviación de las posiciones articulares medias del manipulador. En este sentido, sean $q_{\max_i}$ y $q_{\min_i}$ los límites superior e inferior de la i -ésima articulación q_i . Luego, se considera el funcional

$$L_N(\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^n k_i \left(q_i - \frac{q_{\max_i} + q_{\min_i}}{2} \right)^2, \quad (\text{D.12})$$

donde $k_i \geq 0$, con $1 \leq i \leq n$, son ganancias de diseño que ponderan la influencia de la desviación de la i -ésima articulación contemplada en el funcional de la ecuación (D.12). Luego, para la definición del vector de señales auxiliares de coordinación, puede considerarse

$$\boldsymbol{\tau}_0 = -\nabla L_N(\mathbf{q}), \quad (\text{D.13})$$

es decir, definir al vector $\boldsymbol{\tau}_0$ como el vector opuesto al gradiente del funcional $L_N(\mathbf{q})$. Con el criterio de diseño dado en la ecuación (D.13), el vector $\boldsymbol{\tau}_0$ proporciona la atracción requerida para las variables articulares hacia su valor medio del rango de actuación de cada una de ellas [Khatib, 1986]. La interferencia de estos pares adicionales asociados a la coordinación en la dinámica del efector final se evita proyectándolos en el Espacio Nulo del sistema, como se detalla en la Sección D.2.2.

D.3. Propiedades de la inversa generalizada $\mathbf{J}^{T^G}$

En esta Sección, se exponen las propiedades más relevantes de la inversa generalizada $\mathbf{J}^{T^G}$ considerada para el control dinámico de los sistemas redundantes que se tratan en esta tesis.

D.3.1. Relación con cinemática diferencial inversa

Dado que se ha considerado el caso de sistemas sobreactuados, al considerar una velocidad $\mathbf{v}$ deseada (asociado con algún problema de seguimiento de trayectoria) para el extremo operativo del manipulador, existen infinitas soluciones

que permitirían resolver dicho problema de control. Ante esto, resulta oportuno encontrar la solución de mínima norma del funcional de costo establecido como

$$\min g(\dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_0)^T \mathbf{W} (\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_0), \quad (\text{D.14})$$

sujeto a la restricción $\mathbf{v} = \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}}$, siendo $\mathbf{W} = \mathbf{W}^T > 0$ y $\dot{\mathbf{q}}_0$ un vector de velocidad arbitrario. Notar que, para el caso particular $\dot{\mathbf{q}}_0 \equiv 0$, la solución de mínima norma del funcional de la ecuación (D.14) expresa la solución de mínima energía cinética del manipulador. Luego, para incorporar la restricción se considera la resolución del problema de optimización a partir de los multiplicadores de Lagrange, expresándose el funcional aumentado

$$L(\dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_0)^T \mathbf{W} (\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_0) + \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{v} - \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}}), \quad (\text{D.15})$$

donde $\boldsymbol{\lambda}$ es el vector de multiplicadores de Lagrange. Para la obtención del mínimo, se debe verificar

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T = \mathbf{0}, \quad \left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \right)^T = \mathbf{0} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{\mathbf{q}}^2} > 0. \quad (\text{D.16})$$

Procediendo con el cálculo de las derivadas parciales y teniendo en cuenta las igualdades anteriormente señaladas, se obtiene que

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) = \mathbf{W} (\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_0) - \mathbf{J}^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0} \Rightarrow \dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}}_0 + \mathbf{W}^{-1} \mathbf{J}^T \boldsymbol{\lambda}, \quad (\text{D.17})$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \right) = \mathbf{v} - \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{v} = \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}}, \quad (\text{D.18})$$

y

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{\mathbf{q}}^2} = \mathbf{W} > 0. \quad (\text{D.19})$$

Combinando la ecuación (D.17) con la ecuación (D.18), resulta

$$\mathbf{v} = \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}}_0 + \mathbf{J}\mathbf{W}^{-1} \mathbf{J}^T \boldsymbol{\lambda}. \quad (\text{D.20})$$

Si $\mathbf{J}$ es de rango completo, se consigue $\boldsymbol{\lambda} = (\mathbf{J}\mathbf{W}^{-1} \mathbf{J}^T)^{-1} (\mathbf{v} - \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}}_0)$. Luego, sustituyendo este resultado en la ecuación (D.17), se llega a expresar

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{W}^{-1} \mathbf{J}^T (\mathbf{J}\mathbf{W}^{-1} \mathbf{J}^T)^{-1} \mathbf{v} + \left(\mathbf{I} - \mathbf{W}^{-1} \mathbf{J}^T (\mathbf{J}\mathbf{W}^{-1} \mathbf{J}^T)^{-1} \mathbf{J} \right) \dot{\mathbf{q}}_0. \quad (\text{D.21})$$

Premultiplicando por $\mathbf{J}$ en ambos miembros de la ecuación (D.21) se verifica que

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}} = (\mathbf{J}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{J}^T) (\mathbf{J}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{J}^T)^{-1} \mathbf{v} + \left[\mathbf{J} - (\mathbf{J}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{J}^T) (\mathbf{J}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{J}^T)^{-1} \mathbf{J} \right] \dot{\mathbf{q}}_0 \\ &= \mathbf{v}.\end{aligned}\tag{D.22}$$

Con lo cual, se cumple que $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}$. Haciendo un análisis del resultado obtenido, se observa que al considerar $\mathbf{W} = \mathbf{M}$ y las ecuaciones (D.8) y (D.21), resulta

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{q}} &= \mathbf{M}^{-1}\mathbf{J}^T (\mathbf{J}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{J}^T)^{-1} \mathbf{v} + \left(\mathbf{I} - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{J}^T (\mathbf{J}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{J}^T)^{-1} \mathbf{J} \right) \dot{\mathbf{q}}_0 \\ &= (\mathbf{M}^{-1}\mathbf{J}^T \bar{\mathbf{M}}) \mathbf{v} + (\mathbf{I} - (\mathbf{M}^{-1}\mathbf{J}^T \bar{\mathbf{M}}) \mathbf{J}) \dot{\mathbf{q}}_0 \\ &= \mathbf{J}_M^G \mathbf{v} + (\mathbf{I} - \mathbf{J}_M^G \mathbf{J}) \dot{\mathbf{q}}_0,\end{aligned}\tag{D.23}$$

donde $\mathbf{J}_M^G = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{J}^T \bar{\mathbf{M}}$ expresa la inversa generalizada de la matriz $\mathbf{J}$ con la matriz de ponderación $\mathbf{W} = \mathbf{M}$. Dado que la matriz de inercia es simétrica por construcción, verifica la propiedad $\mathbf{M} = \mathbf{M}^T$, resultando que $(\mathbf{M}^{-1})^T = (\mathbf{M}^T)^{-1} = \mathbf{M}^{-1}$. Luego, se tiene que

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{M}}^T &= \left((\mathbf{J}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{J}^T)^{-1} \right)^T \\ &= \left((\mathbf{J}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{J}^T)^T \right)^{-1} \\ &= \left(\mathbf{J}^{TT} \mathbf{M}^{-1T} \mathbf{J}^T \right)^{-1} \\ &= (\mathbf{J}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{J}^T)^{-1} \\ &= \bar{\mathbf{M}}.\end{aligned}\tag{D.24}$$

Teniendo en cuenta la definición de $\mathbf{J}_M^G$ y la ecuación (D.24), resulta

$$(\mathbf{J}_M^G)^T = (\mathbf{M}^{-1}\mathbf{J}^T \bar{\mathbf{M}})^T = \bar{\mathbf{M}}^T \mathbf{J}^{TT} (\mathbf{M}^{-1})^T = \bar{\mathbf{M}} \mathbf{J} \mathbf{M}^{-1} = \mathbf{J}^{TG}.\tag{D.25}$$

De la ecuación (D.25) se deduce que $(\mathbf{J}^{TG})^T$ es una inversa generalizada de la matriz Jacobiana correspondiente a la solución que minimiza el funcional energético definido en la ecuación (D.14) para el caso en que se considera la matriz de ponderación $\mathbf{W} = \mathbf{M}$.

D.3.2. Condición $\{n\}$ -inversa de $\mathbf{J}^{TG}$

Por un lado, notar que

$$\mathbf{J}^T \mathbf{J}^{TG} \mathbf{J}^T = \mathbf{J}^T (\bar{\mathbf{M}} \mathbf{J} \mathbf{M}^{-1}) \mathbf{J}^T = \mathbf{J}^T (\mathbf{J} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{J}^T)^{-1} (\mathbf{J} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{J}^T) = \mathbf{J}^T, \quad (\text{D.26})$$

cumpléndose que $\mathbf{J}^{TG}$ es $\{1\}$ -inversa de $\mathbf{J}^T$. Por otro lado, se deduce que

$$\mathbf{J}^{TG} \mathbf{J}^T \mathbf{J}^{TG} = (\bar{\mathbf{M}} \mathbf{J} \mathbf{M}^{-1}) \mathbf{J}^T \mathbf{J}^{TG} = (\mathbf{J} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{J}^T)^{-1} (\mathbf{J} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{J}^T) \mathbf{J}^{TG} = \mathbf{J}^{TG}, \quad (\text{D.27})$$

cumpléndose que $\mathbf{J}^{TG}$ es $\{2\}$ -inversa de $\mathbf{J}^T$.

Con lo cual, de las ecuaciones (D.26) y (D.27) se deduce que la matriz $\mathbf{J}^{TG}$ es $\{1, 2\}$ -inversa de $\mathbf{J}^T$.

D.3.3. Independencia de la inercia de la carga para la consistencia dinámica del sistema

Aquí se expone la independencia de la matriz $\mathbf{J}_M^G$ respecto a la inercia de carga de lo que se considera como efector final del sistema manipulador.

Lema D.2. (Extraído de [Featherstone and Khatib, 1997]). La matriz $\mathbf{J}_M^G$ es independiente de la inercia de la carga del efector final.

Demostración. Sea $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{r \times r}$ la inercia de una carga arbitraria localizada en el efector final, donde $\mathbf{L}$ puede ser considerada como una inercia de cuerpo articulado o de cuerpo rígido. Considérese $\mathbf{M}_\oplus = \mathbf{M} + \mathbf{J}^T \mathbf{L} \mathbf{J}$ como la nueva matriz de inercia del espacio articular. Luego, denominando como $\mathbf{J}_\oplus^G$ al Jacobiano del manipulador cargado, por lo expuesto en la Sección D.3.1, se considera

$$\mathbf{J}_\oplus^G = \mathbf{M}_\oplus^{-1} \mathbf{J}^T (\mathbf{J} \mathbf{M}_\oplus^{-1} \mathbf{J}^T)^{-1}. \quad (\text{D.28})$$

Teniendo en cuenta que $\bar{\mathbf{M}}^{-1} = \mathbf{J} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{J}^T$ (ver ecuación (D.8)), y que por lo expuesto en [Bar-Shalom et al., 1990] la matriz $\mathbf{M}_\oplus^{-1}$ puede expresarse como

$$\mathbf{M}_\oplus^{-1} = \mathbf{M}^{-1} - \mathbf{M}^{-1} \mathbf{J}^T (\mathbf{L}^{-1} + \mathbf{J} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{J}^T)^{-1} \mathbf{J} \mathbf{M}^{-1}, \quad (\text{D.29})$$

a partir de las ecuaciones (D.28) y (D.29) se obtiene que

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}_{\oplus}^G &= \left[\mathbf{M}^{-1} \mathbf{J}^T - \mathbf{M}^{-1} \mathbf{J}^T \left(\mathbf{L}^{-1} + \bar{\mathbf{M}}^{-1} \right)^{-1} \bar{\mathbf{M}}^{-1} \right] \\
&\quad \left[\bar{\mathbf{M}}^{-1} - \bar{\mathbf{M}}^{-1} \left(\mathbf{L}^{-1} + \bar{\mathbf{M}}^{-1} \right)^{-1} \bar{\mathbf{M}}^{-1} \right]^{-1} \\
&= \mathbf{M}^{-1} \mathbf{J}^T \left[\mathbf{I} - \left(\mathbf{L}^{-1} + \bar{\mathbf{M}}^{-1} \right)^{-1} \bar{\mathbf{M}}^{-1} \right] \left[\mathbf{I} - \left(\mathbf{L}^{-1} + \bar{\mathbf{M}}^{-1} \right)^{-1} \bar{\mathbf{M}}^{-1} \right]^{-1} \bar{\mathbf{M}} \\
&= \mathbf{M}^{-1} \mathbf{J}^T \bar{\mathbf{M}} \\
&= \mathbf{J}_{\mathbf{M}}^G.
\end{aligned} \tag{D.30}$$

Con lo cual, se concluye que $\mathbf{J}_{\mathbf{M}}^G$ resulta independiente de la carga. Luego, teniendo en cuenta la ecuación (D.25) se deduce que

$$\mathbf{N}_{\oplus} = \mathbf{I} - \mathbf{J}^T \mathbf{J}_{\oplus}^{T^G} = \mathbf{I} - \mathbf{J}^T (\mathbf{J}_{\oplus}^G)^T = \mathbf{I} - \mathbf{J}^T (\mathbf{J}_{\mathbf{M}}^G)^T = \mathbf{I} - \mathbf{J}^T \mathbf{J}^{T^G} = \mathbf{N}. \tag{D.31}$$

Del resultado de la ecuación (D.31) se infiere que el proyector de Espacio Nulo con la carga $\mathbf{L}$ resulta igual al proyector de Espacio Nulo original del sistema no cargado. $\square$

El Lema D.2 asegura que el cambio en la inercia de la carga no modifica las conclusiones obtenidas para el proyector de Espacio Nulo establecido en el Lema D.1. Luego, esta independencia en la inercia del efector final permite ignorar las eventuales variaciones en la carga del extremo operativo del manipulador en el cómputo del proyector de espacio Nulo de la ley de control del manipulador, quedando asegurada de esta manera la propiedad de que el Proyector de espacio Nulo considerado para el control del sistema resulta dinámicamente consistente (ver Definición 10). En forma resumida, la implicancia del Lema D.2 radica esencialmente en las siguientes cuestiones:

- El cálculo de $(\mathbf{J}_{\mathbf{M}}^G)^T = \mathbf{J}^{T^G}$ se simplifica considerablemente, puesto que no se requiere conocer la inercia de la carga a ser movilizadada;
- Los esquemas de resolución de redundancia que utilizan $\mathbf{J}^{T^G}$ pueden producir movimientos independientes de la carga, haciendo que estos algoritmos de control permitan desarrollar esfuerzos asociados a movimientos internos, referidos a la coordinación del sistema, sin tener en cuenta la influencia de la carga a ser desplazada.

Bibliografía

- M. Al Janaideh, M. Al Saaideh, and M. Rakotondrabe. On hysteresis modeling of a piezoelectric precise positioning system under variable temperature. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 145:106880, 2020.
- Y. Altintas, K. Erkorkmaz, and W.-H. Zhu. Sliding mode controller design for high speed feed drives. *CIRP Annals*, 49(1):265–270, 2000.
- S. S. Aphale, B. Bhikkaji, and S. R. Moheimani. Minimizing scanning errors in piezoelectric stack-actuated nanopositioning platforms. *IEEE Transactions on Nanotechnology*, 7(1):79–90, 2008.
- Y. Bar-Shalom, T. E. Fortmann, and P. G. Cable. *Tracking and data association*. Acoustical Society of America, 1990.
- S. Bashash and N. Jalili. Robust adaptive control of coupled parallel piezo-flexural nanopositioning stages. *IEEE/ASME Transactions on mechatronics*, 14(1):11–20, 2009.
- F. Bottero, M. A. Pucheta, and C. A. Schurrer. Diseño de un flexor de precisión para un dispositivo generador de ángulos pequeños para aplicaciones de calibración en metrología. *Mecánica Computacional*, 34(39):2689–2714, 2016.
- H. Butler. Position control in lithographic equipment [applications of control]. *IEEE Control Systems Magazine*, 31(5):28–47, 2011.
- A. Casquero, R. Hecker, D. Vicente, and G. Flores. Parameter identification of a feed drive for high speed machine tools. In *ABCMS Symposium Series in Mechatronics*, volume 4, pages 546–552, 2010.
- P. Chen, X.-X. Bai, L.-J. Qian, and S.-B. Choi. An approach for hysteresis modeling based on shape function and memory mechanism. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 23(3):1270–1278, 2018.

- Q. Chen and Z.-X. Yang. Adaptive rbf-pidsmc control method with estimated model parameters for a piezo-actuated stage. *Microsystem Technologies*, 27:69–77, 2021.
- X. Chen, S. Zhang, X. Bao, and H. Zhao. Master and slave control of a dual-stage for precision positioning. In *2008 3rd IEEE International Conference on Nano/Micro Engineered and Molecular Systems*, pages 583–587. IEEE, 2008.
- C. Chircov and A. M. Grumezescu. Microelectromechanical systems (mems) for biomedical applications. *Micromachines*, 13(2):164, 2022.
- A. Chouza, O. Barambones, I. Calvo, and J. Velasco. Sliding mode-based robust control for piezoelectric actuators with inverse dynamics estimation. *Energies*, 12(5):943, 2019.
- B. Cong, Z. Chen, and X. Liu. On adaptive sliding mode control without switching gain overestimation. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 24(3):515–531, 2014.
- D. Croft, G. Shed, and S. Devasia. Creep, hysteresis, and vibration compensation for piezoactuators: Atomic force microscopy application. *J. Dyn. Sys., Meas., Control*, 123(1):35–43, 2001.
- C. Desoer and M. Vidyasagar. *Feedback Systems: Input–Output Properties*. Academic Press, New York, 1975.
- S. Devasia, E. Eleftheriou, and S. R. Moheimani. A survey of control issues in nanopositioning. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 15(5):802–823, 2007.
- A. Dietrich, C. Ott, and A. Albu-Schäffer. An overview of null space projections for redundant, torque-controlled robots. *The International Journal of Robotics Research*, 34(11):1385–1400, 2015.
- S. M. Dutta. *Dynamic Hysteresis Modeling and Applications*. PhD thesis, Rice University of Houston, Texas, 2004.
- C. Edwards and S. Spurgeon. *Sliding mode control: theory and applications*. Crc Press, 1998.
- İ. Eker and Ş. A. Akınal. Sliding mode control with integral augmented sliding surface: design and experimental application to an electromechanical system. *Electrical Engineering*, 90:189–197, 2008.
- A. Elfizy, G. Bone, and M. Elbestawi. Design and control of a dual-stage feed drive. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 45(2):153–165, 2005.

- K. Erkorkmaz and Y. Altintas. High speed cnc system design. part ii: modeling and identification of feed drives. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 41(10):1487–1509, 2001.
- A. Esbrook, X. Tan, and H. K. Khalil. Control of systems with hysteresis via servocompensation and its application to nanopositioning. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 21(3):725–738, 2012.
- R. Featherstone and O. Khatib. Load independence of the dynamically consistent inverse of the jacobian matrix. *The International Journal of Robotics Research*, 16(2):168–170, 1997.
- MTR Motor Manual*. Festo, 2000a. www.festo.com/catalogue.
- Manual of Description Smart Electromotor Controller Festo*. Festo, 2000b. www.festo.com.
- Manual of Commissioning of Smart Electromotor Controller Festo*. Festo, 2000c. www.festo.com.
- Manual of Description of Fitting and Instalation of Smart Electromotor Controller Festo*. Festo, 2000d. www.festo.com.
- A. Fleming and Y. Yong. Piezoelectric actuators with integrated high voltage power electronics. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, vol, 2014.
- A. Fleming, B. Kenton, and K. Leang. Bridging the gap between conventional and video-speed scanning probe microscopes. *Ultramicroscopy*, 110(9):1205–1214, 2010.
- A. J. Fleming and K. K. Leang. Charge drives for scanning probe microscope positioning stages. *Ultramicroscopy*, 108(12):1551–1557, 2008.
- G. Flores, L. Lamas, M. Alejandro, J. Isasti, and R. Hecker. Impacto de simplificaciones de modelado en la prediccion del desempeno de posicionadores nanometricos. In *VIII Congreso Argentino de Ingenieria Mecanica - III Congreso de Ingenieria Ferroviaria, Santa Fe, Argentina*, 2023.
- G. M. Flores, L. P. Ramirez, L. I. Lamas, and R. L. Hecker. Estudio preliminar de un posicionador nanométrico con brazo de palanca. *Mecánica Computacional*, 36(35): 1617–1625, 2018.
- W. S. Galinaitis. *Two methods for modeling scalar hysteresis and their use in controlling actuators with hysteresis*. PhD thesis, Virginia Tech, 1999.

- J. Gan and X. Zhang. A review of nonlinear hysteresis modeling and control of piezoelectric actuators. *AIP Advances*, 9(4), 2019.
- M. Goldfarb and N. Celanovic. Modeling piezoelectric stack actuators for control of micromanipulation. *IEEE Control Systems Magazine*, 17(3):69–79, 1997a.
- M. Goldfarb and N. Celanovic. A lumped parameter electromechanical model for describing the nonlinear behavior of piezoelectric actuators. 1997b.
- C. Griffiths, H. Evans, and A. Fahmy. Microgripper design and evaluation for automated lwire assembly: a survey. *Microsystem Technologies*, pages 1–24, 2020.
- G. Gu and L. Zhu. Modeling of rate-dependent hysteresis in piezoelectric actuators using a family of ellipses. *Sensors and Actuators A: Physical*, 165(2):303–309, 2011.
- G.-Y. Gu and L.-M. Zhu. Motion control of piezoceramic actuators with creep, hysteresis and vibration compensation. *Sensors and Actuators A: Physical*, 197:76–87, 2013.
- G.-Y. Gu, M.-J. Yang, and L.-M. Zhu. Real-time inverse hysteresis compensation of piezoelectric actuators with a modified prandtl-ishlinskii model. *Review of Scientific Instruments*, 83(6), 2012a.
- G.-Y. Gu, L.-M. Zhu, C.-Y. Su, and H. Ding. Motion control of piezoelectric positioning stages: modeling, controller design, and experimental evaluation. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 18(5):1459–1471, 2012b.
- G.-Y. Gu, L.-M. Zhu, C.-Y. Su, H. Ding, and S. Fatikow. Modeling and control of piezo-actuated nanopositioning stages: A survey. *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, 13(1):313–332, 2014.
- G.-Y. Gu, C.-X. Li, L.-M. Zhu, and C.-Y. Su. Modeling and identification of piezoelectric-actuated stages cascading hysteresis nonlinearity with linear dynamics. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 21(3):1792–1797, 2015.
- G. Guo, D. Wu, and T. C. Chong. Modified dual-stage controller for dealing with secondary-stage actuator saturation. *IEEE Transactions on Magnetics*, 39(6):3587–3592, 2003.
- L. Guo, D. Martin, and D. Brunnett. Dual-stage actuator servo control for high density disk drives. In *1999 IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics (Cat. No. 99TH8399)*, pages 132–137. IEEE, 1999.
- Manual de Encoder Rotacional*. Heidenhain, 2011. www.heidenhain.de.
- Catálogo de Encoder Rotacional*. Heidenhain, 2015. www.heidenhain.de.

- D. Hoshino, N. Kamamichi, and J. Ishikawa. Friction compensation using time variant disturbance observer based on the lugre model. In *2012 12th IEEE International Workshop on Advanced Motion Control (AMC)*, pages 1–6. IEEE, 2012.
- A. Hosovsky, S. Hloch, J. Jurko, A. Panda, and M. Trojanova. Preliminary investigation of static and dynamic hysteresis of dmsp-5 fluid muscle. *MM Science Journal*, 2018.
- B. Hredzak, G. Herrmann, and G. Guo. Short and long-span track seek control for hard disk drive dual-stage servo actuators. In *31st Annual Conference of IEEE Industrial Electronics Society, 2005. IECON 2005.*, pages 6–pp. IEEE, 2005.
- D. Huang, D. Min, Y. Jian, and Y. Li. Current-cycle iterative learning control for high-precision position tracking of piezoelectric actuator system via active disturbance rejection control for hysteresis compensation. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 67(10):8680–8690, 2019.
- F. Ikhoulane and J. Rodellar. *Systems with hysteresis: analysis, identification and control using the Bouc-Wen model*. John Wiley & Sons, 2007.
- F. Ikhoulane, V. Mañosa, and J. Rodellar. Dynamic properties of the hysteretic bouc-wen model. *Systems & control letters*, 56(3):197–205, 2007.
- P. A. Ioannou and J. Sun. *Robust adaptive control*, volume 1. PTR Prentice-Hall Upper Saddle River, NJ, 1996.
- M. Ismail, F. Ikhoulane, and J. Rodellar. The hysteresis bouc-wen model, a survey. *Archives of computational methods in engineering*, 16:161–188, 2009.
- N. Jalili. *Piezoelectric-based vibration control: from macro to micro/nano scale systems*. Springer Science and Business Media, 2009.
- Y. Jian, D. Huang, J. Liu, and D. Min. High-precision tracking of piezoelectric actuator using iterative learning control and direct inverse compensation of hysteresis. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 66(1):368–377, 2018.
- D. C. Jiles and D. L. Atherton. Theory of ferromagnetic hysteresis. *Journal of magnetism and magnetic materials*, 61(1-2):48–60, 1986.
- K. Johansson and C. Canudas-De-Wit. Revisiting the lugre friction model. *IEEE Control systems magazine*, 28(6):101–114, 2008.
- H. Jung, J. Y. Shim, and D. Gweon. New open-loop actuating method of piezoelectric actuators for removing hysteresis and creep. *Review of Scientific Instruments*, 71(9): 3436–3440, 2000a.

- H. Jung, J. Y. Shim, and D. Gweon. New open-loop actuating method of piezoelectric actuators for removing hysteresis and creep. *Review of Scientific Instruments*, 71(9):3436–3440, 2000b.
- H. Kaizuka and B. Siu. A simple way to reduce hysteresis and creep when using piezoelectric actuators. *Japanese journal of applied physics*, 27(5A):L773, 1988.
- B. J. Kenton and K. K. Leang. Design and control of a three-axis serial-kinematic high-bandwidth nanopositioner. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 17(2):356–369, 2011.
- H. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 2000.
- O. Khatib. Real-time obstacle avoidance for manipulators and mobile robots. *The international journal of robotics research*, 5(1):90–98, 1986.
- O. Khatib. A unified approach for motion and force control of robot manipulators: The operational space formulation. *IEEE Journal on Robotics and Automation*, 3(1):43–53, 1987.
- O. Khatib. Inertial properties in robotic manipulation: An object-level framework. *The international journal of robotics research*, 14(1):19–36, 1995.
- H. S. Kim, J.-H. Kim, and J. Kim. A review of piezoelectric energy harvesting based on vibration. *International journal of precision engineering and manufacturing*, 12:1129–1141, 2011.
- K. Kim, J. Kim, X. Jiang, and T. Kim. Static force measurement using piezoelectric sensors. *Journal of Sensors*, 2021:1–8, 2021.
- Y.-H. Kim and S.-H. Lee. An approach to dual-stage servo design in computer disk drives. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 12(1):12–20, 2004.
- N. Korobova. Piezoelectric mems technologies. In *Advanced piezoelectric materials*, pages 533–574. Elsevier, 2017.
- P. Krejci and K. Kuhnen. Inverse control of systems with hysteresis and creep. *IEE Proceedings-Control Theory and Applications*, 148(3):185–192, 2001.
- M. Krstic, K. I., and P. Kokotovic. *Nonlinear and Adaptive Control Design*. John Wiley & Sons, Inc., 1995.
- S. J. Kwon and W. K. Chung. Control of coarse/fine dual-stage positioning system. *Perturbation Compensator based Robust Tracking Control and State Estimation of Mechanical Systems*, pages 111–128, 2004.

- V. Lampaert. Modelling and control of dry sliding friction in mechanical systems (ph. d. thesis). *Department Werktuigkunde, Katholieke Universiteit Leuven, Belgium*, 2003.
- V. Lampaert and J. Swevers. Online identification of hysteresis functions with non-local memory. In *2001 IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics. Proceedings (Cat. No. 01TH8556)*, volume 2, pages 833–837. IEEE, 2001.
- K. K. Leang, Q. Zou, and S. Devasia. Feedforward control of piezoactuators in atomic force microscope systems. *IEEE Control Systems Magazine*, 29(1):70–82, 2009.
- Y. Li and Q. Xu. Adaptive sliding mode control with perturbation estimation and pid sliding surface for motion tracking of a piezo-driven micromanipulator. *IEEE Transactions on control systems technology*, 18(4):798–810, 2009.
- C. Liu, Y. Fang, Y. Wu, and Z. Fan. A digital observer-based repetitive learning composite control method for large range piezo-driven nanopositioning systems. *Machines*, 10(11):1092, 2022.
- W. Liu, L. Cheng, Z.-G. Hou, and M. Tan. An active disturbance rejection controller with hysteresis compensation for piezoelectric actuators. In *2016 12th World Congress on Intelligent Control and Automation (WCICA)*, pages 2148–2153. IEEE, 2016.
- Y. Liu, T. Li, and L. Sun. Design of a control system for a macro-micro dual-drive high acceleration high precision positioning stage for ic packaging. *Science in China Series E: Technological Sciences*, 52(7):1858–1865, 2009.
- Y. Liu, J. Shan, U. Gabbert, and N. Qi. Hysteresis and creep modeling and compensation for a piezoelectric actuator using a fractional-order maxwell resistive capacitor approach. *Smart Materials and Structures*, 22(11):115020, 2013a.
- Y. Liu, J. Shan, and N. Qi. Creep modeling and identification for piezoelectric actuators based on fractional-order system. *Mechatronics*, 23(7):840–847, 2013b.
- J. Macki, P. Nistri, and P. Zecca. Mathematical models for hysteresis. *SIAM Review*, 35(1):94–123, 1993.
- J. A. Main, E. Garcia, and D. V. Newton. Precision position control of piezoelectric actuators using charge feedback. *Journal of Guidance, control, and dynamics*, 18(5):1068–1073, 1995.
- Optimization Toolbox User's Guide Matlab*. Matlab, 2011. www.mathworks.com.
- R. J. Merry, N. C. De Kleijn, M. J. Van De Molengraft, and M. Steinbuch. Using a walking piezo actuator to drive and control a high-precision stage. *IEEE/ASME Transactions on mechatronics*, 14(1):21–31, 2009.

- Manual of DAPIO31*. Microstar Laboratories, 2002. www.mstarlabs.com.
- Manual of MSXB 050 Accessory Board*. Microstar Laboratories, 2004. www.mstarlabs.com.
- Manual of Analog Output Accessory Board*. Microstar Laboratories, 2005. www.mstarlabs.com.
- Manual of DAP 5200a*. Microstar Laboratories, 2006. www.mstarlabs.com.
- J. Minase, T.-F. Lu, B. Cazzolato, and S. Grainger. A review, supported by experimental results, of voltage, charge and capacitor insertion method for driving piezoelectric actuators. *Precision Engineering*, 34(4):692–700, 2010.
- A. Mitrovic, K. K. Leang, and G. M. Clayton. Analysis and experimental comparison of range-based control for dual-stage nanopositioners. *Mechatronics*, 69:102371, 2020.
- S. Moheimani. Invited review article: Accurate and fast nanopositioning with piezoelectric tube scanners: Emerging trends and future challenges. *Review of Scientific Instruments*, 79(7), 2008.
- R. Nagamune, X. Huang, and R. Horowitz. Robust h2 synthesis for dual-stage multi-sensing track-following servo systems in hdds. In *2006 American Control Conference*, pages 1284–1289. IEEE, 2006.
- V. A. Neelakantan, G. N. Washington, and N. K. Bucknor. Model predictive control of a two stage actuation system using piezoelectric actuators for controllable industrial and automotive brakes and clutches. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 19(7):845–857, 2008.
- B. Nemec and L. Zlajpah. Null space velocity control with dynamically consistent pseudo-inverse. *Robotica*, 18(5):513–518, 2000.
- N. T. Nguyen and N. T. Nguyen. Aerospace applications. *Model-Reference Adaptive Control: A Primer*, pages 349–429, 2018.
- L. Nie, Y. Luo, W. Gao, and M. Zhou. Rate-dependent asymmetric hysteresis modeling and robust adaptive trajectory tracking for piezoelectric micropositioning stages. *Nonlinear Dynamics*, 108(3):2023–2043, 2022.
- PZ180 E-852 PI Seca Manual*. Physik Instrumente (PI), 2009. www.pi.ws.
- PZ201E User Manuel: E-617 High-Power Piezo Amplifier*. Physik Instrumente (PI), 2010. www.pi.ws.

- Piezoelectric Actuators: Components, Technologies and Operation*. Physik Instrumente (PI), 2016. www.pieceramic.com.
- F. Plestan, Y. Shtessel, V. Bregeault, and A. Poznyak. New methodologies for adaptive sliding mode control. *International journal of control*, 83(9):1907–1919, 2010a.
- F. Plestan, Y. Shtessel, V. Bregeault, and A. Poznyak. New methodologies for adaptive sliding mode control. *International journal of control*, 83(9):1907–1919, 2010b.
- A. Preumont et al. *Dynamics of electromechanical and piezoelectric systems*. Springer, 2006.
- M. Rakotondrabe. Bouc–wen modeling and inverse multiplicative structure to compensate hysteresis nonlinearity in piezoelectric actuators. *IEEE Transactions on automation Science and Engineering*, 8(2):428–431, 2010.
- M. Rakotondrabe. Classical prandtl-ishlinskii modeling and inverse multiplicative structure to compensate hysteresis in piezoactuators. In *2012 American control conference (ACC)*, pages 1646–1651. IEEE, 2012.
- M. Rakotondrabe, Y. Haddab, and P. Lutz. Development, modeling, and control of a micro-/nanopositioning 2-dof stick–slip device. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 14(6):733–745, 2009.
- M. S. Rana, H. R. Pota, and I. R. Petersen. Approach for improved positioning of an atomic force microscope piezoelectric tube scanner. *Micro & Nano Letters*, 9(6):407–411, 2014.
- L. Riccardi, D. Naso, B. Turchiano, and H. Janocha. Design of linear feedback controllers for dynamic systems with hysteresis. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 22(4):1268–1280, 2013.
- M. Rieppold, S. Maslo, G. Han, C. Henke, and A. Trächtler. Open-loop linearization for piezoelectric actuator with inverse hysteresis model. *Vibroengineering Procedia*, 22: 47–52, 2019.
- S. Rosenbaum, M. Ruderman, T. Strohla, and T. Bertram. Use of jiles–atherton and preisach hysteresis models for inverse feed–forward control. *Transaction on Magnetics*, 46(12):3984–3989, 2010.
- C. Ru, X. Liu, Y. Sun, et al. *Nanopositioning technologies*. Springer, 2016.
- S. J. Rupitsch. *Piezoelectric sensors and actuators*. Springer, 2019.

- S. Salapaka, A. Sebastian, J. P. Cleveland, and M. V. Salapaka. High bandwidth nanopositioner: A robust control approach. *Review of scientific instruments*, 73(9):3232–3241, 2002.
- Sang, K. Joo, C. W. Kyun, and Y. Youngil. Robust and time-optimal control strategy for coarse/fine dual-stage manipulators [c]. In *Proceedings of IEEE, International Conference on Robotics and Automation*, volume 4, pages 4051–4056, 2000.
- S. Shao, M. Xu, S. Zhang, and S. Xie. Stroke maximizing and high efficient hysteresis hybrid modeling for a rhombic piezoelectric actuator. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 75:631–647, 2016.
- G. Singh and K. Holé. Guaranteed performance in reaching mode of sliding mode controlled systems. *Sadhana*, 29:129–141, 2004.
- R. C. Smith and Z. Ounaies. A domain wall model for hysteresis in piezoelectric materials. *Journal of intelligent material systems and structures*, 11(1):62–79, 2000.
- S. T. Smith. *Foundations of Ultraprecision Mechanism Design*. Taylor and Francis, 1994.
- Sukesh, R. Vig, and N. Kumar. Effect of electric field and temperature on dielectric constant and piezoelectric coefficient of piezoelectric materials: a review. *Integrated Ferroelectrics*, 167(1):154–175, 2015.
- H. Tang and Y. Li. Optimal design of the lever displacement amplifiers for a flexure-based dual-mode motion stage. In *2012 IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics (AIM)*, pages 753–758. IEEE, 2012.
- H. Tang and Y. Li. Feedforward nonlinear pid control of a novel micromanipulator using preisach hysteresis compensator. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, 34:124–132, 2015.
- S. Tayouri, S. F. Alem, I. Izadi, J. Ghaisari, and F. Sheikholeslam. Chattering-free pd sliding mode control of piezoelectric actuators with hysteresis. In *2019 27th Iranian Conference on Electrical Engineering (ICEE)*, pages 1064–1069. IEEE, 2019.
- Closed-Loop Piezoelectric Stack Fitted with Strain Gauge, 150 V, 38.5 μ m - ThorLabs-PK4FYC2*. Thorlabs, 2021. www.thorLabs.com.
- Y. Tian, B. Shirinzadeh, D. Zhang, and G. Alici. Development and dynamic modelling of a flexure-based scott–russell mechanism for nano-manipulation. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 23(3):957–978, 2009.
- Manual of DNA/DNR-AI-201-100 Analog Acquisition Board*. United Electronic Industries, 2009a. www.ueidaq.com.

- Manual of DNA/DNR-AO-308 Analog Output Layer*. United Electronic Industries, 2009b. www.ueidaq.com.
- Manual of Industrial and embedded control, data acquisition and logging*. United Electronic Industries, 2013a. www.ueidaq.com.
- Manual of UEISim User Manual 2.8*. United Electronic Industries, 2013b. www.ueidaq.com.
- A. Vázquez Carazo. *Novel piezoelectric transducers for high voltage measurements*. Universitat Politècnica de Catalunya, 2000.
- R. Venkataraman, X. Tan, and P. Krishnaprasad. Control of hysteresis: Theory and experimental results. *Smart Structures and Materials 2001: Modeling, Signal Processing, and Control in Smart Structures*, 4326, 2001.
- C. Visone. Hysteresis modelling and compensation for smart sensors and actuators. In *Journal of Physics: Conference Series*, volume 138, page 012028. IOP Publishing, 2008.
- S. Wang, W. Rong, L. Wang, H. Xie, L. Sun, and J. K. Mills. A survey of piezoelectric actuators with long working stroke in recent years: Classifications, principles, connections and distinctions. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 123:591–605, 2019.
- Y. Wang, C.-Y. Su, and H. Hong. Model reference control including adaptive inverse hysteresis for systems with unknown input hysteresis. In *Proceedings of the 2007 IEEE International Conference on Networking, Sensing and Control, London*, pages 70–75. IEEE, 2007.
- R. Xiong, X. Liu, and Z. Lai. Modeling of hysteresis in piezoelectric actuator based on segment similarity. *Micromachines*, 6(11):1805–1824, 2015.
- Q. Xu. Design and development of a flexure-based dual-stage nanopositioning system with minimum interference behavior. *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, 9(3):554–563, 2012.
- Q. Xu. *Micromachines for biological micromanipulation*. Springer, 2018.
- Q. Xu and K. K. Tan. *Advanced control of piezoelectric micro-/nano-positioning systems*. Springer, 2016.
- T. Yamaguchi, M. Hirata, and C. K. Pang. *Advances in high-performance motion control of mechatronic systems*. CRC press, 2013.

- P. Yan and Y. Zhang. High precision tracking of a piezoelectric nano-manipulator with parameterized hysteresis compensation. *Smart Materials and Structures*, 27(6):065018, 2018.
- J. Yi, S. Chang, and Y. Shen. Disturbance-observer-based hysteresis compensation for piezoelectric actuators. *IEEE/Asme transactions on mechatronics*, 14(4):456–464, 2009.
- Y. Yong, S. R. Moheimani, B. J. Kenton, and K. Leang. Invited review article: High-speed flexure-guided nanopositioning: Mechanical design and control issues. *Review of scientific instruments*, 83(12), 2012.
- Y. K. Yong and S. R. Moheimani. Collocated z-axis control of a high-speed nanopositioner for video-rate atomic force microscopy. *IEEE Transactions on Nanotechnology*, 14(2): 338–345, 2015.
- Y. K. Yong, S. S. Aphale, and S. R. Moheimani. Design, identification, and control of a flexure-based xy stage for fast nanoscale positioning. *IEEE Transactions on Nanotechnology*, 8(1):46–54, 2008.
- X. Yu, Y. Feng, and Z. Man. Terminal sliding mode control—an overview. *IEEE Open Journal of the Industrial Electronics Society*, 2:36–52, 2020.
- T. Y. Zablotskaya. Analyzing the classical and extended bouc-wen model parameters. In *2020 2nd International Conference on Control Systems, Mathematical Modeling, Automation and Energy Efficiency (SUMMA)*, pages 576–581. IEEE, 2020.
- C. Zhang, J. Qiu, Y. Chen, and H. Ji. Modeling hysteresis and creep behavior of macrofiber composite-based piezoelectric bimorph actuator. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 24(3):369–377, 2013.
- T. Zhang. Influence of hysteresis on the vibration control of a smart beam with a piezoelectric actuator by the bouc–wen model. *Shock and Vibration*, 2020:1–11, 2020.
- Y. Zhang and P. Yan. An adaptive integral sliding mode control approach for piezoelectric nano-manipulation with optimal transient performance. *Mechatronics*, 52:119–126, 2018a.
- Y. Zhang and P. Yan. An adaptive integral sliding mode control approach for piezoelectric nano-manipulation with optimal transient performance. *Mechatronics*, 52:119–126, 2018b.
- Y. Zhang and P. Yan. Adaptive observer-based integral sliding mode control of a piezoelectric nano-manipulator. *IET Control Theory & Applications*, 13(14):2173–2180, 2019.

- Y. Zhang, P. Yan, and Z. Zhang. Frequency-shaped sliding mode control of piezoelectric nano-stages with hysteresis estimation. *ISA transactions*, 107:340–349, 2020.
- Y. Zhang, L. Xue, and B. Luo. A nonlinear observer-based adaptive robust control approach for a class of uncertain asymmetric hysteretic systems. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering*, 235(3):347–354, 2021.
- H. Zhu, C. K. Pang, and T. J. Teo. Integrated servo-mechanical design of a fine stage for a coarse/fine dual-stage positioning system. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 21(1):329–338, 2015.
- X. Zhu and X. Lu. Parametric identification of bouc-wen model and its application in mild steel damper modeling. *Procedia Engineering*, 14:318–324, 2011.



ISBN: 978-631-90-9620-0